MORPHISMES DE STURM *

Jean Berstel Patrice Séébold

Résumé

Un morphisme *sturmien* est un morphisme qui préserve les mots infinis sturmiens. Un morphisme est faiblement sturmien s'il préserve au moins un mot sturmien. Nous prouvons qu'un morphisme est sturmien si et seulement si l'image du mot $ba^2ba^2baba^2bab$ est un mot équilibré. Comme corollaire, nous obtenons qu'un morphisme faiblement sturmien est sturmien. Nous redémontrons aussi la description des nombres irrationnels dont la séquence caractéristique est point fixe d'un morphisme qui est sturmien.

Abstract

A morphism is called *Sturmian* if it preserves all Sturmian (infinite) words. It is *weakly Sturmian* if it preserves at least one Sturmian word. We prove that a morphism is Sturmian if and only if it keeps the word $ba^2ba^2baba^2bab$ balanced. As a consequence, weakly Sturmian morphisms are Sturmian. An application to infinite words associated to irrational numbers is given.

1 Introduction

Un mot infini (à droite) est *équilibré* si la différence entre le nombre d'occurrences d'une lettre dans deux de ses facteurs de même longueur est bornée par 1 en valeur absolue. Un mot est *sturmien* s'il est équilibré et non ultimement périodique.

Dans cette appellation ou sous d'autres dénominations, les mots de Sturm ont une longue histoire. Les premiers travaux remontent à J. Bernoulli et E. B. Christoffel. Ils sont mentionnés, avec ceux de A. A. Markov, dans le livre de Venkov [24]. D'autres exposés contenant une synthèse de travaux antérieurs sont ceux de Stolarsky [23] et tout récemment de T. C. Brown [4]. Le terme "sturmien" a été utilisé par Hedlund et Morse dans leurs développements de la dynamique symbolique [9, 10, 11]. D'autres appellations pour ces mots ou pour une sous-classe d'entre eux dont on parlera plus en détail sont : séquences de Beatty, "cutting sequences", séquences caractéristiques, spectre (homogène ou non), "two-distance sequences". Ces mots ont de nombreuses applications, par exemple en théorie ergodique [17], en infographie [2], en cristallographie [1] ou en reconnaissance des formes.

*Une version préliminaire de ce travail a été présentée à MFCS'93. Travail soutenu par le PRC "Mathématiques et Informatique" et par le projet ESPRIT BRA 6317 - ASMICS 2.

Received by the editors June 1993, revised January 1994.
Communicated by M. Boffa.
AMS Mathematics Subject Classification : 68R15, 20M05, 68Q45.
Keywords : infinite words, iterated morphisms, sturmian words, dynamical systems, continued fractions.

Il y a une large littérature sur ces suites. Elles peuvent être définies de manière arithmétique (comme on le verra plus bas, associées à un nombre irrationnel [la *pente*] et un autre réel [l'*intercept*]), combinatoire (comme mots équilibré) ou extrémale (comme mots ayant un nombre minimal de facteurs). L'équivalence entre ces définitions et les variations de formulation ou de démonstrations occupent une large part de la littérature sur ce thème (voir la description de [4]). Plus récemment, l'intérêt s'est porté sur la nature et le nombre des facteurs (voir S. Dulucq et D. Gouyou-Beauchamps [7], Rauzy [18, 19, 20], Mignosi [15]), et sur les étroites relations entre le développement en fraction continue de la pente et des morphismes sturmiens. Au moins six articles mentionnent (dit Brown [4]) le fait que si la pente a une fraction continue purement périodique, le mot associé est point fixe d'un morphisme. La caractérisation des pentes des mots qui sont points fixes a été donnée par Crisp *et al.* [5], et nous la retrouverons comme cas particulier.

Nous nous intéressons ici aux *morphismes sturmiens*, c'est-à-dire tels que l'image de tout mot sturmien est sturmien. Ces morphismes (ou "substitutions" en arithmétique) ont un lien explicite avec le développement en fraction continue, décrit de façon détaillée par Rauzy [19] et par d'autres (voir à nouveau Brown [4]). Les morphismes sturmien ont été complètement décrits par Séébold et Mignosi [16] : ils ont prouvé que tout morphisme sturmien est produit de morphismes pris dans un ensemble de trois morphismes particuliers.

Dans cet article, nous prouvons que, pour tester si un morphisme f est sturmien, il suffit de vérifier que le seul mot $f(ba^2ba^2baba^2bab)$ est équilibré et primitif. Il en résulté évidemment qu'il est décidable si un morphisme est sturmien. Nous prouvons en fait un résultat plus fort, à savoir qu'un morphisme acyclique est sturmien dès que l'un des mots $f(w)$, pour $w \in \Omega$ est équilibré, où Ω est un ensemble de mots donné explicitement. Comme conséquence, nous obtenons qu'un morphisme est sturmien dès que l'image d'*un* mot infini sturmien est sturmien.

Ces résultats s'appliquent dans le cas des mots caractéristiques des nombres irrationnels. Si une substitution transforme un mot caractéristique en un mot caractéristique, c'est un morphisme sturmien, donc produit de morphismes particuliers. Nous prouvons que, vu la forme spéciale des mots, seuls deux des trois morphismes interviennent, et nous obtenons une preuve plus simple du théorème de Crisp *et al.* [5] qui caractérise les nombres irrationnels dont la suite caractéristique est point fixe d'un morphisme. L'extension de ce résultat au cas non homogène (c'est-à-dire au cas ou l'intercept n'est pas nul) reste un problème ouvert.

2 Définitions et notations

Nous utilisons les notations du livre de Lothaire [13]. Soit $A = \{a, b\}$ un *alphabet* fixé. On note A^* le monoïde des mots (finis) sur A et ε le *mot vide*. On note $A^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des mots infinis sur A et $A^\infty = A^* \cup A^{\mathbf{N}}$.

Pour tout mot $u \in A^*$, on note par $|u|$ la longueur de u et par $|u|_x$ le nombre d'occurrence de la lettre x dans le mot u. Un *morphisme* h est une application de A^* dans lui-même telle que $h(uv) = h(u)h(v)$ pour tous $u, v \in A^*$. Le morphisme h est *non effaçant* si ni $h(a)$ ni $h(b)$ n'est le mot vide La *longueur* d'un morphisme f est l'entier $\|f\| = |f(a)| + |f(b)|$. Tout morphisme s'étend de manière naturelle à A^∞.

