Discrete Mathematics 29 (1980) 235–244.

MOTS SANS CARRE ET MORPHISMES ITERES

Jean BERSTEL

Université Pierre et Marie Curie, Institut de programmation 4 place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

Received 23 March 1979

One proves that the nonrepetitive sequence given by Arson can be generated by a tag-system, but cannot be obtained by iteration of a morphism, even if the use of auxiliary symbols is allowed (D0L system).

On démontre que la suite sans carré d'Aršon peut être engendrée par un "tag-system", mais ne peut être obtenue par itération d'un morphisme, même si l'on permet l'utilisation de symboles auxiliaires (D0L-système).

1. Introduction

La construction de mots sans carré, c'est-à-dire de mots ne contenant pas deux facteurs consécutifs égaux, a fait l'objet de nombreux travaux depuis maintenant 70 ans. L'existence de mots arbitrairement longs sans carré est en effet surprenante, et constitue une propriété combinatoire remarquable des mots. De plus, ce problème intervient dans la preuve de l'existence de groupes infirmant la conjecture de Burnside (voir Adjan [1]).

La plupart des mots infinis sans carré explicitement construits (par exemple par Thue [13], Zech [15], Leech [8], Pleasants [11], Dejean [5]) s'obtiennent par itération d'un morphisme, c'est-à-dire comme limite de la suite $\alpha^n(x)$, $n \to \infty$ avec x une lettre de l'alphabet X et α un morphisme de X^* dans lui-même. Le mot infini de Morse–Hedlund [9] a été défini par ces auteurs d'une autre manière, mais récemment Istrail [7] a donné un morphisme pour construire ce mot également. D'autre part, il résulte d'une construction de Kakutani (cf. Gottschalk, Hedlund [6]) que l'ensemble des mots infinis sans carré a la puissance du continu, ce qui entraine bien sûr l'existence d'un mot sans carré ne pouvant être obtenu par itération d'un morphisme, mais l'on n'en connaissait jusqu'ici pas d'exemple.

Le but de cette note est de montrer que le mot infini d'Aršon [2] répond à cette question. Nous prouvons que ce mot, défini sur un alphabet à trois lettres X, ne peut être obtenu par itération d'un morphisme, même si l'on augmente l'alphabet et si l'on remplace la lettre initiale par un mot. En d'autres termes, le mot d'Aršon ne peut être produit par un D0L-système [12]. La preuve utilise le fait que, par contre, ce mot infini peut être engendré par un "tag-system" uniforme au sens de Cobham [4]—donc est susceptible d'une définition au moyen d'un procédé qui n'est que légèrement plus puissant que le morphisme itéré—et elle fait appel à un profond résultat de Cobham. On établit ainsi un certain critère de comparaison de mots infinis montrant qu'il existe des mots plus "compliqués" que d'autres.

2. Notations

Soit A un alphabet. On note A^* le monoide libre engendré par A, $|w|$ la langueur d'un mot $w \in A^*$, $|w|_x$ le nombre d'occurrences de la lettre x dans w, ε le mot vide de longueur 0, et $A^+ = A^* - \{\varepsilon\}$.

Un mot infini sur A est une application $\boldsymbol{x} : \mathbb{N} \to A$. On écrit

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{x}(1) \cdots \boldsymbol{x}(n) \cdots$$

ou

$$\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \cdots x_n \cdots$$

Le facteur gauche de longueur n de $\boldsymbol{x}$ est noté $\boldsymbol{x}^{[n]}$. Ainsi

$$\boldsymbol{x}^{[n]} = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$$

Soit $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ une suite de mots, et $\boldsymbol{x}$ un mot infini. On pose

$$\boldsymbol{x} = \lim w_n$$

lorsque pour tout entier K, il existe un N tel que

$$\boldsymbol{x}^{[K]} \text{est facteur gauche de } w_n \text{ pour tout } n \geqslant N. \tag{2.1}$$

