

SÉMINAIRE SCHÜTZENBERGER

JEAN BERSTEL

Sur des fractions rationnelles particulières

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 2, p. 1-9.

http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A2_0

© Séminaire Schützenberger
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schützenberger » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

18 novembre 1969

SUR DES FRACTIONS RATIONNELLES PARTICULIÈRES

par Jean BERSTEL

1. - Sur des polynômes d'un type particulier.

Rappelons qu'un polynôme $f \in \mathbb{Q}[X]$ est dit à valeurs entières si $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier n . Si f est à valeurs entières de degré m , alors $m!f$ est un polynôme à coefficients entiers. Le théorème suivant est classique ([6], section 8, n° 114 et n° 190) :

THÉORÈME 1.1. Soit $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme à valeurs entières tel que $f(n)$ soit puissance k -ième d'un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f est puissance k -ième d'un polynôme g à valeurs entières.

Plusieurs généralisations de ce théorème sont possibles. On peut en effet se demander pour quels types d'ensembles $T \subset \mathbb{Z}$, l'hypothèse " $n \in T$, $f(n)$ puissance k -ième d'un entier" entraîne la conclusion du théorème 1.1. Un premier résultat dans ce sens est le suivant :

THÉORÈME 1.2. - Soit f un polynôme à valeurs entières. S'il existe un entier $M(f)$, dépendant de f , tel que $f(n)$ soit puissance k -ième d'un entier, pour tout n , $0 \leq n \leq M(f)$, alors f est puissance k -ième d'un polynôme g à valeurs entières.

La démonstration est en tout point analogue à celle donnée par PÓLYA et SZEGÖ ([6], section 8, solution du n° 114) pour le théorème 1.1.

Par ailleurs, DAVENPORT, LEWIS et SCHINZEL [2] déduisent d'un résultat beaucoup plus général (théorème 1.8, infra) le corollaire suivant :

THÉORÈME 1.3. - Soit f un polynôme à coefficients entiers. Si dans toute progression arithmétique infinie, il existe un entier n tel que $f(n)$ soit puissance k -ième d'un entier, alors f est puissance k -ième d'un polynôme g à coefficients entiers.

Ce résultat reste vrai si l'on suppose f à valeurs entières. Plus précisément, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.4. - Soit f un polynôme à valeurs entières, et supposons que toute progression arithmétique infinie contienne un entier n tel que $f(n)$ soit puis-

sance k-ième d'un entier. Alors il existe un polynôme g à valeurs entières tel que $f = g^k$.

En effet : Soit m le degré de f , et posons $f' = (m!)^k f$. Alors f' vérifie les hypothèses du théorème 1.3, et s'écrit donc sous la forme $f' = (g')^k$, avec $g' \in \mathbb{Z}[X]$. Comme $m!$ divise $g'(n)$ pour tout n , le polynôme $g = g'/m!$ est à valeurs entières, et on a $f = g^k$.

Q. E. D.

L'existence d'une infinité d'entiers naturels pour lesquels $f(n)$ est puissance k-ième (ou même carré d'un entier) n'implique pas en général que f est puissance k-ième (ou carré d'un polynôme). Considérons en effet le polynôme (irréductible sur \mathbb{Q}) :

$$f(x) = dx^2 + 1, \quad d > 0 \text{ non carré.}$$

Il existe une infinité d'entiers n tels que $f(n)$ soit un carré, car l'équation de Pell

$$y^2 - dx^2 = 1$$

a une infinité de solutions ([3], § 14.5). On a toutefois le résultat suivant.

THÉORÈME 1.5. - Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers tel que tout facteur irréductible sur \mathbb{Q} de f soit de degré ≥ 3 . Si $f(n)$ est un carré pour une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$, alors f est le carré d'un polynôme g à coefficients entiers.

La démonstration utilise le théorème suivant, dont LÉVEQUE ([4], th. 4-18) attribue la démonstration à un auteur anonyme :

THÉORÈME 1.6. - Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ de degré ≥ 3 , et ayant tous ses zéros distincts. Soit a un entier non nul. Alors l'équation diophantienne

$$ay^2 = f(x)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $x, y \in \mathbb{Z}$.