Considérons

$$\phi : \begin{array}{l} a \to ab \\ b \to a \end{array} \qquad \tilde{\phi} : \begin{array}{l} a \to ba \\ b \to a \end{array}$$

Le premier est le *morphisme de Fibonacci*, et le deuxième est son image miroir. Un troisième morphisme va nous être utile. C'est le morphisme E qui échange a et b. Par composition, on obtient d'autres morphismes. Nous en distinguons deux en particulier, à savoir :

$$G = \phi \circ E : \begin{array}{l} a \to a \\ b \to ab \end{array} \qquad D = \tilde{\phi} \circ E : \begin{array}{l} a \to a \\ b \to ba \end{array}$$

Posons $u_n = \phi^n(a)$ et $v_n = \phi^n(b)$ pour $n \geq 0$. Alors on a $u_{n+1} = u_n u_{n-1},\ v_{n+1} = u_n$. Le morphisme ϕ, étendu aux mots infinis, a un seul point fixe

$$\mathbf{F} \ = abaababaabaababaababa\ldots = \phi(\mathbf{F})$$

qui est le mot infini de Fibonacci.

Pour tout $w \in A^\infty$, on note $Fact(w)$ l'ensemble des *facteurs* finis de w. Posons, pour deux mots u et v de même longueur, $\delta(u,v) = |\,|u|_a - |v|_a\,|$. Un mot $w \in A^\infty$ est *équilibré* si $\delta(u,v) \leq 1$ pour tout $u, v \in Fact(w)$ tels que $|u| = |v|$. Un mot infini $\mathbf{x} \in A^{\mathbf{N}}$ est *sturmien* s'il est équilibré et non ultimement périodique. La propriété suivante est bien connue :

Propriété 2.1 *Le mot* $\mathbf{F}$ *est sturmien.*

Les mots de Sturm sont intimement reliés à la fois aux “suites caractéristiques” de nombres irrationnels, et entièrement décrits par leur “complexité”. Soient α et ρ deux nombres réels, avec $0 \leq \alpha < 1$ irrationnel, et posons, pour $n \geq 0$,

$$a_n = \begin{cases} a & \text{si } \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a'_n = \begin{cases} a & \text{si } \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil = \lceil \alpha n + \rho \rceil \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors les deux mots infinis

$$\mathbf{s}_{\alpha,\rho} = a_0 a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \quad \text{et} \quad \mathbf{s}'_{\alpha,\rho} = a'_0 a'_1 a'_2 \cdots a'_n \cdots$$

sont sturmiens, et réciproquement, tout mot sturmien est de la forme $\mathbf{s}_{\alpha,\rho}$ ou $\mathbf{s}'_{\alpha,\rho}$ pour un nombre irrationnel α et un réel ρ [11]. Le nombre α est la *pente* et ρ est l'*intercept*. La *suite caractéristique* du nombre irrationnel α est le mot infini $\mathbf{c}_\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ obtenu en prenant $\rho = 0$ et en convenant de numéroter à partir de 1. Par exemple, le mot de Fibonacci $\mathbf{F}$ est le mot $\mathbf{c}_{1/\tau}$, où $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or. Toute suite caractéristique est un mot sturmien, et la réciproque est fausse. Les nombres irrationnels α tels que $\mathbf{c}_\alpha$ est point fixe d'un morphisme ont été caractérisés par Crisp *et al.* [5]. Nous obtiendrons leur résultat comme conséquence de notre description des morphismes sturmiens. Par ailleurs, la *complexité* $P_{\mathbf{x}}$ d'un mot infini est la fonction telle que $P_{\mathbf{x}}(n)$ est le nombre de facteurs de longueur

n de $\mathbf{x}$, pour tout $n \geq 0$. On sait que si $\mathbf{x}$ n'est pas ultimement périodique, alors $P_{\mathbf{x}}(n) \geq n+1$ pour tout n. Les mots de Sturm sont le mots de complexité minimale : un mot $\mathbf{x}$ est sturmien si et seulement si $P_{\mathbf{x}}(n) = n+1$ pour tout $n \geq 0$ [6].

Un morphisme h est *sturmien* si $h(\mathbf{x})$ est sturmien pour tout mot sturmien $\mathbf{x}$. Le morphisme identité sur A et le morphisme E qui échange les lettres a et b sont évidemment sturmiens. Par ailleurs, on a (voir par exemple Séébold [21]) :

Propriété 2.2 *Les morphismes ϕ et $\tilde{\phi}$ sont sturmiens.*

Les morphismes sturmiens sont stables par composition. Appelons *monoïde de Sturm* et notons

$$\mathrm{St} = \{E, \phi, \tilde{\phi}\}^*$$

le sous-monoïde des endomorphismes de A^* engendré par E, ϕ et $\tilde{\phi}$. Tout élément de St est sturmien. On a réciproquement (Séébold et Mignosi [16] :) :

Propriété 2.3 *Tout morphisme sturmien appartient* à St.

Le monoïde de Sturm a de nombreuses propriétés, dont certaines ont été conjecturées par Kòsa [14] et prouvées par Séébold [21]. Nous en donnons une autre, à savoir l'unitarité, plus loin.

