Analogues non-commutatifs et quasi-symétriques des fonctions de Hall-Littlewood, et modules de Demazure d'une algèbre enveloppante quantique dégénérée

Florent Hivert

Institut Gaspard Monge – Université de Marne-la-Vallée
2, Rue de la Butte-Verte – 93166 Noisy-le-Grand Cedex
Tel : 01 49 32 90 84, E-mail : hivert@univ-mlv.fr.

combinatoire/combinatorics
Fonctions de Hall-Littlewood quasi-symétriques et non-commutatives

Résumé

Nous établissons des formules des caractères de type Weyl et Demazure pour certains groupes quantiques dégénérés dont les caractères sont des fonctions quasi-symétriques. Nous en déduisons une action quasi-symétrisante de l'algèbre de Hecke sur les polynômes, ce qui nous permet de définir des analogues quasi-symétriques et non-commutatifs des fonctions de Hall-Littlewood.

Noncommutative and quasi-symmetric analogues of Hall-Littlewood functions, and Demazure modules of a degenerate quantized enveloping algebra

Abstract

We establish Weyl and Demazure character formulae for certain degenerate quantum groups which admit quasi-symmetric functions as characters. We obtain in this way a new action of the Hecke Algebra on polynomials. This allows us to define quasi-symmetric and non-commutative analogues of Hall-Littlewood functions.

Abridged English Version

It has been recently shown that the noncommutative symmetric functions of [5] and the quasi-symmetric functions of [6] could be interpreted in terms of representations of various quantized algebras at $q = 0$: Hecke algebras of type A [4], the quantum linear groups of Dipper and Donkin [2], and of a degenerate version of $U_q(gl_n)$, denoted here by $\mathcal{U}_0(gl_n)$, which is essentially a specialization of Takeuchi's two-parameter quantized enveloping algebra [21, 10].

We first give Weyl and Demazure type character formulae for the irreducible polynomial representations of $\mathcal{U}_0(gl_n)$. These representations, denoted by D_I, are labelled by compositions $I = (i_1, \ldots, i_r)$ with no more than n parts (i.e. r-uple of positive integer, $r < n$), and the character $\chi(D_I)$ of D_I is the quasi-symmetric function $F_I(x_1, \ldots, x_n)$ of [6] (see [10]).

Let $X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ be a totally ordered set of commuting indeterminates, and let $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{P}_k(X)$) be the power set (resp. the set of k-elements subsets) of X. To a monomial $m = x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$, we associate its support $A \in \mathcal{P}(X)$, which is the set of variables occuring in m with a nonzero exponent, and the composition I constituted by the nonzero exponents, in their natural order. We set $m = A^I$. The quasi-symmetrizing action of a permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on m is defined by $\sigma m = (\sigma \cdot A)^I$, where $\sigma \cdot A$ is the usual action of $\mathfrak{S}(X)$ on $\mathcal{P}(X)$. This action is linearly extended to the ring of polynomials in X. Its invariants are exactly the quasi-symmetric polynomials denoted by $Qsym$. Next we define the quasi-symmetrizing divided differences

$$\pi_i f = \frac{x_i f - x_{i+1} \sigma_i f}{x_i - x_{i+1}} \quad , \quad \overline{\pi}_i\, f = \pi_i\, f - f.$$

These operators satisfy the braid relations. We can define $\pi_\sigma\, f = \pi_{i_1} \ldots \pi_{i_q} f$ where $\sigma = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_q}$ is a reduced decomposition of $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. They satifies also the relations $\pi_i^2 = \pi_i$ et $\overline{\pi}_i^2 = -\overline{\pi}_i$ so that they define representations of the 0-Hecke algebra of type A. If ω denote the longest element of $\mathfrak{S}_n$, the operator π_ω is a projector whose image is $Qsym$. Our first result is a Weyl-Demazure character formula for D_I

$$F_I = \pi_\omega\, X^I.$$

Moreover, the images of X^I by the partial symmetrizers π_σ are the characters of the Demazure modules $\mathcal{U}_0(b^+)v$, generated by the extremal weight vectors v of D_I (Théorème 3).

