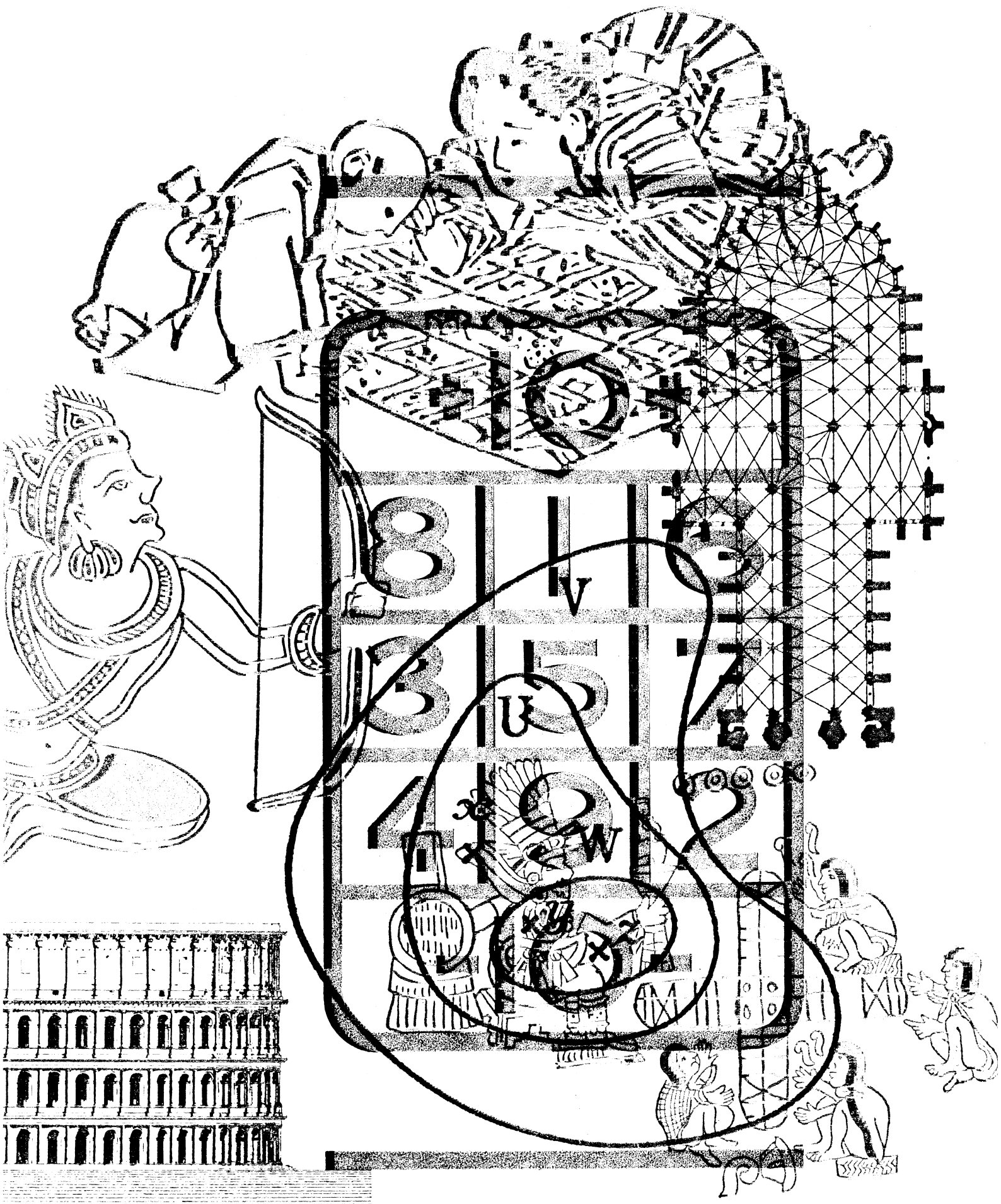




United States Lines
Paris Review

$$\bigcap_{i=1}^I (A_i) \cap \bigcap_{i=1}^I (B_i) = \bigcap_{i=1}^I (A_i \cap B_i)$$ algebra and games

By Marcel-Paul SCHUTZENBERGER

L'ALGÈBRE ET LES JEUX

Marcel Schutzenberger here traces the history of mathematics as applied to games of strategy ; that is to say, games in which other factors apart from chance are operative—for example, free will, choice, and even the very factor of conflict between the players. The author gives an account of the stage of advancement reached by the study of this subject, from the Theory of Groups to Von Neumann and Morgenstern's Theory of Games; the latter may be considered as one of the outstanding scientific landmarks of the present century.

Marcel Schutzenberger nous retrace ici l'histoire des mathématiques appliquées aux jeux de stratégie, c'est-à-dire à ceux qui font intervenir d'autres éléments que le hasard, tels la volonté, le choix, les conflits mêmes des joueurs, et situe l'état d'avancement actuel de ces recherches depuis la théorie des groupes jusqu'à la théorie des jeux de Von Neumann et Morgenstern, que l'on peut considérer comme l'un des événements scientifiques les plus importants de ce siècle.