Un morphisme f est *acyclique* si $f(ab) \neq f(ba)$, donc si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas puissances d'un même mot. Un morphisme qui n'est pas acyclique (donc qui est cyclique) est essentiellement un morphisme dans un alphabet à une seule lettre. Aussi, l'image d'un mot infini par un morphisme cyclique est périodique. On a

Propriété 2.4 *Tout morphisme sturmien est acyclique.*

3 Résultats

Notre objectif est de donner des critères pour déterminer si un morphisme est sturmien. Notre premier résultat dans cette direction est le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Un morphisme f est sturmien si et seulement s'il est acyclique et si le mot $f(ba^2ba^2baba^2bab)$ est équilibré.*

Il en résulte un procédé simple pour tester si un morphisme est sturmien. Ce résultat est toutefois insuffisant pour prouver que si un mot caractéristique $\mathbf{c}_\alpha$ est l'image par un morphisme h d'un autre mot caractéristique $\mathbf{c}_\beta$, alors h est sturmien. Appelons un morphisme h *faiblement sturmien* s'il existe au moins un mot sturmien $\mathbf{x}$ tel que $h(\mathbf{x})$ est sturmien. Nous allons prouver qu'alors $h(\mathbf{x})$ est sturmien pour tout mot sturmien $\mathbf{x}$. En d'autres termes, on a :

Théorème 3.2 *Un morphisme f est sturmien si et seulement s'il est faiblement sturmien.*

Ce résultat possède une variante "finitiste". On n'a pas besoin de connaître un mot infini sturmien tout entier pour conclure. Pour être plus précis, introduisons une notation : Soient $m \geq 1$ et $r \geq 1$ deux entiers, et posons

$$\begin{aligned} w_{m,r} &= a^{m-1}b(a^{m+1}b)^{r+1}a^m b(a^{m+1}b)^r a^m b \\ w'_{m,r} &= a^m b(a^m b)^{r+1}a^{m+1}b(a^m b)^r a^{m+1}b \end{aligned}$$

En particulier, $w_{1,1} = ba^2ba^2baba^2bab$ et $w'_{1,1} = abababa^2baba^2b$. Posons

$$\Omega = \bigcup_{m,r \geq 1} \{w_{m,r}, w'_{m,r}, E(w_{m,r}), E(w'_{m,r})\}$$

Les mots de Ω sont équilibrés. Evidemment, ces mots sont liés entre eux : ainsi, on a

$$w_{m+1,r} = G(w_{m,r}), \quad w'_{m+1,r} = G(w'_{m,r})$$

mais aussi

$$aw_{m,r} = G^m \circ E \circ D(ab^{r+1}ab^r a), \quad aw'_{m,r} = G^m \circ E \circ D(ba^{r+1}ba^r b)$$

En fait ces mots, en un sens, "marquent" les mots sturmiens. On a la propriété :

Propriété 3.3 *Tout mot de Sturm contient en facteur un et un seul des mots de* Ω.

Notre résultat principal est alors :

Théorème 3.4 *Soit f un morphisme. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *f est composé des morphismes E, ϕ et $\tilde{\phi}$ (c'est-à-dire $f \in \mathrm{St}$);*
(*ii*) *f est acyclique et il existe $w \in \Omega$ tel que $f(w)$ est un mot équilibré;*
(*iii*) *f est acyclique et pour tout $w \in \Omega$, le mot $f(w)$ est équilibré.*

Donnons une interprétation géométrique de cet énoncé. Un mot sturmien, par le couple de réels formé de la pente et l'intercept, est associé à une droite dans le plan. Un morphisme sturmien est donc une application "affine", car elle transforme des droites en des droites. Or, les mots équilibrés correspondent à des segments de droite, et les mots de Ω correspondent à des segments de droite particuliers. La propriété mentionnée ci-dessus signifie qu'un mot de Sturm est "reconnu" par la donnée d'un segment de cette forme, et le théorème dit que, pour qu'un morphisme soit sturmien, il suffit que l'image d'un des segments dans Ω soit un segment de droite.

Voici une application aux mots caractéristiques :

Proposition 3.5 *Soit f un morphisme, et soient α, β deux nombres irrationnels avec $0 < \alpha, \beta < 1$ tels que*

$$\mathbf{c}_\alpha = f(\mathbf{c}_\beta).$$

Alors f est un produit de E et ϕ.

Notons que le morphisme $\tilde{\phi}$ n'apparaît pas dans la factorisation de f donnée par cette proposition Ceci est dû à la propriété suivante des mots caractéristiques :

Propriété 3.6 *Soit $0 < \alpha < 1$ un nombre irrationnel. Alors le mot $a\mathbf{c}_\alpha$ est lexicographiquement plus petit que tous ses suffixes propres, et symétriquement, le mot $b\mathbf{c}_\alpha$ est lexicographiquement plus grand que tous ses suffixes propres.*

De ces résultats, on déduit assez simplement la caractérisation suivante des nombres irrationnels α dont le mot caractéristique $\mathbf{c}_\alpha$ est point fixe d'un morphisme (qui est nécessairement sturmien). Cette description est due à Crisp *et al.* [5] :

Théorème 3.7 *Soit $0 < \alpha < 1$ un nombre irrationnel. Le mot $\mathbf{c}_\alpha$ est point fixe d'un morphisme autre que l'identité si et seulement si le développement en fraction continue de α a l'une des trois formes suivantes :*

(*i*) $[0; r_0, \overline{r_1, \ldots r_n}], \qquad r_n \geq r_0 \geq 1;$
(*ii*) $[0; 1 + r_0, \overline{r_1, \ldots r_n}], \qquad r_n = r_0 \geq 1;$
(*iii*) $[0; 1, r_0, \overline{r_1, \ldots r_n}], \qquad r_n > r_0 \geq 1.$

Une autre conséquence de ces résultats est une connaissance plus détaillée du monïde de Sturme St. Nous allons démontrer que St est unitaire :

Proposition 3.8 *Le monoïde* St *est unitaire à gauche et à droite, c'est-à-dire :*

(*i*) *Si* $f \circ g \in \mathrm{St}$ *et* $f \in \mathrm{St}$, *alors* $g \in \mathrm{St}$;
(*ii*) *Si* $f \circ g \in \mathrm{St}$ *et* $g \in \mathrm{St}$, *alors* $f \in \mathrm{St}$.

4 Une première caractérisation

Commençons par une définition. Pour raccourcir l'écriture, posons

$$W = ba^2ba^2baba^2bab, \quad W' = abababa^2baba^2b$$

Un morphisme f est dit *équilibré* si le mot $f(W)$ est équilibré ou si le mot $f(W')$ est équilibré. Un morphisme sturmien est équilibré. Dans cette section nous prouvons la proposition suivante qui permet de démontrer simplement le théorème 3.1 :

Proposition 4.1 *Soit f un morphisme. Alors $f \in$ St si et seulement si f est acyclique et équilibré.*

Preuve du théorème 3.1. Il est une conséquence immédiate de cette proposition : en effet, si f est sturmien, il est acyclique et $f(W)$ est équilibré. Réciproquement, si f est acyclique et $f(W)$ est équilibré, alors f est équilibré. Par la proposition précédente, $f \in$ St, et f est sturmien.