We define a quasi-symmetrizing action of the generic Hecke algebra $H_n(q)$ similar to those of [15, 17]:

$$T_i = (1-q)\, \overline{\pi}_i + q\, \sigma_i$$

defines an action of $H_n(q)$ on $\mathbb{Z}[X]$. The operator $\Box_\omega \in H_n(q)$ defined by

$$\Box_\omega = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_\sigma$$

has for range the space of quasi-symmetric polynomials with coefficients $\mathbb{Z}[q]$. Moreover, if one extends the scalars to $\mathbb{Q}(q)$, the operator $1/[n]_q!\, \Box_\omega$ is an idempotent (Théorème 2). We define quasi-symmetric Hall-Littlewood functions by the formula

$$G_I(x_1, \ldots, x_n; q) = \frac{1}{[p]_q!\ [n-p]_q!}\, \Box_\omega(X^I).$$

These elements are polynomials with coefficients in $\mathbb{Z}[q]$. they interpolate between the M_I (for $q=1$) and the F_I (for $q=0$).

Let J and $I=(i_1,\dots i_p)$ be two compositions, such that J can be written $(J_1,J_2,\dots,J_p)$ where J_l is a composition of i_l. This define an ordering called the refinment ordering denoted by $J\succeq I$. We set $\#(J,I)=(k_1,\dots,k_p)$ where k_l is the length of J_l. Then, the expansion of G_I of the basis (F_J) is given by formula (8).

The noncommutative Hall-Littlewood functions H_I are defined as the dual basis of (G_I). Their expression in terms of the ribbon Schur functions, corresponding to indecomposable projective modules of the 0-Hecke algebras, is given by formula (9), in which $t(I,J)$ is the major index of the composition conjugate to $\#(I,J)$.

Il a été montré récemment que la théorie des fonctions symétriques non-commutatives [5], et la théorie des fonctions quasi-symétriques [6] pouvaient s'interpréter en termes de représentations de diverses structures quantiques à $q=0$: les algèbres de Hecke de type A [4], les groupes linéaires quantiques de Dipper et Donkin [2], et une spécialisation de l'algèbre enveloppante quantique $U_{r,s}(gl_n)$ de Takeuchi [21, 10].

Les fonctions de Hall-Littlewood jouent un rôle important dans la théorie classique des fonctions symétriques. Elles interviennent dans le calcul des caractères des groupes linéaires finis $GL_n(\mathbb{F}_q)$ [7, 18], comme caractères gradués de l'action du groupe symétrique dans la cohomologie des variétés unipotentes [8], dans l'analyse des modèles intégrables de physique statistique et dans la théorie des représentations des algèbres affines quantiques [9, 20].

La définition des fonctions de Hall-Littlewood fait intervenir un q-analogue du symétriseur de Weyl qui, ainsi qu'il a été montré dans [3], admet une factorisation dans l'algèbre de Hecke, similaire à la formule des caractères de Demazure.

Dans cette Note, nous donnons une formule des caractères à la Demazure pour les modules irréductibles de l'algèbre enveloppante dégénérée $\mathcal{U}_0(gl_n)$ de [10]. Nous en déduisons une action de l'algèbre de Hecke générique sur $\mathbb{C}(q)[x_1,\dots,x_n]$, laquelle nous permet de définir des polynômes de Hall-Littlewood quasi-symétriques, analogues des P_λ, et par dualité, des analogues non-commutatives des Q'_λ. Nous décrivons ensuite leurs développements sur les bases naturelles de $Qsym$ et $\mathbf{Sym}$, correspondant respectivement aux modules simples et aux modules projectifs indécomposables des algèbres de Hecke $H_n(0)$.

Nos notations sont celles de [5, 6, 18]. Nous commencerons par introduire une action du groupe symétrique sur les polynômes admettant les polynômes quasi-symétriques comme invariants.

1. Action quasi-symétrisante

On appelle *composition de l'entier n* tout p-uplets d'entiers strictement positifs dont la somme fait n. Les entiers du p-uplet sont appelés parts de la composition, p est la longueur de la composition. On ordonne les compositions par l'ordre de raffinement : Par définition J est plus fine que $I=(i_1,\dots i_p)$ si J peut s'écrire $(J_1,J_2,\dots,J_p)$ où J_l est une composition de i_l. On note alors $I\succeq J$. La composition $(k_1,\dots,k_p)$ où k_l est la longueur de J_l est alors noté $\#(J,I)$.