Démonstration du théorème 1.5. - Nous utilisons le théorème 1.6, avec $a = 1$. Procédons par récurrence sur le nombre k de facteurs irréductibles de f .

Si $k = 1$, le théorème est vrai puisqu'un polynôme irréductible a tous ses zéros distincts : $f(n)$ ne peut donc être carré d'un entier pour une infinité de n en vertu du théorème 1.6.

Supposons donc $k > 1$, et supposons que $f(n)$ soit carré d'un entier pour une infinité de n . Alors f a au moins une racine de multiplicité ≥ 2 en vertu du théorème 1.6. Le polynôme f a alors un facteur irréductible, soit h , de multipli-

cité ≥ 2 , car deux polynômes irréductibles sur \mathbb{Q} à coefficients entiers ayant un zéro en commun sont égaux. Considérons alors le polynôme $f' = f/h^2$. Pour ce polynôme, $f'(n)$ est encore un carré pour une infinité d'entiers n , et il a $k - 2$ facteurs irréductibles. Il est donc, par hypothèse de récurrence, carré d'un polynôme $g' \in \mathbb{Z}[X]$. Posant $g = hg'$, on a bien $f = g^2$.

Q. E. D.

Dans ses recherches sur les langages formels, OGDEN ([5], p. 9) a démontré la généralisation suivante du théorème 1.1.

THÉOREME 1.7. - Soient $a, b \in \mathbb{C}[X]$, vérifiant $a(\mathbb{N}) \subset b(\mathbb{N})$. Alors il existe un polynôme $r \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $a = b \circ r$.

On retrouve le théorème 1.1 en posant $b(x) = x^k$, et en supposant a à valeurs entières. DAVENPORT, LEWIS et SCHINZEL ont établi ([2], th. 1) le théorème très général suivant :

THÉOREME 1.8. - Soit $F(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ un polynôme à coefficients entiers. Si toute progression arithmétique infinie contient un entier x tel que l'équation $F(x, y) = 0$ ait une solution entière y au moins, alors il existe un polynôme $r \in \mathbb{Q}[X]$ tel que l'on ait identiquement $F(X, r(X)) = 0$.

Le théorème 1.7 en découle si a et b sont à valeurs entières. Il suffit en effet de poser

$$F(x, y) = D(f(x) - g(y)),$$

où D est choisi convenablement pour rendre le polynôme F à coefficients entiers.

Plus généralement, le théorème 1.8 signifie que, parmi les fonctions algébriques solutions d'une équation

$$P_0(x) + P_1(x)y + \dots + P_r(x)y^r = 0, \quad P_i \in \mathbb{Z}[X],$$

il y en a une qui est un polynôme, si cette équation admet une solution entière y pour un x au moins dans toute progression arithmétique.

Suivant RAUZY [7], nous appellerons arithmétiquement dense un ensemble $A \subset \mathbb{Z}$ qui rencontre toute progression arithmétique de \mathbb{Z} , donc tel que, $\forall a, m \in \mathbb{Z}$, il existe $h \in A$ avec $h \equiv a \pmod{m}$. La terminologie est justifiée par la remarque suivante :

Si l'on munit \mathbb{Z} de la topologie la moins fine qui rend continues les injections canoniques $n \mapsto n$ de \mathbb{Z} dans \mathbb{Q}_p , pour tout nombre premier p , alors une base des voisinages d'un entier a est formée des progressions arithmétiques

$$V_m(a) = \{b \in \underline{\mathbb{Z}} : b \equiv a \pmod{m}\} \text{ pour tout } m \in \underline{\mathbb{N}}^*,$$

et par conséquent \underline{A} est un sous-ensemble dense de $\underline{\mathbb{Z}}$ pour cette topologie (RAUZY [7]). Il est clair qu'un sous-ensemble $\underline{A} \subset \underline{\mathbb{N}}$ qui rencontre toute progression arithmétique $\{an + b\}_{n \in \underline{\mathbb{N}}}$ avec $a, b > 0$ est arithmétiquement dense dans $\underline{\mathbb{Z}}$, et est aussi dense dans $\underline{\mathbb{N}}$ pour la topologie définie précédemment.