■

La preuve nécessite deux lemmes. Le premier est combinatoire, et le deuxième permet de raisonner par récurrence sur la longueur du morphisme.

Lemme 4.2 *Soit f un morphisme non effaçant et équilibré, autre que l'identité. Si $f(a) \in aA^* \cap A^*a$, alors $f(b) \in aA^* \cup A^*a$.*

Preuve du lemme 4.2 : Soit f un morphisme non effaçant équilibré tel que $f(a) \in aA^* \cap A^*a$. Par hypothèse, l'un des mots $f(W)$ ou $f(W')$ est équilibré. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $f(b) \in bA^* \cap A^*b$.

Montrons d'abord que $f(a) = (ab)^n a$ pour un entier $n \geq 0$. Comme W et W' contiennent le facteur aa, leurs images contiennent aussi le facteur aa, et comme ils sont équilibrés, il ne contiennent pas de facteur bb. Si $f(a)$ n'a pas la forme annoncée, alors il existe des mots u et v tels que $f(a) = uaav$. Mais alors $f(aa)$ contient le facteur $z = aavuaa$ et $f(bab)$ contient le facteur $z' = buaavb$. Or z et z' sont de même longueur et $\delta(z, z') = 2$, contrairement à l'hypothèse. Donc $f(a)$ ne contient pas aa et il est bien de la forme $f(a) = (ab)^n a$ pour un entier $n \geq 0$.

Le mot $f(bab)$ contient bab et $f(aa)$ contient $baab$. Donc $f(b)$ ne contient ni bb ni a^3 en facteur. Nous allons prouver que $f(b) = (ba)^m b$ pour un $m \geq 0$. Ceci est vrai si $f(b) = b$, et nous supposons donc que $f(b)$ contient aa en facteur et posons $f(b) = buaavb$ pour des mots u, v.

Le mot W contient les facteurs $x = baabaab$ et $y = babaabab$. Or $f(x)$ contient en facteur le mot $z = aavbf(aabaa)buaa$ alors que $f(y)$ contient en facteur le mot $z' = bf(abaa)buaavbf(a)b$. Les mots z et z' sont de même longueur et $\delta(z, z') = 2$, contradiction.

De même, le mot W' contient les facteurs $x = baab$ et $y = babab$, et $f(x)$ contient en facteur le mot $z = aavbf(aa)buaa)$ alors que $f(y)$ contient le facteur $y = bf(a)buaavbf(a)b$. Là encore, les mots z et z' sont de même longueur et $\delta(z, z') = 2$, contradiction.

On a donc $f(a) = (ab)^n a$ et $f(b) = (ba)^m b$ pour des $n, m \geq 0$, et comme f n'est pas l'application identique, $n + m > 0$ et en particulier, $f(ab) = (ab)^{n+m+1}$ se termine par bab.

Le mot W contient les facteurs $u = aabaa$ et $v = ababa$. Par conséquent, $f(u)$ contient le facteur $z = af(ab)(ab)^n aa$ et $f(v)$ contient le facteur $z' = babf(ab)(ab)^n$. Les mots z et z' sont de même longueur et $\delta(z, z') = 2$, contradiction.

De même, le mot W' contient les facteurs $u = aababaa$ et $v = abababa$, et $f(u)$ contient en facteur $z = af(abab)(ab)^n a$ et $f(v)$ contient $z' = babf(abab)(ab)^n aa$ en facteur. Là encore, les mots z et z' sont de même longueur et $\delta(z, z') = 2$, contradiction.

Ceci achève la preuve du lemme.

■

Corollaire 4.3 *Soit f un morphisme non effaçant et équilibré, autre que l'identité. Alors $f(a)$ et $f(b)$ commencent ou finissent par la même lettre.*

Preuve du corollaire 4.3 : Il suffit de prouver l'énoncé lorsque $f(a)$ commence par a. En effet, sinon on remplace f par $E \circ f$ et clairement f vérifie la propriété du corollaire si et seulement si $E \circ f$ la vérifie. Supposons que $f(b)$ commence par b. Si $f(a)$ finit par a, le lemme 4.2 implique que $f(b)$ commence ou finit par a. Si $f(a)$ finit par b, le corollaire est vrai sauf si $f(b)$ commence par b et finit par a. Mais alors $f(ab)$ contient bb en facteur et $f(ba)$ contient aa en facteur, en contradiction avec le caractère équilibré de f. Ceci prouve l'assertion.

■

Lemme 4.4 *Soient f et g deux morphismes tels que $f = \phi \circ g$ ou $f = \tilde{\phi} \circ g$. Alors f est équilibré si et seulement si g est équilibré.*

Preuve du lemme 4.4 : Si g est équilibré, alors f l'est. Supposons réciproquement que le mot $f(W)$ est équilibré. Si f est effaçant, alors g l'est également et on voit facilement que $g(W)$ est équilibré. Supposons donc que f nest pas effaçant et que $g(W)$ n'est pas équlibré. Considérons d'abord le cas $f = \phi \circ g$.

Rappelons (voir par exemple [6]) qu'un mot déséquilibré possède deux facteurs de la forme ata et btb, avec $|t|_a = |t|_b$ et que deux occurrences de ces facteurs sont disjointes. De plus, et cela servira dans la deuxième partie de la preuve, on peut choisir t de longueur minimale, et alors aucun préfixe non vide de ata n'est suffixe de btb et symétriquement.

Il existe donc des mots t, x, x', z, z' tels que

$$g(W) = xataz = x'btbz'$$

Il en résulte, en posant $u = \phi(t)$, que

$$f(W) = \phi(x)abuab\phi(z) = \phi(x')aua\phi(z')$$

Si $z' \neq \varepsilon$, alors $\phi(z')$ commence avec un a et $f(W)$ contient les facteurs $buab$ et $auaa$, donc est déséquilibré. Donc la seule occurrence de btb est en suffixe de $g(W)$, et $g(W) = xataybtb$ pour un mot y. Or $|ata| = |btb| \leq |g(W)|/2$, donc btb est suffixe de $g(abaabab)$. Mais le mot W contient une deuxième occurrence du facteur $abaabab$, donc $g(W)$ contient une deuxième occurrence de btb. La même preuve s'applique pour le mot W'.