Ceci est réalisé en particulier lorsque chaque mot w_n est facteur gauche propre de w_{n+1}, et notamment dans la situation suivante. Soit $\alpha : A^* \to A^*$ un morphisme, et supposons qu'il existe une lettre t de A telle que $\alpha(t) \in tA^+$, c'est-à-dire que $\alpha(t) = tb$ pour un mot non vide b. Posons $w_n = \alpha^n(t)$, $n \geqslant 0$. Alors

$$w_{n+1} = \alpha^n(\alpha(t)) = \alpha^n(tb) = w_n \alpha^n(b).$$

Si $\alpha(x) \neq \varepsilon$ pour $x \in A$, alors w_n est donc facteur gauche propre de w_{n+1} et on peut définir $\lim \alpha^n(t)$ comme l'unique mot infini $\boldsymbol{x}$ vérifiant la condition (2.1). C'est le mot infini obtenu par itération de α en t. On utilise la notation

$$\alpha^\omega(t) = \lim \alpha^n(t). \tag{2.2}$$

En étendant α manière évidente aux mots infinis, on constate sans peine que

$$\alpha(\alpha^\omega(t)) = \alpha^\omega(t).$$

Le but principal de cette note est de démontrer que le mot infini d'Aršon que nous allons décrire maintenant ne peut pas s'écrire sous la forme (2.2).

3. Le mot d'Aršon

Dans toute la suite, X est l'alphabet composé des trois lettres $0, 1, 2$. Aršon a défini en [2] un mot infini $\boldsymbol{a}$ dont il prouve qu'il est sans carré. Ce mot est obtenu comme suit. Soient

$$\pi : X \to X^3 \quad \text{et} \quad \iota : X \to X^3$$

les applications définies par

$$\begin{aligned} \pi(0) &= 012, & \iota(0) &= 210,\\ \pi(1) &= 120, & \iota(1) &= 021,\\ \pi(2) &= 201, & \iota(2) &= 102. \end{aligned}$$

On a donc

$$\pi(x) = (\iota(x))^{\sim}, \quad \pi(\sigma(x)) = \sigma(\pi(x)), \qquad x \in X$$

où $w^{\sim}$ est le mot miroir de w, et où $\sigma : X^* \to X^*$ est le morphisme défine par

$$\sigma(x) = x + 1 \pmod 3).$$

On étend π et ι à X^* par

$$\pi(\varepsilon) = \iota(\varepsilon) = \varepsilon,$$
$$\pi(xw) = \pi(x)\iota(w), \quad \iota(xw) = \iota(x)\pi(w), \qquad x \in X,\ w \in X^*.$$

Il en résulte notamment

$$\pi(ww') = \begin{cases} \pi(w)\pi(w') & \text{si } |w| \text{ est pair,}\\ \pi(w)\iota(w') & \text{si } |w| \text{ est impair,} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\iota(ww') = \begin{cases} \iota(w)\iota(w') & \text{si } |w| \text{ est pair,}\\ \iota(w)\pi(w') & \text{si } |w| \text{ est impair.} \end{cases} \tag{3.2}$$

En particulier, $\pi(w)$ est facteur gauche de $\pi(ww')$, donc la suite $\pi^n(0)$ $(n \geq 0)$ a une limite

$$\boldsymbol{a} = \lim \pi^n(0)$$

qui est par définition le *mot d'Aršon*. Les premières lettres de ce mot sont

$$\boldsymbol{a} = 012021201210201021201210120 \cdots.$$

Notons aussi que

$$\boldsymbol{a} = \pi(\boldsymbol{a}) = \pi(a_0)\iota(a_1)\pi(a_2)\iota(a_3) \cdots.$$

Aršon prouve dans l'article cité que $\boldsymbol{a}$ ne contient pas de carré, i.e. pas de facteur de la forme ww, $w \neq \varepsilon$. Cette preuve figure aussi dans [14]. Nous mentionnons pour usage ultérieur la formule

$$\pi^{n+1}(x) = \pi^n(x)\iota^n(\sigma(x))\pi^n(\sigma^2(x)) \quad n \geq 0,\ x \in X \tag{3.3}$$

Pour $n=0, 1$, cette formule est évidente. Si $n \geqslant 2$, alors par récurrence

$$\pi^{n+1}(x)=\pi(\pi^{n}(x))=\pi(\pi^{n-1}(x)\iota^{n-1}(\sigma x)\pi^{n-1}(\sigma^2 x))$$
$$=\pi^{n}(x)\iota^{n}(\sigma x)\pi^{n}(\sigma^2 x)$$

en vertu de (3.1) et (3.2) et du fait que $\pi^{n-1}(x)$, $\iota^{n-1}(x)$ sont de longueur impaire.