Donnons quelques propriétés élémentaires des ensembles arithmétiquement denses $\underline{A} \subset \underline{\mathbb{Z}}$:

(a) [2] \underline{A} rencontre toute progression arithmétique une infinité de fois.

La démonstration suivante est de DAVENPORT, LEWIS et SCHINZEL ([2], p. 109) : soit $x_0 \equiv a \pmod{d}$ un terme de la progression arithmétique $\{dk + a : k \in \underline{\mathbb{N}}\}$ appartenant à \underline{A} . Pour tout $n \in \underline{\mathbb{N}}^*$, \underline{A} contient un entier $x_n \equiv x_0 + d^n \pmod{d^{n+1}}$ de la progression arithmétique

$$\{d^{n+1}k + x_0 + d^n : k \in \underline{\mathbb{N}}\}.$$

Les entiers x_n sont tous distincts, et vérifient évidemment $x_n \equiv a \pmod{d}$.

(b) Si $a \in \underline{\mathbb{Z}}$ et $m \in \underline{\mathbb{N}}^*$, l'ensemble $B = \{k \in \underline{\mathbb{Z}} : a + km \in \underline{A}\}$ est arithmétiquement dense.

Considérons en effet une progression arithmétique

$$\alpha = \{a' + k'm : k' \in \underline{\mathbb{Z}}\}.$$

Parmi les entiers k tels que $a + km \in \underline{A}$, il y en a au moins un qui s'écrit sous la forme $k = q' + k'm$, car la progression arithmétique $\{a + a'm + k''mm' : k'' \in \underline{\mathbb{Z}}\}$ rencontre \underline{A} . L'ensemble \underline{B} rencontre donc la progression arithmétique α , et est par conséquent arithmétiquement dense.

(c) [7] L'ensemble $\underline{A}' = \{n \in \underline{A} : n \geq N_0 \text{ fixé}\}$ est arithmétiquement dense.

Ceci découle immédiatement de (a).

Considérons maintenant un sous-ensemble $\underline{A} \subset \underline{\mathbb{N}}$ arithmétiquement dense, et rappelons que la densité supérieure d^+P (resp. densité dP lorsqu'elle existe) d'une partie P de $\underline{\mathbb{N}}$ est définie par

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \text{Card } P \cap \{0, \dots, n\} \right) \text{ (resp. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Card } P \cap \{0, \dots, n\} \text{)}.$$

(d) Si $d^+P = 1$, alors P est arithmétiquement dense.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que P ne rencontre pas la progression arithmétique $\{an + b : n \in \underline{\mathbb{N}}\}$ ($a > 1$). Soit $m \in \underline{\mathbb{N}}$, et $n = \left[\frac{m-b}{a} \right]$. Alors :

$$\text{Card } P \cap \{0, \dots, m\} = m - (n+1) \text{ et } \frac{1}{m} \text{Card } P \cap \{0, \dots, m\} < 1 - \frac{1}{a},$$

donc $d^+P < 1$, ce qui n'est pas. La réciproque de cette propriété est fautive :

(e) Il existe un ensemble arithmétiquement dense de densité nulle.

Posons en effet

$$\underline{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{n^3, n^3 + 1, \dots, n^3 + n - 1\}.$$

L'ensemble \underline{A} contient des intervalles arbitrairement grands de nombres entiers consécutifs, et est par conséquent arithmétiquement dense. D'autre part, on a

$$\text{Card } \underline{A} \cap \{0, \dots, n^3 - 1\} = \frac{n(n-1)}{2}$$

et par conséquent

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \text{Card } \underline{A} \cap \{0, \dots, m\} = 0.$$

Remarquons enfin qu'il existe des parties de \mathbb{N} de densité positive < 1 qui ne sont pas arithmétiquement denses. Une telle partie est constituée par exemple par les entiers impairs.