Considérons maintenant le cas $f = \tilde{\phi} \circ g$. En posant cette fois-ci $u = \tilde{\phi}(t)$, on obtient

$$f(W) = \tilde{\phi}(x)bauba\tilde{\phi}(z) = \tilde{\phi}(x')aua\tilde{\phi}(z')$$

et comme précédemment, on prouve que $x' = \varepsilon$, que $g(W) = btbyataz'$ pour un mot y et que btb n'apparaît qu'en préfixe dans $g(W)$. Il en résulte que $|btb| > |g(baaba)|$, puisque $baaba$ a d'autres occurrences dans W. On en déduit que

$$|g(abaabab)| \geq |btb| = |ata| > |g(aabab)|$$

Comme le suffixe $abaabab$ de W a une deuxième occurrence dans W, puisque $W = ba \cdot abaabab \cdot aabab$, le mot ata n'a pas d'ocurrence dans $g(abaabab)$ car sinon

$$g(baabaabab) = ataw = w'btb$$

avec $|ata| = |btb| \geq |g(baaba)| > |g(baabaabab)|/2$. Les occurrences de ata et btb se chevaucheraient donc, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc une factorisation

$$g(ab) = x_1yx_2, \quad x_1 \neq \varepsilon, x_2 \neq \varepsilon$$

telle que

$$btb = g(baaba)x_1, \quad ataz' = x_2g(abaabab)$$

Or $|ata| = |btb| = |g(a^3b^2)| + |x_1|$ d'où en simplifiant

$$|z'| = |x_2yx_2|$$

Si z' est suffixe de $g(ab) = x_1 y x_2$, alors x_2 est suffixe de x_1, et x_2 est à la fois suffixe de btb et préfixe de ata, contradiction.

Si $g(ab)$ est suffixe de z', soit z'' tel que $z' = z'' g(ab)$. Alors

$$ataz'' = x_2 g(a) g(baab)$$

et comme z'' est plus court que $g(baab)$, on a $g(baab) = sz''$ pour un mot non vide s qui est à la fois suffixe de ata et préfixe de btb. Ceci achève la preuve.

Ici aussi, la même preuve s'applique pour le mot W'.

■

Preuve de la proposition 4.1. Tout morphisme dans St est sturmien, donc équilibré et acyclique. Réciproquement, soit f un morphisme acyclique équilibré. Comme f est acyclique, ni $f(a)$ ni $f(b)$ ne sont le mot vide, et donc $\|f\| \geq 2$. Si $\|f\| = 2$ alors f est l'identité ou $f = E$, parce que f est acyclique, et le résultat est évident. Nous pouvons donc supposer, en raisonnant par récurrence sur $\|f\|$, que $\|f\| \geq 3$.

Par le corollaire 4.3, les mots $f(a)$ et $f(b)$ commencent ou finissent par la même lettre. Nous pouvons supposer que la lettre commune au début ou en fin de $f(a)$ et $f(b)$ est la lettre a, sinon nous remplaçons f par $E \circ f$ sans augmenter sa longueur. Nous pouvons aussi supposer que la lettre commune à $f(a)$ et $f(b)$ est leur dernière lettre. Sinon, on remplace dans ce qui suit $\tilde{\phi}$ par ϕ.

Si ni $f(a)$ ni $f(b)$ ne contiennent pas de facteur bb (et finissent pas la lettre a), alors $f(a), f(b) \in \{a,\ ba\}^*$, et il existe des mots x et y tels que $f(a) = \tilde{\phi}(x)$, $f(b) = \tilde{\phi}(y)$. Soit alors g le morphisme défini par $g(a) = x$, $g(b) = y$. Par construction, $f = \tilde{\phi} \circ g$. Par le lemme 4.4, le morphisme g est équilibré, et comme $\|f\| > \|g\|$, le résultat s'obtient par récurrence.

Si $f(a)$ ou $f(b)$ contient le facteur bb, on a $f = E \circ \phi \circ\ g$ pour le même morphisme g.

■

5 Une propriété du monoïde de Sturm

Dans cette section, nous prouvons le théorème 3.4 et la proposition 3.8. Nous déduisons le théorème de la proposition 4.1 au moyen de la proposition ci-dessous qui établit que le monoïde de Sturm est unitaire à droite.

Proposition 5.1 *Soient f et g deux morphismes. Si $f \circ g \in$ St et $g \in$ St, alors $f \in$ St.*

Pour la preuve, nous utiliserons, pour le monoïde St, les générateurs $G = \phi \circ E$ et $D = \tilde{\phi} \circ E$ à la place de ϕ et $\tilde{\phi}$. Pour plus de commodité, nous allons noter par simple juxtaposition la composition de morphismes (ainsi $fg = f \circ g$). Rappelons (voir [14, 21]) les relations suivantes (où I désigne l'application identité) :

$$\begin{array}{rcl} E^2 & = & I \\ GD & = & DG \\ GEG^kED & = & DED^kEG \quad (k \geq 1) \end{array}$$

La proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 5.2 *Soit f un morphisme. Alors*

(1) *si $fE \in St$, alors $f \in \mathrm{St}$;*
(2) *si $fG \in St$, alors $f \in \mathrm{St}$;*
(3) *si $fD \in St$, alors $f \in \mathrm{St}$.*

Preuve. (1). Si $fE \in St$, alors $(fE)E \in St$. Or $fE^2 = f$, donc $f \in \mathrm{St}$. La preuve de (2) et (3) est symétrique, et nous prouvons (2).