4. Un "tag-system" uniforme pour la suite d'Arson

Rappelons d'abord la définition d'un "tag-system", comme elle est donnée par Cobham [4]. Un *tag-system* $\mathcal{T}=\langle B, y, \theta, \alpha, A\rangle$ est composé de deux alphabets A, B, d'une lettre y dans B, et de deux morphismes

$$\theta : B^* \to B^*, \qquad \alpha : B^* \to A^*$$

vérifiant les conditions

$$\theta(y) \in yB^+; \qquad \theta(z) \neq \varepsilon \ (z \in B); \qquad \alpha(B)=A. \tag{4.1}$$

Le morphisme θ est *k-uniforme* si $|\theta(z)|=|\alpha(\theta(z))|=k$ pour toute lettre $z \in B$ et alors $\mathcal{T}$ lui-même est dit *uniforme de module k*. La *séquence interne* engendrée par $\mathcal{T}$ est

$$\text{intseq}(\mathcal{T})=\lim \theta^n(y)=\theta^\omega(y);$$

cette limite existe en vertu des deux premières des conditions (4.1). La *séquence* (*externe*) engendrée par $\mathcal{T}$ est

$$\text{seq}(\mathcal{T})=\alpha(\text{intseq}(\mathcal{T}))=\lim \alpha(\theta^n(y)).$$

Dans cette écriture, et de même pour la suite, un morphisme défini sur un monoide libre est prolongé aux mots infinis de manière évidente.

Soit maintenant $\bar{X}=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ disjoint de X, et posons $Y=X \cup \bar{X}$. On considère le "tag-system"

$$\mathcal{T}_a=\langle Y, 0, \theta, \alpha, X\rangle$$

uniforme de module 3 défini par

$$\begin{aligned}
&\theta(0)=0\bar{1}2, && \varepsilon(\bar{0})=\bar{2}1\bar{0},\\
&\theta(1)=1\bar{2}0, && \theta(\bar{1})=\bar{0}2\bar{1},\\
&\theta(2)=2\bar{0}1, && \theta(\bar{2})=\bar{1}0\bar{2},\\
&\alpha(x)=\alpha(\bar{x})=x, && x=0,1,2.
\end{aligned}$$

Les premiers termes de la séquence

$$\theta^\omega(0)=0\bar{1}2\bar{0}2\bar{1}2\bar{0}1\bar{2}1\bar{0}\cdots$$

suggèrent la

Proposition. *On a* $\boldsymbol{a} = \text{seq}\,(\mathcal{T}_a)$.

Preuve. Nous montrons que pour tout $x \in X$, on a

$$\alpha\theta^n(x) = \pi^n(x), \quad \alpha\theta^n(\bar{x}) = \iota^n(x), \qquad n \geq 0, \tag{4.2}$$

ce qui est vrai pour $n = 0, 1$, et s'établit par récurrence comme suit:

$$\begin{aligned}\alpha\theta^{n+1}(x) &= \alpha\theta^n(x\overline{\sigma(x)}\sigma^2(x)) = \alpha\theta^n(x)\alpha\theta^n(\overline{\sigma(x)})\alpha\theta^n(\sigma^2(x)) \\ &= \pi^n(x)\iota^n(\sigma(x))\pi^n(\sigma^2(x)) = \pi^{n+1}(x)\end{aligned}$$

en vertu de (3.3). L'autre cas se traite de la même manière. De (4.2), il résulte que

$$\text{seq}\,(\mathcal{T}_a) = \lim \alpha(\theta^n(0)) = \lim \pi^n(0) = \boldsymbol{a}. \quad \square$$

Notons

$$\boldsymbol{b} = \theta^\omega(0) = \text{intseq}\,(\mathcal{T}_a).$$

On a $\theta(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$, donc $\boldsymbol{a} = \beta(\boldsymbol{b})$, avec $\beta = \alpha \circ \theta : Y^* \to X^*$. Or, on vérifie sans peine que β est un morphisme injectif de Y^* dans X^* et aussi sur les mots infinis, c'est-à-dire que $\boldsymbol{b}$ est l'unique mot infini vérifiant $\theta(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$.