In the vast field of mathematics there has always been a little walled garden, tended by a number of great mathematicians who have considered it worth cultivating. Mathematical games and recreations have received the serious attention of Euler, Jacobi and Peiru, to cite only a few of the more illustrious names in this connection.

The Theory of Groups, which dominates a great part of modern mathematics, has provided complete solutions to games such as ring puzzles and teasers, which as early as the XVIth. century had aroused the interest of one of the precursors of algebra, the mathematician and alchemist Jérôme Cardan.

Other problems of a familiar nature have given rise to a great deal of academic research ; for example, that familiar to schoolchildren in which the various countries on a map have to be colored, using four colors only and without any two adjacent countries receiving the same color. This has become one of the most stimulating enigmas in topology. More recently there has been the problem of the "three young ladies out for a stroll", which opened the way to the extremely profound "Theory of Waben".

Not to be forgotten, either, are those puzzles involving chessboards and chessmen: the problem of the eight queens, and Cavalier's journey (he had to cover the whole chessboard without crossing the same square twice); and the domino game of Monge, the French Academician responsible for developing descriptive geometry—hardly a frivolous subject, yet the same author wrote in 1773 his "Reflections on a card trick".

Yet all these researches, however fruitful or ingenious, appear to allow the very nature of games to elude them. They are all concerned with solitary games, games of patience; nowhere to we find the notion of a conflict between two wills or two intelligences for supremacy.

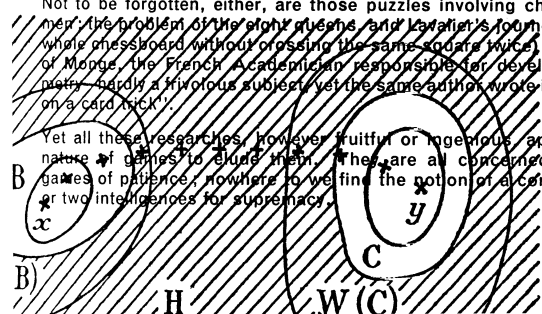
DEPUIS toujours dans l'immense domaine des mathématiques, un jardin isolé a attiré l'attention des plus grands géomètres qui n'ont pas dédaigné de venir le cultiver. Les jeux et les récréations mathématiques ont ainsi été l'objet de travaux d'Euler, de Jacobi, de Peirce, pour ne citer que quelques noms illustres.

La Théorie des groupes qui règne souverainement sur la plus grande partie des mathématiques modernes a, pour sa part, permis une solution complète de jeux comme le taquin ou le baguenaudier auquel s'était déjà intéressé au XVI^e siècle l'un des précurseurs de l'algèbre, le mathématicien et alchimiste Jérôme Cardan.

D'autres problèmes aux noms poétiques ont suscité les recherches les plus académiques : celui des « quatre couleurs » a bien vite cessé d'être l'intrigante possibilité qu'a tout écolier de colorier n'importe quelle carte avec quatre couleurs seulement (sans que deux pays contigus reçoivent la même) pour devenir une des énigmes les plus stimulantes de la Topologie combinatoire. Plus récemment la « promenade des quinze demoiselles » a ouvert la route à la très sérieuse « Théorie der Waben ».

Enfin, pour n'être pas trop incomplet il faudrait citer les questions dont le point de départ est un échiquier, et ses pièces : problème des huit reines de la marche du Cavalier (qui doit parcourir tout l'échiquier sans traverser deux fois la même case) ou un jeu de domino. Monge, l'académicien français à qui est due la peu engageante géométrie descriptive, n'hésita pas d'écrire en 1773 des « Réflexions sur un Tour de cartes ».

Cependant toutes ces recherches, si ingénieuses ou si fécondes soient-elles, semblent laisser échapper la nature même du jeu : ce sont des analyses subtiles de jeux de solitaires, de patiences, et nulle part n'apparaît la notion de conflit entre deux volontés et deux intelligences en lutte pour la victoire.



Moreover it might be thought that the very concept of such a battle of wits is too human to be incorporated in an analytic symbolism; its place, perhaps, is in a domain of reasoning where mathematics has no part.

This was, indeed, the case up to the end of the first world war; the "algebra of games" until then was scarcely anything more than an algebra which found new enigmas, new sources of ideas, in games. It was in no way different from that developed from pure theory.

Since then, however—thanks largely to the impulse given by Von Neumann—things have radically changed. A whole theoretical structure has been built up on the idea of conflict; by means of suitable symbols, the most subtle implications of bluff and coalition of interests can be discussed, and at the same time specific problems of military and economic strategy can be effectively handled.

Very roughly speaking, the theory of games is divided into two parts: in the first part, the game is considered reduced to its basic element, pure conflict, in which the two players each independently choose their respective strategies, the outcome of which involves an exchange of money between the two. The simplest example, and the most typical, is provided by "odds and evens". Peter chooses 0 or 14; Paul tries to guess the number chosen. In the most general case, the payments are different for each of the four possible cases. The theory enables us to calculate the best strategy for each player, that is to say the probabilities of his choosing or calling 0 and 14.