Appelons deux mots u et v *incomparables* lorsqu'aucun des deux mots n'est préfixe de l'autre. Un morphisme f est dit *séparant* si $f(a)$ et $f(b)$ sont incomparables. Clairement les morphismes E et D sont séparants, et G n'est pas séparant. Notons que si f et g sont séparants, alors fg est séparant. En effet, on a $g(a) = ucx$ et $g(b) = udy$ pour des mots u, x, y et des lettres $c \neq d$, donc $fg(a) = f(u)f(c)f(x)$ et $fg(b) = f(u)f(d)f(y)$, et comme $f(c)$ et $f(d)$ sont incomparables, il en est de même de $fg(a)$ et $fg(b)$.

Pour tout $k \geq 0$ et $s \geq 1$, le morphisme G^kED^s est séparant. En effet, le morphisme

$$G^kED \ : \ \begin{array}{l} a \rightarrow a^kb \\ b \rightarrow a^{k+1}b \end{array}$$

est séparant, et par composition aussi le morphisme G^kED^s.

Posons $fG = H$, avec $H = g_1g_2\cdots g_\ell$, $g_i \in \{E, G, D\}$, et H sans facteur E^2, GD, ni GEG^kED pour un $k \geq 1$. Nous allons montrer qu'alors $g_\ell = G$. Supposons que $g_\ell \neq G$. Le morphisme H s'écrit sous la forme

$$H = D^{s_0}G^{m_1}ED^{s_1}G^{m_2}ED^{s_2}\cdots G^{m_k}ED^{s_k}$$

avec $s_0 \geq 0$, $s_i, m_i \geq 0$ et $s_i + m_{i+1} > 0$ pour $i = 1, \ldots, k-1$.

Montrons d'abord que si $s_k = 0$ alors $m_k = 0$. Sinon,

$$H = H'GE$$

pour un morphisme H', et $H(a) = H'(a)H'(b)$, $H(b) = H'(a)$, donc $H(b)$ est préfixe propre de $H(a)$, alors que $fG(a) = f(a)$ est préfixe propre de $fG(b) = f(ab)$.

Montrons maintenant que si $s_i = 0$, alors $m_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, k$ (nous venons de prouver que ceci est vrai pour $i = k$). Sinon, il existe $i < k$ tel que $s_i = 0$ et $m_i \neq 0$. Choisissons i maximal avec cette propriété. Comme $s_i + m_{i+1} > 0$, on a $m_{i+1} \neq 0$, et par maximalité, on a aussi $s_{i+1} \neq 0$. Donc H contient le facteur

$$G^{m_i}EG^{m_{i+1}}ED^{s_{i+1}}$$

avec $m_i, m_{i+1}, s_{i+1} > 0$, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi, H se factorise donc en $H = D^{s_0}Y_1Y_2\cdots Y_k$, où chaque $Y_i = G^{m_i}ED^{s_i}$ est soit égal à E, soit vérifie $s_i > 0$. Dans les deux cas, Y_i est séparant, donc H est séparant, alors que fG n'est pas séparant.

■

Lemme 5.3 *Soient f un morphisme et $r \geq 1$ un entier.*

(1) *Si $f(w_{1,r})$ est équilibré, alors $f(w_{1,1})$ est équilibré;*
(2) *si $f(w'_{1,r})$ est équilibré, alors $f(w'_{1,1})$ est équilibré.*

Preuve. Supposons que $f(w'_{1,r})$ est équilibré, et que $f(abababa^2baba^2b)$ est déséquilibré. Ce mot contient alors deux facteurs u et v, de même longueur, et tels que $\delta(u,v) = 2$. On choisit ces mots de longueur minimale. L'un au moins de ces facteurs, disons u n'est pas facteur de $f(w'_{1,r})$. Mais u est facteur d'un mot $f(s)$ où s est facteur de $W' = abababa^2baba^2b$ sans être facteur de $w'_{1,r}$. Une inspection des mots montre que s doit contenir le facteur $aababaa$. En d'autres termes, u contient en facteur (propre) le mot $ababa$:

$$u = x_1 f(ababa) x_2$$

pour des mots non vides x_1, x_2. Le facteur v, d'occurrence disjointe de u, est facteur du préfixe $f(abababa)$. Il existe donc y_1 et y_2 tels que

$$v = y_1 f(aba) y_2$$

Maintenant, les mots

$$u_r = x_1 f((ab)^r aba) x_2 \quad \text{et} \quad v_r = y_1 f((ab)^r a) y_2$$

sont facteurs de $f(w'_{1,r})$, et $\delta(u_r, v_r) = \delta(u,v) = 2$. Contradiction. La preuve de l'autre implication est similaire.

■

Preuve du théorème 3.4. Supposons que f est acyclique et que $f(w_{m,r})$ est équilibré pour des entiers $m, r \geq 1$. Posons $g = f \circ G^{m-1}$. Le morphisme g est acyclique, car si l'on avait $g(ab) = g(ba)$, on aurait $f(a^m b) = f(a^{m-1}ba)$ et f serait cyclique. On a $f(w_{m,r}) = g(w_{1,r})$. Ainsi, le mot $g(w_{1,r})$ est équilibré et en vertu du lemme précédent, le mot $g(ba^2ba^2baba^2bab)$ est équilibré. Par la proposition 4.1, le morphisme g est sturmien. Donc $g = f \circ G^{m-1} \in \mathrm{St}$, et par la proposition 5.1, le morphisme f est dans St.

■

Preuve de la proposition 3.8 : Nous avons prouvé plus haut que le monoïde de Sturm est untaire à droite. Le fait que St est unitaire à gauche est maintenant une conséquence immédiate du lemme 4.4 : Si $f \circ g \in \mathrm{St}$ et $f \in \mathrm{St}$, alors f et $f \circ g$ sont équilibrés, et par le lemme 4.4, le morphisme g est équilibré. De plus, g est acyclique parce que f l'est, donc $g \in \mathrm{St}$.

6 Applications arithmétiques

Soient $\mathbf{x} = a_0 a_1 \cdots$ et $\mathbf{y} = b_0 b_1 \cdots$ deux mots infinis. Nous notons $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ lorsque $\mathbf{x}$ est lexicographiquement plus petit que $\mathbf{y}$, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier n tel que $a_k = b_k$ pour $0 \leq k < n$ et $a_n = a$, $b_n = b$.