Soit $X = \{x_1 < x_2 < \cdots x_n\}$ un ensemble d'indéterminées commutatives totalement ordonné. On note $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{P}_k(X)$) l'ensemble des parties (resp. des parties à k éléments) de X. Soit le monôme $m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ où les m_i sont éventuellement nuls. On lui associe d'une part son *support*, c'est à dire l'ensemble des x_i qui ont un exposant non nul et d'autre part la *composition des exposants* formée par les exposants non nuls, pris dans l'ordre des variables. Si A est une partie à p éléments de l'alphabet X, et si K est une composition de longueur p, on notera A^K le monôme associé. X^K désignera le monôme $x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}$. Par exemple dans $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$, le monome $x_1^3 x_3$ sera noté $\{x_1, x_3\}^{(3,1)}$ et $X^{(3,2)}$ désignera $x_1^3 x_2^2$.

On considère l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{P}(X)$ définie par $\sigma \cdot A = \{\sigma(x) \mid x \in A\}$. Notons σ_i la transposition élémentaire qui échange i et $i+1$. Soit $m = A^I$ un monôme. Nous définissons l'action quasi-symétrisante de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sur m par :

$$\sigma \odot m = \sigma \odot A^I = (\sigma \cdot A)^I. \tag{1}$$

Par exemple $\sigma_1 \odot x_1 x_2^3 = x_1 x_2^3$ et $\sigma_2 \odot x_1 x_2^3 = x_1 x_3^3$. Par linéarité, on étend cette action à $\mathbb{Z}[X]$. C'est une action fidèle.

Un polynôme f sera dit *quasi-symétrique* si pour toute composition $K = (k_1, \dots, k_p)$, les monômes $x_{i_1}^{k_1}, \dots, x_{i_p}^{k_p}$ ont un coefficient indépendant de $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ ou de manière équivalente si le coefficient de A^K est indépendant de $A \in \mathcal{P}_p(X)$. Les fonctions quasi-symétriques forment une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$ notée $Qsym$.

Deux bases particulières interviendront dant la suite : les quasi-monômes M_K et les polynômes quasi-ruban F_K définies par :

$$M_K = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} x_{i_1}^{k_1}, \dots, x_{i_p}^{k_p} \quad , \quad F_K = \sum_{J \succeq K} M_J.$$

L'ensemble des polynômes invariants par l'action définie plus haut est l'ensemble des polynômes quasi-symétriques. De plus, si K est une composition de longueur p on a la formule de symétrisation : $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \odot \{x_1, \dots, x_p\}^K = p!(n-p)! M_K$.

Dans toute la suite, sauf mention explicite, c'est toujours l'action quasi-symétrisante qui sera considérée, on notera donc $\sigma\, m$ au lieu de $\sigma \odot m$.

Nous allons maintenant définir les *différences divisées quasi-symétrisantes*. Le lecteur se reportera à [19] pour les propriétés des différences divisées classiques. Soient f un polynôme et $1 < i < n$. Les différences divisées isobares π_i et $\overline{\pi}_i$ agissent sur f selon les formules :

$$\pi_i\, f = \frac{x_i f - x_{i+1}\, \sigma_i\, f}{x_i - x_{i+1}} \quad , \quad \overline{\pi}_i\, f = \pi_i\, f - f. \tag{2}$$

On appelle algèbre de Hecke $H_n(q)$ l'algèbre engendrée par les T_i pour $1 < i < n-1$ avec les relations :

$$\begin{array}{rll} T^2 = (q-1)\, T_i + qId & & \text{for } 1 \leq i \leq n-1 \\ T_i\, T_j = T_j\, T_i & & \text{for } |i-j| > 1 \\ T_i\, T_{i+1}\, T_i = T_{i+1}\, T_i\, T_{i+1} & & \text{for } 1 \leq i \leq n-2 \end{array} \tag{3}$$