Nous utiliserons dans le paragraphe suivant le théorème profond suivant:

Théorème (Cobham [4, 3]). *Si $\boldsymbol{x}$ est la séquence interne ou externe engendrée par deux "tag-systems" uniformes: $\mathcal{T}$ de module l et $\mathcal{T}'$ de module k, et si $\boldsymbol{x}$ n'est pas ultimement périodique, alors il existe deux entiers $n, m > 0$ tels que $l^n = k^m$.*

5.

Théorème 1. *Il n'existe pas de morphisme $\chi : X^* \to X^*$ tel que $\chi^\omega(0) = \boldsymbol{a}$.*

Le théorème découle immédiatement de la proposition légèrement plus générale que voici:

Proposition. *Il n'existe pas de couple (χ, w), où $\chi : X^* \to X^*$ est un morphisme et w est un mot tel que $\boldsymbol{a} = \chi^\omega(w)$.*

Ce dernier résultat est lié à ce que l'on appelle le "problème de synthèse" de D0L-systèmes: Rappelons que si $\psi : A^* \to A^*$ est un morphisme et $w \in A^+$, alors $S = \langle A, \psi, w \rangle$ est un D0L-système et $L(S) = \{\psi^n(w) \mid n \geq 0\}$ est le langage engendré par S (pour les systèmes de Lindenmayer, voir [12]). Le problème de synthèse est de savoir si réciproquement, un langage L donné peut être engendré par un D0L-système.

Appelons avec Nivat [10] *adhérence* de $L(S)$ les mots infinis qui sont limite de suites de mots de $L(S)$. On peut étendre le problème de synthèse et se demander si, pour un mot infini $\boldsymbol{x}$ donné, il existe un D0L-système S tel que $\boldsymbol{x}$ appartienne à l'adhérence de S. La proposition ci-dessus dit que pour le mot d'Aršon $\boldsymbol{a}$, un tel système de la forme $S=\langle X, \psi, w\rangle$ n'existe pas. Dans la section suivante, nous prouverons que la même conclusion reste vraie si l'on remplace X par un alphabet quelconque Z contenant X.

Pour établir la proposition, nous raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'un morphisme $\chi: X^* \to X^*$, et d'un mot $w \in X^+$ tels que $a=\chi^{\omega}(w)$. Le lemme suivant réunit quelques conséquences de cette supposition.

Lemme. (i) *Si u est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$, alors $\chi(u)$ est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$;*

(ii) *$\chi(x)\neq \varepsilon$ pour $x=0,1,2$;*

(iii) *$\boldsymbol{a}=\chi^{\omega}(u)$ pour tout facteur gauche u de $\boldsymbol{a}$ de longueur $|u|\geqslant 3$;*

(iv) *$|\chi(012|=3k$, où k est un entier pair.*

Preuve. (i) Soit u un facteur gauche de $\boldsymbol{a}$, et soit $p=\max\{|u|, |\chi(u)|\}$. Comme $\boldsymbol{a}=\lim \chi^n(w)$, il existe un entier N tel que $\boldsymbol{a}^{[p]}$ soit facteur gauche de $\chi^n(w)$ pour tout $n\geqslant N$. Comme $|u|\leqslant p$, u est donc facteur gauche de $\chi^N(w)$, et par conséquent $\chi(u)$ est facteur gauche de $\chi^{N+1}(w)$. Or $|\chi(u)|\leqslant p$, et comme $\boldsymbol{a}^{[p]}$ est facteur gauche de $\chi^{N+1}(w)$, le mot $\chi(u)$ est facteur gauche de $\boldsymbol{a}^{[p]}$, donc de $\boldsymbol{a}$.