Proposition 6.1 *Soient* $0 \leq \rho, \rho' < 1$ *et* $0 < \alpha < 1$, α *irrationnel. Alors*

$$\mathbf{s}_{\alpha,\rho} < \mathbf{s}_{\alpha,\rho'} \iff \rho < \rho'.$$

Preuve. Comme α est irrationnel, l'ensemble des parties fractionnaires $\{\alpha n\}$, pour $n > 0$, est dense dans $[0, 1[$. On a $\rho < \rho'$ ssi il existe un entier n tel $1 - \rho' < \{\alpha n\} < 1 - \rho$, donc ssi $\lfloor \alpha n + \rho' \rfloor = 1 + \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$. Soit m le plus petit entier vérifiant cette propriété, et posons $k = m - 1$. Alors on a, avec $\mathbf{s}_{\alpha,\rho} = a_0 a_1 \cdots$ et $\mathbf{s}_{\alpha,\rho'} = a'_0 a'_1 \cdots$ les relations $a_j = a'_j$ pour $0 \leq j < k$ et $a_k < a'_k$.

■

Proposition 6.2 *Soit $0 < \alpha < 1$ irrationnel. Pour tout $0 < \rho < 1$, on a*

$$a\mathbf{c}_\alpha < \mathbf{s}_{\alpha,\rho} < b\mathbf{c}_\alpha.$$

Preuve. *Il suffit de prouver la seconde inégalité. On a $b\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{s}'_{\alpha,0}$. Par ailleurs, $\lceil \alpha n \rceil \geq \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ pour tout $n \geq 0$ et, comme α est irrationnel, il existe n tel que $\lceil \alpha n \rceil = 1 + \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$. On conclut comme ci-dessus.*

■

Preuve de la propriété 3.6. En effet, un suffixe de $\mathbf{c}_\alpha$ s'écrit sous la forme $\mathbf{s}_{\alpha,\rho}$, avec $0 < \rho < 1$.

■

Avant de prouver la proposition 3.5, il est utile de rappeler les relations suivantes régissant le lien entre les pentes des suites caractéristiques et le morphismes de Sturm (voir par exemple [3] ou [24] où ces relations sont implictes) :

$$E(\mathbf{c}_\alpha) = \mathbf{c}_{1-\alpha}, \quad G(\mathbf{c}_\alpha) = \mathbf{c}_{\alpha/(1+\alpha)}, \phi(\mathbf{c}_\alpha) = \mathbf{c}_{(1-\alpha)/(2-\alpha)}$$

Il sera commode de disposer des morphismes $\theta_m = G^{m-1} \circ E \circ G$ pour $m \leq 1$. On a

$$\theta_m(\mathbf{c}_\alpha) = \mathbf{c}_{1/m+\alpha}.$$

Preuve de la proposition 3.5. Soit f un morphisme tel que $\mathbf{c}_\alpha = f(\mathbf{c}_\beta)$. Alors f est faiblement sturmien, donc sturmien par le théorème 3.2. Il reste à prouver que f s'écrit comme produit de E et de ϕ, et sans $\tilde{\phi}$. Nous procédons par récurrence sur $\|f\|$. On peut supposer que $\mathbf{c}_\beta$ contient le facteur aa. Sinon, on remplace $\mathbf{c}_\beta$ par $\mathbf{c}_{1-\beta} = E(\mathbf{c}_\beta)$ et f par $f \circ E$. On peut également supposer que $\mathbf{c}_\alpha$ contient le facteur aa. Sinon, on remplace f par $E \circ f$ et $\mathbf{c}_\alpha$ par $\mathbf{c}_{1-\alpha}$. Ces normalisations n'augmentent pas la longueur de f. Comme $b\mathbf{c}_\beta$ est sturmien, le mot $\mathbf{c}_\beta$ commence par la lettre a. De même, $\mathbf{c}_\alpha$ commence par la lettre a. En particulier, $f(a)$ commence avec a, et ni $f(a)$ ni $f(b)$ ne contiennent le facteur bb.

Si le mot $f(b)$ commence aussi avec la lettre a, alors les deux mots $f(a)$ et $f(b)$ sont produits de mots dans $\{ab, a\}$. Par conséquent, $f = \phi \circ g$ pour un morphisme g plus court, et un mot approprié $\mathbf{c}_\gamma$. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $f(b)$ ne peut pas commencer par la lettre b. En effet, sinon $f(a)$ et $f(b)$ finissent par la même lettre letter. Si cette lettre est un b, alors $\mathbf{c}_\alpha$ contient le facteur bb. Donc $f(a)$ et $f(b)$ finisssent par un a. Soit alors $r \geq 1$ l'entier tel que $a^r b$ est préfixe de $\mathbf{c}_\beta$. Alors $a^{r+1}b$ est facteur de $\mathbf{c}_\beta$. Le mot $af(a^r)b$ est un préfixe de $a\mathbf{c}_\alpha$, et $af(a^r)a$ est un facteur de $\mathbf{c}_\alpha$. Or ceci montre que $a\mathbf{c}_\alpha$ est lexicographiquement supérieur à un de ses suffixes, contradiction.

■

Nous terminons par la preuve de la caractérisation des nombres irrationnels dont le mot caractéristique est point fixe d'une substitution. Ce résultat a été établie par Crisp, Moran, Pollington et Shiue. La présente preuve ne reprend que la fin de leur démonstration, le début de leur preuve étant consacré à la démonstration d'un cas particulier de notre théorème 3.1.

Preuve du théorème 3.7. Soit

$$\alpha = [0; r_1, r_2, \ldots]$$

le développement en fraction continue de α. Soit f tel que $\mathbf{c}_\alpha = f(\mathbf{c}_\alpha)$. Alors f est, par la proposition 3.5, produit de morphismes G et E. Clairement $f \neq E$ et f n'est pas une puissance de G uniquement. Donc,

$$f = G^{n_1} E G^{n_2} \cdots E G^{n_k} E G^{n_{k+1}}$$

avec $k \geq 1$, $n_1, n_{k+1} \geq 0$, et $n_2, \ldots, n_k \geq 1$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas. $n_{k+1} \geq 1$. Alors

$$f = \theta_{n_1+1} \theta_{n_2} \cdots \theta_{n_k} G^{n_{k+1}-1}$$

Comme $\mathbf{c}_\alpha$ est point fixe, ceci implique l'égalité

$$[0; r_1, r_2, \ldots] = [0; 1 + n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1} - 1 + r_1, r_2, \ldots]$$

d'où l'on tire que $r_1 = 1 + n_1$, $r_2 = n_2, \ldots, r_k = n_k$, $r_{k+1} = n_{k+1} + n_1$, et $r_j = r_{j+k}$ pour $j \geq 2$. Donc

$$\alpha = [0; r_1, \overline{r_2, \ldots, r_{k+1}}], \qquad r_{k+1} \geq r_1$$

ce qui est la première alternative de l'énoncé.