Les opérateurs π_i et $\overline{\pi}_i$ vérifient les relations de tresses avec respectivement $\pi_i^2 = \pi_i$ et $\overline{\pi}_i^2 = -\overline{\pi}_i$ et définissent donc des représentations de l'algèbre de Hecke $H_n(0)$. On peut donc définir $\pi_\sigma f = \pi_{i_1} \ldots \pi_{i_q} f$ où $\sigma = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_q}$ est une décomposition réduite arbitraire de la permutation σ. L'opérateur $\pi_\omega = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \overline{\pi}_\sigma$, où ω est la permutation maximale, est alors un projecteur dont l'image est exactement $Qsym$. Il permet de d'obtenir les fonctions quasi-rubans à partir des monômes :

$$\pi_\omega X^K = F_K, \tag{4}$$

ce qui constitue une formule des caractères de Weyl-Demazure pour l'algèbre dégénérée $\mathcal{U}_0(gl_n)$. Dans le cas classique l'image d'un monôme par le symétriseur de Weyl-Demazure est la fonction de Schur correspondante : $\pi_\omega X^\lambda = s_\lambda$ [19]. On peut généraliser cette action a une action de l'algèbre de Hecke générique analogue à celles de Lascoux-Schützenberger [15] et Lusztig [17] :

Théorème 1 *Les opérateur T_i definis par :*

$$T_i f = (1-q)\overline{\pi}_i f + q\sigma_i f \qquad i \in \{1, \ldots, n-1\} \tag{5}$$

vérifient les relations de tresse ainsi que la relation $T_i^2 = (q-1)T_i + qId$. Ils définissent donc une action de $H_n(q)$ sur $\mathbb{Z}[X]$.

Nous allons maintenant utiliser cette action pour définir un opérateur de q-quasi-symétrisation [3] :

Théorème 2 *L'opérateur $\Box_\omega$ de $H_n(q)$ défini par $\Box_\omega = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_\sigma$ a pour image l'espace des polynômes quasi-symétriques à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$.*

Posons $[n]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q$ où $[r]_q = (1-q^r)/(1-q)$. Si l'on prend les coefficients dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(q)$, l'opérateur $1/[n]_q! \, \Box_\omega$ est un idempotent dont l'image est l'espace des fonctions quasi-symétriques. A $q = 0$ cet idempotent n'est autre que le symétriseur de Weyl-Demazure π_ω.

2. Caractères de Demazure

D'après [4] on sait que les fonctions quasi-symétriques et non-commutatives décrivent la théorie des représentations des algèbres de Hecke $H_n(0)$. Dans [10], Krob et Thibon montrent comment les interpréter comme caractères d'une version dégénérée de l'algèbre enveloppante quantique $U_q(gl_n)$. Les fonctions quasi-symétriques apparaissent alors comme les caractères des modules polynomiaux de dimension finie sur l'algèbre $\mathcal{U}_0(gl_n)$ et les fonctions symétriques non-commutatives correspondent aux facteurs directs des puissances tensorielles de la représentation fondamentale. Les quasi-rubans F_I sont les caractères des modules irréductibles D_I, d'où l'interprétation de (4) comme une formule de caractères de Weyl.

L'algèbre $\mathcal{U}_0(gl_n)$ possède, comme la version standard de $U_q(gl_n)$, des générateurs de Chevalley (e_i), (f_i) et (k_i). Les bases du module irréductible D_K sont indexées par les mots "quasi-rubans" de forme K (*cf.* [11]). Par commodité nous identifierons le poids d'un vecteur de base avec l'image commutative du mot correspondant. On ordonne les vecteurs par l'ordre produit sur les mots de forme K, *i.e.* $u_1 \dots u_q \ll v_1 \dots v_q$ si et seulement si $u_i < v_i$ pour tout i. Cet ordre se lit sur les poids : $m \ll m'$ si et seulement si pour tout $i < n$ on a $\sum_{j \le i} m_j < \sum_{j \le i} m'_j$ avec $m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$.