Énonçons finalement le théorème suivant, dû à DAVENPORT, LEWIS et SCHINZEL ([2], corollaire au théorème 2) que nous utiliserons dans la deuxième partie.

THÉORÈME 1.9. - Soient $f \in \mathbb{Z}[X]$, et \underline{A} un ensemble arithmétiquement dense. Si, pour tout $n \in \underline{A}$, $f(n)$ est somme de deux carrés d'entiers, alors il existe $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $f = g_1^2 + g_2^2$.

2. - Sur des fractions rationnelles particulières [1].

Dans cette partie, nous étendons aux fractions rationnelles sur \mathbb{Q} certains des théorèmes énoncés pour des polynômes dans la première partie.

THÉORÈME 2.1. - Soient $f, g \in \mathbb{Q}(X)$ deux fractions rationnelles, et $\underline{A} \subset \mathbb{Z}$ un ensemble arithmétiquement dense. Si $f(\underline{A}) \subset g(\mathbb{Z})$, alors il existe $r \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $f = g \circ r$.

Démonstration. - Ce théorème est un corollaire immédiat du théorème 1.8. Posons en effet $f = a/b$, $g = a'/b'$, avec $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}[X]$. Par hypothèse, toute progression arithmétique contient un entier x tel que, pour un entier y au moins, on ait :

$$F(x, y) = a(x) b'(y) - a'(y) b(x) = 0.$$

Il existe donc, d'après le théorème 1.8., un polynôme $r \in \mathbb{Q}[X]$ tel que l'on ait identiquement

$$a(X) \cdot b'(r(X)) = a'(r(X)) \cdot b(X),$$

Q. E. D.

THÉORÈME 2.2. - Soient $f \in \mathbb{Q}(X)$, $p \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, et $\underline{A} \subset \underline{\mathbb{Z}}$ un ensemble arithmétiquement dense. Si $f(\underline{A}) \subset p(\underline{\mathbb{Q}})$, alors il existe $g \in \mathbb{Q}(X)$ telle que $f = p \circ g$.

Il suffit de poser $p(x) = x^k$ pour obtenir le corollaire suivant, généralisant le théorème 1.3.

COROLLAIRE 2.3. - Soient $f \in \mathbb{Q}(X)$, et $\underline{A} \subset \underline{\mathbb{Z}}$ un ensemble arithmétiquement dense. Si $f(x)$ est puissance k -ième d'un nombre rationnel pour tout $x \in \underline{A}$, alors il existe $g \in \mathbb{Q}(X)$ telle que $f = g^k$.

Pour établir le théorème 2.2, nous utiliserons le lemme suivant qui est, au moins en partie, classique (voir par exemple [6], section 8, n° 111).

LEMME 2.4. - Deux polynômes $a, b \in \mathbb{Z}[X]$ sont sans facteurs communs sauf peut-être une constante, si, et seulement si, il existe un entier N tel que

$$(a(x), b(x)) \mid N, \text{ pour tout } x \in \underline{\mathbb{Z}}.$$

On a alors :

$$(a(x), b(x)) = (a(y), b(y)) \text{ si } x \equiv y \pmod{N}.$$

Démonstration. - Il est clair que si a et b ont un facteur non constant en commun, un tel entier N ne peut exister.

Réciproquement, supposons a et b premiers entre eux. En tant qu'éléments de l'anneau euclidien $\mathbb{Q}[X]$, ils vérifient l'identité de Bézout :

$$au + bv = 1, \quad u, v \in \mathbb{Q}[X].$$

Si N est le p. p. c. m. des dénominateurs des coefficients de u et v , on a

$$a(x)(Nu(x)) + b(x)(Nv(x)) = N \text{ pour tout } x \in \underline{\mathbb{Z}}$$

donc $(a(x), b(x)) \mid N$, pour tout $x \in \underline{\mathbb{Z}}$.