(ii) Considérons le facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ de longueur 6:

$$u=012021=\boldsymbol{a}^{[6]}.$$

Alors $\chi(u)$ est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ par (i), donc $\chi(u)$ ne contient pas de carré. Or, si $\chi(0)=\varepsilon$, alors $\chi(u)=\chi(1)\chi(2)\chi(2)\chi(1)$ contient un carré; de même, si $\chi(1)=\varepsilon$, alors $\chi(u)=\chi(02)\chi(02)$ est un carré; enfin, si $\chi(2)=\varepsilon$, on a $\chi(u)=\chi(01)\chi(01)$. Ceci montre l'assertion.

(iii) Nous prouvons d'abord que $\boldsymbol{a}=\lim \chi^n(012)$. Le mot 012 est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$, donc $\chi(012)$ est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ par (i), et $|\chi(012)|\geqslant 3$ par (ii). On a donc $\chi(012)=012u'$ pour un mot u'. Le mot u' n'est pas vide, car sinon le morphisme χ serait l'identité, et $\boldsymbol{a}$ ne pourrait être la limite des $\chi^n(w)$. Il en résulte par (ii) que $\chi^n(u')\neq\varepsilon$ pour $n\geqslant 0$, et comme $\chi^{n+1}(012)=\chi^n(012)\chi^n(u')$, la longueur des mots $\chi^n(012)$ croit strictement. De plus, l'application répétée de (i) montre que $\chi^n(012)$ est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ pour tout $n\geqslant 0$. Ceci implique que $\boldsymbol{a}=\lim \chi^n(012)$.

Soit maintenant $u=012v$ un facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ de longueur $\geqslant 3$. Alors

$$\lim \chi^n(u)=\lim(\chi^n(012)\chi^n(v))=\lim \chi^n(012)=\boldsymbol{a}$$

ce qui prouve (iii).

(iv) Soit $m=|\chi(012)|$. Nous utilisons la formule

$$|\chi(u)|_x=\sum_{y\in X}|\chi(y)|_x\,|u|_y \qquad x\in X$$

appliquée au facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ de longueur 9:

$$u = \boldsymbol{a}^{[9]} = 012021201.$$

Puisque $|u|_y = 3$ pour $y = 0, 1, 2$, on a donc

$$|\chi(u)|_x = 3(|\chi(0)|_x + |\chi(1)|_x + |\chi(2)|_x) = 3\,|\chi(012)|_x \tag{5.1}$$

et en sommant sur $x \in X$:

$$|\chi(u)| = 3\,|\chi(012)| = 3m.$$

D'autre part, $\chi(u)$ est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ par (i); comme sa longueur est un multiple de 3, il s'écrit donc

$$\chi(u) = \pi(a_0)\iota(a_1)\cdots\pi(a_m) \quad \text{ou} \quad \chi(u) = \pi(a_0)\iota(a_1)\cdots\iota(a_m)$$

selon que m est impair ou pair. Comme chaque $\pi(a_i)$ et $\iota(a_j)$ contient exactement une occurrence de chacune des lettres de X, il y a dans $\chi(u)$ exactement m occurrences de chacune des lettres de X:

$$|\chi(u)|_0 = |\chi(u)|_1 = |\chi(u)|_2 = m.$$

En rapprochant cette équation de (5.1), on obtient

$$m = |\chi(u)|_x = 3\,|\chi(012)|_x \qquad x \in X,$$

montrant que m est un multiple de 3, soit $m = 3k$ avec $k = |\chi(012)|_0$. Il reste à prouver que k est pair. Nous avons déjà vu que $k > 1$. Supposons k impair. Alors

$$\begin{aligned} \chi(012) &= \pi(a_0)\iota(a_1)\cdots\iota(a_{k-2})\pi(a_{k-1}), \\ \chi(021) &= \chi(a_3a_4a_5) = \iota(a_k)\pi(a_{k+1})\cdots\pi(a_{2k-2})\iota(a_{2k-1}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Comme $\chi(0) \neq \varepsilon$, $\chi(0)$ commence par la lettre 0, donc $\iota(a_k)$ également. Or, ceci implique que $a_k = 1$ et $\chi(0) = 0$. Il en résulte que $k \geq 5$, puisque $a_3 = 0$. De (5.2) et de ce qui précède, on déduit donc que le mot v_1 défini par