Pour le module D_K, le plus haut poids est X^K. Les vecteurs de poids extrémaux sont alors les vecteurs de poids σX^K, l'action du groupe de Weyl étant l'action quasi-symétrisante. Les opérateurs π_σ s'interprètent alors comme des opérateurs de Demazure. Ils permettent de calculer les caractères des modules de Demazure de $\mathcal{U}_0(gl_n)$ [1] :

Théorème 3 *Soient K une composition et σ une permutation. Le module de Demazure $\mathcal{U}_0(b_+)v$ engendré par l'unique vecteur $v \in D_K$ de poids extrémal $\sigma(X^K)$ est égal à l'espace engendré par les vecteurs de poids inférieur ou égal à $\sigma(X^K)$. Son caractère (fonction génératrice des poids) est donné par*

$$\chi\left(\mathcal{U}_0(b_+)v\right) = \pi_\sigma(X^K) \tag{6}$$

Par exemple pour l'algèbre $\mathcal{U}_0(gl_4)$ le module $D_{(1,2)}$ est de dimension 9. Sa base est indexée par les mots : $a_2a_1a_2$, $a_2a_1a_3$, $a_3a_1a_3$, $a_3a_2a_3$, $a_3a_1a_4$, $a_3a_2a_4$, $a_4a_1a_4$, $a_4a_2a_4$, $a_4a_3a_4$, de poids respectifs : $x_1x_2^2$, $x_1x_2x_3$, $x_1x_3^2$, $x_2x_3^2$, $x_1x_3x_4$, $x_2x_3x_4$, $x_1x_4^2$, $x_2x_4^2$, $x_3x_4^2$. Les poids extrémaux sont $x_1x_2^2$, $x_1x_3^2$, $x_2x_3^2$, $x_1x_4^2$, $x_2x_4^2$, $x_3x_4^2$. Soit $\sigma = (1423)$. Le vecteur v de poids $x_1x_4^2 = \sigma \odot x_1x_2^2$ engendre un module de Demazure de dimension 5 dont le caractère est $\chi\left(\mathcal{U}_0(b_+)v\right) = \pi_\sigma\, x_1x_2^2 = x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_1x_3x_4 + x_1x_4^2$.

On peut définir un analogue des graphes cristallins appellé graphe quasi-cristallin, c'est en fait une partie d'un graphe cristallin [20].

3. Fonctions de Hall-Littlewood

Nous allons appliquer le formalisme précédent à la définition de fonctions de Hall-Littlewood quasi-symétriques et non-commutatives. Pour les propriétés des fonctions de Hall-Littlewood classiques, on pourra se reporter à [18]. Par analogie avec la méthode de [3, 14], nous définissons les fonctions de Hall-Littlewood quasi-symétriques par :

$$G_I(x_1, \dots, x_n; q) = \frac{1}{[p]_q!\ [n-p]_q!}\, \square_\omega(X^I). \tag{7}$$

Comme dans le cas classique, le facteur permet d'assurer la compatibilité avec l'adjonction d'une variable. Les fonctions $G_I(X; q)$ forment une base des fonctions quasi-symétriques à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$. Ces fonctions interpolent entre les fonctions quasi-monomiales pour $q = 1$, et les fonctions quasi-rubans pour $q = 0$.

Théorème 4 *Le développement G_I sur les fonctions quasi-rubans est donné par la formule*

$$G_I = \sum_{J \succeq I} (-1)^{\ell(J)-\ell(I)} q^{s(I,J)} F_J \tag{8}$$

où $s(I, J) = (k_1 - 1) + 2(k_2 - 1) + \cdots + p(k_p - 1)$ si $(k_1, \dots, k_p) = \#(J, I)$.

Comme dans le cas classique, la matrice de transition est unitriangulaire supérieure (*i.e.* 1 sur la diagonale et $M_{I,J} \neq 0$ si $I \succeq J$).

On peut alors définir les fonctions de Hall-Littlewood non commutatives par dualité. Les G_I forment une base des fonctions quasi-symétriques à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$. On appellera fonctions de Hall-Littlewood non commutatives les éléments H_I de la base duale. Les H_I sont donc les analogues des fonctions $Q'_\lambda = \sum_\lambda K_{\lambda\mu}(q) s_\lambda$, images des Q_λ par la substitution $p_i \mapsto p_i/(1-q^i)$.

Théorème 5 *Les analogues des polynômes de Kostka-Foulkes se réduisent à des monômes :*

$$H_J(A;q) = \sum_{J \succeq I} q^{t(I,J)} R_I, \tag{9}$$

avec $t(I,J) = \mathrm{Maj}(\#(I,J)\tilde{})$ *où* Maj *désigne l'indice majeur de Mac-Mahon d'une composition défini par* $\mathrm{Maj}(K) = \sum_{i=1\ldots m-1} (k_1 + \cdots + k_i) = \sum_{i \in \mathrm{Des}(K)} i$.