Si maintenant $x \equiv y \pmod{N}$, il existe des entiers k et k' tels que

$$a(x) = a(y) + kN, \quad b(x) = b(y) + k'N,$$

et tout diviseur commun à $a(x)$ et $b(x)$, divisant N , est diviseur de $a(y)$ et $b(y)$, et réciproquement.

Q. E. D.

Exemples. - Soient $a(x) = x^2 + 1$, $b(x) = 2x + 1$, on a $(a(x), b(x)) \mid 5$ pour tout x , comme on le voit immédiatement.

Si $a(x) = x(x + 1)$, et $b(x) = (x - 1)(x - 2)$, on a

$$2 \mid (a(x), b(x)) \mid 6 \text{ pour tout } x.$$

Démonstration du théorème 2.2. - Posons $f = a/b$, avec $a, b \in \underline{\mathbb{Z}}[X]$, sans facteur commun, le coefficient directeur de b étant positif, et soit

$$p(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \dots + p_k \quad p_i \in \underline{\mathbb{Z}}.$$

Constatons d'abord que si, pour $n \in \underline{\mathbb{Z}}$, on a :

$$f(n) = p(y_n/z_n), \text{ avec } (y_n, z_n) = 1, \quad z_n > 0,$$

alors

$$(1) \quad b(n) = \varepsilon_n(a(n), b(n)) z_n^k, \text{ avec } \varepsilon_n = \pm 1.$$

En effet, on a :

$$a(n)/b(n) = p(y_n/z_n) = \frac{y_n^k + p_1 y_n^{k-1} z_n + \dots + p_k z_n^k}{z_n^k},$$

et cette dernière fraction ne peut être réduite car sinon un diviseur de z_n diviserait y_n . D'autre part, $a(n)/(a(n), b(n))$ et $b(n)/(a(n), b(n))$ sont premiers entre eux, d'où l'assertion.

Soit maintenant q ($0 \leq q \leq N-1$) fixé, où N est donné par le lemme 2.4, et définissons le polynôme \bar{b} par

$$\bar{b}(X) = b(q + XN)/d, \text{ avec } d = (a(q), b(q)).$$

On vérifie immédiatement que \bar{b} est à coefficients entiers puisque

$$(a(q), b(q)) = (a(q + nN), b(q + nN))$$

pour tout $n \in \underline{\mathbb{Z}}$ en vertu du lemme 2.4. D'après la propriété (b) des ensembles arithmétiquement denses, l'ensemble $\underline{B} = \{n : q + nN \in \underline{A}\}$ est arithmétiquement dense, et d'après la remarque précédente, on a :

$$\bar{b}(n) = \varepsilon_{q+nN} (z_{q+nN})^k \text{ pour } n \in \underline{B}.$$

Si l'on pose $b' = b^2$, $b'(n)$ est puissance $2k$ -ième d'un entier pour tout $n \in \underline{B}$. En appliquant le théorème 1.3, il en résulte l'existence d'un polynôme $u \in \underline{\mathbb{Z}}[X]$ tel que $b' = u^{2k}$. Comme on a également $b' = (-u)^{2k}$, on peut supposer positif le coefficient directeur de u , et il en découle que $\bar{b}(n) = u(n)^k$ pour tout entier n assez grand et donc pour tout $n \in \underline{\mathbb{Z}}$.

Posons maintenant $\underline{B}' = \{n \in \underline{B} : n \geq N_0\}$, où N_0 est assez grand pour que $u(n).n > 0$ si $n \geq N_0$. \underline{B}' est arithmétiquement dense d'après la propriété (c) des ensembles arithmétiquement denses. Comme précédemment, le polynôme

$$\bar{a}(X) = a(q + nX)/d$$

est à coefficients entiers. Je dis que, pour tout $n \in \underline{B}'$, il existe $m \in \underline{\mathbb{Z}}$ tel que l'on ait :

$$(2) \quad F(n, m) = \bar{a}(n) - (m^k + p_1 m^{k-1} u(n) + \dots + p_k u(n)^k) = 0 \quad .$$