$$v_1 = 21\pi(a_{k+1})\iota(a_{k+2})\pi(a_{k+3})\iota(a_{k+4})$$

est facteur gauche de $\chi(21)$. Par ailleurs, on a

$$\chi(a_9a_{10}a_{11}) = \chi(210) = \iota(a_{3k})\pi(a_{3k+1})\cdots\iota(a_{4k-1})$$

donc le mot

$$v_2 = \iota(a_{3k})\pi(a_{3k+1})\iota(a_{3k+2})\pi(a_{3k+3})$$

est lui aussi facteur gauche de $\chi(21)$. La situation est représentée dans la figure suivante:

v_4	21	$\pi(a_{k+1})$	$\iota(a_{k+2})$	$\pi(a_{k+3})$	$\iota(a_{k+4})$
v_2	$\iota(a_{3k})$	$\pi(a_{3k+1})$	$\iota(a_{3k+2})$	$\pi(a_{3k+3})$	

Nous allons voir que les mots v_1 et v_2 sont entièrement déterminés par la condition d'être l'un facteur gauche de l'autre, et que v_1 contient un carré. Posons

$$v_1 = y_1 y_2 \cdots y_{14}, \qquad v_2 = y_1 y_2 \cdots y_{12}, \qquad y_i \in X$$

On a $21 y_3 = \iota(a_{3k})$, donc $y_3 = 0$; ceci implique que $\pi(a_{k+1}) = 0 y_4 y_5$, d'où $a_{k+1} = 0$ et $y_4 y_5 = 12$; comme $\pi(a_{3k+1}) = 12 y_6$, on a donc $y_6 = 0$. Puisque $\iota(a_{k+2}) 0 y_7 y_8$, on doit avoir $y_7 y_8 = 21$, ce qui, à son tour, montre que, en vue de $\iota(a_{3k+2}) = 21 y_9$, on a $y_9 = 0$. Or $\pi(a_{k+3}) = 0 y_{10} y_{11}$, d'où l'on tire que $y_{10} y_{11} = 12$, et comme $\pi(a_{3k+3}) = 12 y_{12}$, ceci donne $y_{12} = 0$. Finalement, $\iota(a_{k+4}) = 0 y_{13} y_{14}$, ce qui montre que $y_{13} y_{14} = 21$. En conclusion, le mot v_1 s'écrit

$$v_1 = 21(012021)(012021),$$

donc v_1 et par conséquent également $\boldsymbol{a}$ contient un carré, ce qui n'est pas. Ceci prouve que k est pair et achève la preuve du lemme. □

Preuve de la proposition. Nous allons déduire de l'existence de χ l'existence d'un deuxième "tag-system" non pas pour le mot $\boldsymbol{a}$, mais pour le mot $\boldsymbol{b}$ défini dans la section précédente. Nous concluerons en appliquant le théorème de Cobham.

Considérons l'alphabet $Y = X \cup \bar{X}$ et le morphisme injectif $\beta = \alpha \circ \theta : Y^* \to X^*$ définis dans la section précédente. On a $\beta(Y) \subset X^3$, et en vertu de l'assertion (iv) du lemme, on a $\chi(\beta(w)) \in (X^3)^*$ pour tout mot $w \in Y^*$. On a même $\chi(\beta(w)) \in (\beta(Y))^*$. En effet, chaque mot $\beta(y)$ $(y \in Y)$ appartient à $\beta(Y) = \pi(X) \cup \iota(X)$, donc est facteur de $\boldsymbol{a}$; donc chaque $\chi(\beta(y))$ est un facteur de $\boldsymbol{a}$ d'une longueur multiple de 3, et il existe une occurrence de ce mot comme facteur de $\boldsymbol{a}$ qui commence à une lettre de $\boldsymbol{a}$ d'indice multiple de 3. Il en résulte que le morphisme

$$\psi = \beta^{-1} \circ \chi \circ \beta : Y^* \to Y^* \tag{5.3}$$

est univoque et partout défini. De plus, l'assertion (iv) du lemme nous assure que pour toute lettre $y \in Y$, on a $|\chi(\beta(y))| = 3k$, ce qui entraine que $|\psi(y)| = k$ pour toute lettre $y \in Y$, autrement dit: le morphisme ψ est k-uniforme. Enfin, on a par (5.3)