Deuxième cas. $n_{k+1} = 0$. Soit alors $f' = EfE$. Comme $\mathbf{c}_\alpha = f(\mathbf{c}_\alpha)$, on a $f'(E\mathbf{c}_\alpha) = E\mathbf{c}_\alpha$ ou encore $f(\mathbf{c}_\beta) = \mathbf{c}_\beta$, avec $\beta = 1 - \alpha$. Maintenant,

$$f' = EG^{n_1} E G^{n_2} \cdots E G^{n_k} \quad \text{et } n_k \geq 1.$$

Cette écriture est de la même forme que ci-dessus sauf si $n_1 = 0$. Considérons les deux sous-cas.

Supposons d'abord que $n_1 = 0$. Alors $k \geq 3$, et $f' = \theta_{n_2+1} \theta_{n_3} \cdots \theta_{n_{k-1}} G^{n_k - 1}$ d'où, par application du premier cas, $\beta = [1 + n_2, \overline{n_3, \ldots, n_{k-1}, n_2 + n_k}]$ et comme $n_2 \geq 1$, on obtient pour $\alpha = 1 - \beta$ le développement

$$\alpha = [0; 1, n_2, \overline{n_3, \ldots, n_{k-1}, n_2 + n_k}]$$

Comme $n_k > 0$, on est dans la dernière alternative de l'énoncé.

Si enfin $n_1 > 0$, alors $f' = \theta_{n_0+1} \theta_{n_1} \cdots \theta_{n_{k-1}} G^{n_k - 1}$ avec $n_0 = 0$. En appliquant le premier cas, on obtient $\beta = [0; 1, \overline{n_1, \ldots, n_k}]$ et donc

$$\alpha = [0; 1 + n_1, \overline{n_2, \ldots, n_k, n_1}]$$

ce qui est la deuxième alternative de l'énoncé.

■

Références

[1] E. Bombieri, J.E. Taylor, Which distributions of matter diffract? An initial investigation, *J. Phys.* **47** (1986) Colloque C3, 19–28.

[2] J.E. Bresenham, Algorithm for computer control of a digital plotter, *IBM Systems J.* **4** (1965) 25–30.

[3] T.C. Brown, A characterization of the quadratic irrationals, *Canad. Math. Bull.* **34** (1991) 36–41.

[4] T.C. Brown, Descriptions of the characteristic sequence of an irrational, *Canad. Math. Bull.* **36** (1) (1993) 15–21.

[5] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington, P. Shiue, Substitution invariant cutting sequences, Sémin. Théorie des Nombres, Bordeaux, 1993, to appear.

[6] E. Coven, G. Hedlund, Sequences with minimal block growth, *Math. Systems Theory* **7** (1973) 138–153.

[7] S. Dulucq, D. Gouyou-Beauchamps, Sur les facteurs des suites de Sturm, *Theoret. Comput. Sci.* **71** (1990) 381–400.

[8] A.S. Fraenkel, M. Mushkin, U. Tassa, Determination of $\lfloor n\theta \rfloor$ by its sequence of differences, *Canad. Math. Bull.* **21** (1978) 441–446.

[9] G.A. Hedlund, Sturmian minimal sets, *Amer. J. Math* **66** (1944) 605–620.

[10] G.A. Hedlund, M. Morse, Symbolic dynamics, *Amer. J. Math* **60** (1938) 815–866.

[11] G.A. Hedlund, M. Morse, Sturmian sequences, *Amer. J. Math* **61** (1940) 1–42.

[12] S. Ito, S. Yasutomi, On continued fractions, substitutions and characteristic sequences, *Japan. J. Math.* **16** (1990) 287–306.

[13] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* vol. 17, Addison-Wesley, Reading, MA (1983).

[14] M. Kòsa, Problem, *Bull. EATCS* **32** (1987) 331–333.

[15] F. Mignosi, On the number of factors of Sturmian words, *Theoret. Comput. Sci.* **82** (1991) 71–84.

[16] F. Mignosi, P. Séébold, Morphismes sturmiens et règles de Rauzy, Techn. Rep. LITP-91-74, Paris, France (1991).

[17] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems – Spectral Analysis*, Lecture Notes Math.,vol. 1294, Springer-Verlag (1987).

[18] G. Rauzy, Suites à termes dans un alphabet fini, *Sémin. Théorie des Nombres* (1982–1983) 25-01,25-16, Bordeaux.

[19] G. Rauzy, Mots infinis en arithmétique, in : *Automata on infinite words* (D. Perrin ed.), *Lect. Notes Comp. Sci.* **192** (1985) 165–171.

[20] G. Rauzy, Sequences defined by iterated morphisms, in : *Workshop on Sequences* (R. Capocelli ed.), *Lecture Notes Comput. Sci.*, to appear.

[21] P. Séébold, Fibonacci morphisms and Sturmian words, *Theoret. Comput. Sci.* **88** (1991) 367–384.

[22] C. Series, The geometry of Markoff numbers, *The Mathematical Intelligencer* **7** (1985) 20–29.

[23] K.B. Stolarsky, Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators, *Cand. Math. Bull.* **19** (1976) 473–482.

[24] B.A. Venkov, *Elementary Number Theory*, Wolters-Noordhoff, Groningen (1970).

Jean Berstel
LITP, Institut Blaise Pascal
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
France

Patrice Séébold
LAMIFA
Faculté de Mathématiques et Informatique
Université d'Amiens
33, rue Saint Leu
F-80039 Amiens Cedex
France