En effet, il est clair que k divise le degré ℓ de \bar{b} . Par conséquent, si k est pair (et donc ℓ est pair), ou si k est impair et ℓ est pair, on a

$$\varepsilon_{q+nN} = +1 \quad \text{pour } n \in \underline{B}'$$

puisque z_{q+nN} et le coefficient directeur de b sont positifs. Il en découle que $u(n) = z_{q+nN}$ et que $m = y_{q+nN}$ satisfait (2). Si par contre k et ℓ sont impairs, on a

$$u(n) = z_{q+nN} \quad \text{si } n \geq N_0, \quad \text{et } u(n) = -z_{q+nN} \quad \text{si } n \leq N_0 \quad .$$

L'équation (2) est alors satisfaite par $m = y_{q+nN}$ dans le premier cas, et par $m = -y_{q+nN}$ dans le second. Les hypothèses du théorème 1.8 sont donc satisfaites par le polynôme F , et il existe donc un polynôme $v \in \mathbb{Q}[X]$ tel que l'on ait identiquement :

$$\bar{a}(X) = v(X)^k + p_1 v(X)^{k-1} u(X) + \dots + p_k u(X)^k \quad ,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\bar{a}(X)}{\bar{b}(X)} = p \left(\frac{v(X)}{u(X)} \right) \quad ,$$

et finalement

$$f = p \circ g \quad , \quad \text{avec } g(X) = \frac{v((X-q)/N)}{u((X-q)/N)} \quad .$$

Q. E. D.

Finalement, nous allons montrer que le théorème 1.9 admet lui aussi une généralisation aux fractions rationnelles. On a en effet le théorème suivant.

THÉORÈME 2.5. - Soient $f \in \mathbb{Q}(X)$, et $\underline{A} \subset \underline{\mathbb{Z}}$ un ensemble arithmétiquement dense. Si pour tout $x \in \underline{A}$, $f(x)$ est somme de deux carrés de nombres rationnels, alors il existe $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}(X)$ telles que

$$f = g_1^2 + g_2^2 \quad .$$

Démonstration. - Posons $f = a/b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}[X]$. D'après [8] (p. 352), $a(x)/b(x)$ est somme de deux carrés de nombres rationnels si, et seulement si, $a(x)b(x)$ est somme de deux carrés d'entiers. Ainsi pour tout $x \in \underline{A}$, $a(x)b(x)$ est somme de deux carrés d'entiers, et il existe donc, en vertu du théorème 1.9, deux polynômes $u, v \in \mathbb{Z}[X]$ tels que l'on ait identiquement

$$a(X)b(X) = u(X)^2 + v(X)^2 \quad .$$

Mais alors

$$f = a/b = (u/b)^2 + (v/b)^2 \quad . \quad \text{Q. E. D.}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERSTEL (J.). - Sur des fractions rationnelles particulières, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 304-306.
- [2] DAVENPORT (H.), LEWIS (D. J.) and SCHINZEL (A.). - Polynomials of certain special types, Acta Arithm., t. 9, 1964, p. 107-116.
- [3] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 4th edition. - Oxford, Clarendon Press, 1965.
- [4] LEVEQUE (W. J.). - Topics in number theory. Vol. 2, 2nd edition. - New York, Addison-Wesley publishing Company, 1961 (Addison-Wesley Mathematics Series).
- [5] OGDEN (H. S.). - Intercalation theorems for pushdown store and stack languages, Phil. D. Thesis, Stanford Univ., Stanford, 1968.
- [6] POLYA (G.) und SZEGO (G.). - Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2ter Band, 3te Auflage. - Berlin, J. Springer, 1964 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 20).
- [7] RAUZY (G.). - Ensembles arithmétiquement denses, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 37-38.
- [8] SIERPINSKI (W.). - Elementary theory of numbers. - Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1964 (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne, 42).

(Texte reçu le 20 avril 1970)

Jean BERSTEL
M. Ass. Fac. Sc. Paris
11 ter avenue de Taillebourg
75 - PARIS 11