$$\beta \circ \psi^n = \chi^n \circ \beta, \qquad n \geq 0$$

soit

$$\beta(\psi^n(0)) = \chi^n(012), \qquad n \geq 0$$

ce qui, en vertu de l'assertion (iii) du lemme, montre que

$$\lim \beta(\psi^n(0)) = \beta(\lim \psi^n(0)) = \boldsymbol{a}.$$

L'injectivité de β implique que

$$\psi^\omega(0) = \lim \psi^n(0) = \boldsymbol{b}.$$

Ainsi, $\boldsymbol{b}$ est la séquence interne d'un "tag-system" uniforme de module k, et est aussi la séquence interne d'un "tag-system" uniforme de module 3. De plus, $\boldsymbol{b}$ n'est pas ultimement périodique, car sinon $\boldsymbol{a}$ le serait, et $\boldsymbol{a}$ contiendrait des carrés. On peut donc appliquer le théorème cité de Cobham, et il existe donc des entiers

$n, m > 0$ tels que $k^n = 3^m$, ce qui entraine en particulier que k est impair. Or, d'après l'assertion (iv) du lemme, k est pair. D'où la contradiction qui achève la preuve de la proposition et du Théorème 1. $\square$

6.

Nous utilisons les résultats du paragraphe précédent pour prouver la propriété plus générale que voici:

Théorème 2. *Il n'existe pas de* D0L-*système* $\langle Z, \chi, w\rangle$ *avec* $X \subset Z$, *tel que* $\boldsymbol{a} = \lim \chi^n(w)$.

Ainsi, même l'introduction de lettres auxiliaires ne permet pas d'obtenir $\boldsymbol{a}$ par itération d'un morphisme. On peut en effet concevoir une construction où les lettres supplémentaires dont on dispose sont utilisées pour "stocker" une information qui sera utilisée lors du calcul de l'itération suivante du morphisme. La définition de la limite permet à cette partie du mot consacrée à la "mémorisation" de l'infomation de croître à chaque itération. Nous prouvons donc que même un tel dispositif ne peut pas engendrer le mot d'Aršon $\boldsymbol{a}$.

Preuve. On raisonne par l'absurde, et on suppose que $\boldsymbol{a} = \chi^{\omega}(w)$, où $\chi : Z^* \rightarrow Z^*$ est un morphisme et $w \in Z^+$. Comme dans la preuve du lemme, on vérifie que $\chi(x) \neq \varepsilon$ pour $x = 0, 1, 2$. Par ailleurs, on a $\chi(012) \in 012Z^*$ car 012 est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$, et même $\chi(012) \in 012X^*$, car $\chi(012)$ est facteur gauche de tout mot $\chi^n(w)$ pour n assez grand. La proposition du paragraphe précédent montre donc que $\chi(012) = 012$, autrement dit que χ est l'identité sur X.

Le mot w contient au moins une lettre t telle que le langage $\{\chi^n(t) \colon n \geqslant 0\}$ est infini, car sinon le langage $\{\chi^n(w) \colon n \geqslant 0\}$ serait fini. Soit alors $T \subset Z$ l'ensemble des lettres t telles que $\{\chi^n(t) \colon n \geqslant 0\}$ est infini. D'après ce qui précède, on a $T \cap X = \emptyset$. Soit $w_0 t_0$ le plus court facteur gauche de w contenant une lettre de T. Alors $t_0 \in T$, $w_0 \in (Z-T)^*$. Pour chaque $t \in T$, le mot $\chi(t)$ contient au moins une lettre $t' \in T$. Notons $\lambda(t)$ la première occurrence dans $\chi(t)$ d'une lettre dans T. Comme T est fini, il existe deux indices i et $j = i + p$ $(p > 0)$ tels que $\lambda^i(t_0) = \lambda^j(t_0) = \bar{t}$. Alors