In this theory, whose extensions may imply the solution of the most refined analytical problems, a fundamental role is played by strictly algebraic considerations, namely the famous "Minimax" operation, the keystone of the whole edifice—so called because Peter tries to reduce his loss to a minimum, whereas Paul does his best to make it a maximum.

In the other part of the theory of games, which is of more recent development, the aim is to reduce everything to ideally simple terms at the outset of the game or in a given situation within the game. Thus for example bluff is presented as part of the normal mechanism of the player's strategy in forms of poker simplified in the extreme. The fact that this purely psychological element can apparently be subjected to mathematical rules seems to provide remarkable confirmation that the scope of the mathematician's activity is by means limited to inanimate matter!

Finally in the simplest case, that of intellectual games such as chess or draughts, in which the element of chance is totally excluded, algebra has provided a definite formula for winning strategies. Theoretically, any game can be reduced to certain combinations of the very simple and well-known game of Nim, or Fan Tan. Thus the problem is solved, apart from one simple detail—the calculations have to be worked out. So the algebraists are tending to turn to more stimulating questions, such as to what extent one can deduct from the strategy of a game, that of the corresponding "loser wins" game? How can multiplication and addition be affected between different games? And the decisive question: is it possible to determine, from the rules, if a game will end or not in a given finite time?

So far as this puzzle of their own devising is concerned, the mathematicians think the answer is in the negative.

D'ailleurs ne pouvait-on pas penser que cette notion même était par trop humaine pour être incorporée dans un symbolisme analytique: l'idée de conflit ne devait-elle pas rester l'apanage de formes de raisonnement où les mathématiques n'auraient que faire?

Telle était, en effet, la situation jusqu'à la fin de la première guerre mondiale: une algèbre des jeux n'était guère qu'une algèbre à propos de jeux qui lui fournissaient le prétexte et le nom de nouvelles énigmes, en aucune manière différentes de celles qui se proposaient par le développement même de la théorie.

Depuis cette époque, grâce surtout à l'impulsion donnée par von Neumann, les choses ont radicalement changé: toute une théorie s'est constituée qui, à partir de l'idée de conflit, convenablement symbolisée, permet à la fois de discuter les implications les plus subtiles du concert de coalition d'intérêts ou de « bluff » et de traiter efficacement les problèmes précis de stratégie militaire ou économique.

Très schématiquement, la Théorie des Jeux se décompose en deux parties: dans l'une le jeu est supposé réduit à son élément le plus intime, au conflit à l'état pur: deux joueurs choisissent indépendamment l'un de l'autre chacun une stratégie et sur la base de ce double choix un règlement monétaire dépendant des deux stratégies intervient entre eux: l'exemple le plus simple mais parfaitement typique est à coup sûr le jeu de pair ou impair (Pierre choisit zéro ou 1, Paul essaye de deviner le nombre choisi: dans le cas le plus général les paiements sont différents pour les quatre cas possibles. La théorie permet de calculer quelle est la meilleure stratégie de chaque joueur; c'est-à-dire les probabilités avec lesquelles il doit choisir ou annoncer 0 et 1).

Dans cette théorie, dont les prolongements peuvent impliquer la solution des problèmes d'analyse les plus raffinés, un rôle fondamental est joué par des considérations strictement algébriques sur la fameuse opération Minimax, clé de voûte de tout l'édifice (Minimax parce que Pierre cherche à rendre minimum sa perte que Paul s'efforce, au contraire, d'accroître au maximum).

Dans l'autre partie de la théorie, dont le développement est plus récent, on s'efforce au contraire de ramener au schéma idéalement simple précédent des jeux ou des situations de jeux données: on a pu ainsi par exemple faire apparaître la notion de bluff comme un rouage normal de la stratégie du joueur pour des formes de Poker simplifiées à l'extrême. N'y a-t-il pas là une réponse étonnante à ce qu'il voulait interdire aux algébristes que lever les yeux plus haut que la matière inanimée puisque cet élément, proprement psychologique croirait-on, vient obéir aux règles à calcul.

Enfin, dans le cas le plus simple, celui des jeux de réflexion, comme le jeu d'échecs ou de dames, dont le hasard est exclu, l'algèbre a permis de donner une formulation définitive à la recherche des stratégies gagnantes: idéalement on sait ramener tout jeu possible à certaines combinaisons d'un jeu très simple et bien connu, le jeu de Nim (ou Fan Tan). Aussi, le problème étant résolu à l'exception de ce simple détail — que les calculs restent à faire — les algébristes tendent à se tourner vers les questions plus stimulantes: dans quelle mesure peut-on déduire de la stratégie d'un jeu celle du jeu de « Qui perd gagne » qui y correspond? Comment peut-on multiplier ou additionner entre eux des jeux? Et enfin la question décisive: peut-on déterminer d'après les règles si un jeu se terminera ou non en un temps fini?

En ce qui concerne leur propre puzzle, les mathématiciens pensent que la réponse est négative.