$$\chi^i(t_0) = c\bar{t}c', \qquad \chi^p(\bar{t}) = u\bar{t}u'$$

pour certains mots $c, u \in (Z-T)^*$ et $c', u' \in Z^*$. Donc

$$\chi^{j+p}(t_0) = \chi^{2p}(c)\chi^p(u)u\bar{t}u'\chi^p(u')\chi^{2p}(c'),$$

et par conséquent le mot

$$h_n = \chi^n(\chi^{j+p}(w_0)\chi^{2p}(c)\chi^p(u)u)$$

est facteur gauche du mot $\chi^{n+j+p}(w)$ pour tout $n \geqslant 0$. Comme $w_0, c, u \in (Z-T)^*$, la longueur des mots h_n est bornée, donc h_n est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ pour tout n assez grand, ce qui implique que la suite des h_n devient stationnaire. Il en résulte en particulier que $\chi^{n+1}(u)=\chi^n(u)$ pour n assez grand, et donc que le facteur droit $\chi^{n+p}(u)\chi^n(u)$ de h_n est un carré. Comme h_n est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ ceci implique donc que $\boldsymbol{a}$ contient un carré sauf si $\chi^n(u)=\varepsilon$.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que $\chi^n(u)\neq\varepsilon$ pour tout n. Supposons le contraire, donc qu'il existe un entier m tel que $\chi^m(u)=\varepsilon$. Comme

$$u_0=\chi^i(w_0)\chi^p(c)u\bar{l}$$

est facteur gauche de $\chi^i(w)$, le mot

$$u_n=\chi^{np}(u_0)=\chi^{np+i}(w_0)\chi^{(n+1)p}(c)\chi^{np}(u)\cdots\chi^p(u)u\bar{l}$$

est facteur gauche du mot $\chi^{np+i}(w)$ pour tout n. Comme $\chi^m(u)=\varepsilon$, et $w_0, c\in(Z-T)^*$, la longueur des mots u_n $(n\geqslant 0)$ est bornée. Il en résulte, puisque $\boldsymbol{a}=\lim\chi^r(w)$, que u_n est facteur gauche de $\boldsymbol{a}$ pour n assez grand, ce qui est impossible car $\bar{l}\notin X$. Ceci achève la preuve. $\square$

Remerciement. Je remercie J.F. Perrot pour ses judicieuses remarques qui ont permis d'améliorer considérablement la rédaction de cet article.

Références

[1] S.I. Adjan, Burnside groups of odd exponents and irreducible systems of group identities, in: Boone, Cannonito Lyndon, eds., Word Problems (North-Holland, Amsterdam, 1973) 19–38.
[2] S. Aršon, Démonstration de l'existence de suites asymétriques infinies, Mat. Sb. 44 (1937) 769–777.
[3] A. Cobham, On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata, Math. Systems Theory 3 (1969) 186–192
[4] A. Cobham, Uniform tag sequences, Math. Systems Theory 6 (1972) 164–192.
[5] F. Dejean, Sur un théorème de Thue, J. Combinatorial Theory, Series A, 13 (1972) 90–99.
[6] W. Gottschalk and G. Hedlund, Topological Dynamics, American Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 36, 1955.
[7] S. Istail, On irreductible languages and nonrational numbers, Bull. Soc. Math. Roumanie 21 (1977) 301–308.
[8] J. Leech, Note 2726: A problem on strings of beads, Math. Gazette 41 (1957) 277–278.
[9] M. Morse and G. Hedlund, Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semigroups, Duke Math. J. 11 (1944) 1–7.
[10] M. Nivat, Sur les ensembles de mots infinis engendrés par une grammaire algébrique, RAIRO Informatique théorique 12 (1978) 259–278.
[11] P.A. Pleasants, Non-repetitive sequences, Proc. Cambridge Phil. Soc. 68 (1970) 267–274.
[12] G. Rozenberg and A. Salomaa, L Systems, Lecture Notes in Computer Science 15 (Springer Verlag, Berlin, 1974).
[13] A. Thue, Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen, Vidensk. Skr. I. Mat.-Naturv. Kl. 1 (1912) 1–67.
[14] A. Yaglom and I. Yaglom, Challenging Mathematical Problems, Vol. II (Holden-Day, New York, 1967) pp. 12, 94–97, 203–204.
[15] T. Zech, Wiederholungsfreie Folgen, Z. Angew. Math. Mech. 38 (1958) 206–209.