Ces fonctions semblent avoir de nombreuses propriétés en commun avec les fonctions de Hall-Littlewood classiques, l'indice majeur jouant ici le rôle de la charge [18]. On peut montrer par exemple qu'elles se factorisent quand q est une racine de l'unité [13]. On peut également calculer les constantes de structure de **Sym** dans la base (H_I).

Références

[1] **Demazure M., 1974**. Une formule des caractères, *Bull. Sc. Math.* , 98, p. 163-172.

[2] **Dipper R. et Donkin S., 1991**. Quantum GL_n, *Proc. London Math. Soc.*, 63, p. 165-211.

[3] **Duchamp G., Krob D., Lascoux A., Leclerc B., Scharf T., et Thibon J.-Y., 1995**. Euler-Poincaré characteristic and polynomial representations of Iwahori-Hecke algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 31 (1995), p. 179-201.

[4] **Duchamp G., Krob D., Leclerc B. et Thibon J.-Y., 1996**. Fonctions quasi-symétriques, fonctions symétriques non commutatives, et algèbres de Hecke à $q = 0$, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 322, p. 107-112.

[5] **Gelfand I.M., Krob D., Leclerc B., Lascoux A., Retakh V.-S. et Thibon J.-Y., 1995**. Noncommutative symmetric functions, *Adv. in Math.*, 112, p. 218-348.

[6] **Gessel I., 1984**. Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions, [in "Combinatorics and algebra", Greene C. Ed.], *Contemporary Mathematics*, 34, p. 289-301.

[7] **Green J.-A., 1955**. The characters of the finite general linear groups, *Trans. Am. Math. Soc.*, 80, p. 402-47.

[8] **Hotta R. et Springer T.-A., 1977**. A specialization theorem for certain Weyl group representations and application to the Green polynomials of unitary groups, *Inv. Math.*, 41, p. 113-27.

[9] **Kirillov A.-N. et Reshetikhin N.-Y., 1988**. Bethe Ansatz and the combinatorics of Young tableaux, *J. Sov. Math.* , 41, p. 925-955.

[10] **Krob D. et Thibon J.-Y, 1997**. A Crystalizable version of $U_q(\mathcal{G}l_n)$, *Proc. 9ème conf. "Formal power series and algebraic combinatorics"*, Krattenthaler C. Ed., Vienne.

[11] **Krob D. et Thibon J.-Y., 1997**. Noncommutative symmetric functions IV : Quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$, *J. Alg. Comb.* (à paraître).

[12] **Krob D. et Thibon J.-Y, 1996**. Noncommutative symmetric functions V: A degenerate version of $U_q(gl_N)$, *Int J. of Alg. and Comp.*, (à paraître).

[13] **Lascoux A., Leclerc B. et Thibon J.-Y., 1994**. Green polynomials and Hall-Littlewood functions at roots of unity, *Europ. J. Combinatorics*, 15, p. 173-180.

[14] **Lascoux A., Leclerc B. et Thibon J.-Y., 1997**. Ribbon tableaux, Hall-Littlewood functions, quantum affine algebras, and unipotent varieties, *J. Math. Phys.*, 38(2), p. 1041-1068.

[15] **Lascoux A. et Schützenberger M.-P., 1983**. Symmetry and flags manifolds, *Invariant Theory Springer L.N.*, 996, P. 118-144.

[16] **Littlewood D.-E., 1961**. On certain symmetric functions, *Proc. London Math. Soc.*, 43, p. 485-498.

[17] **Lusztig G., 1985**. Equivariant K-theory and representations of Hecke algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 94, p. 337-342.

[18] **Macdonald I.G., 1995**. Symmetric functions and Hall polynomials, C *Clarendon Press.*

[19] **Macdonald I.G., 1991**. Notes on Schubert Polynomials, *Publications du LACIM*, UQAM, Montréal.

[20] **Nakayashiki A. et Yamada Y.**. Kostka polynomials and energy fonctions in solvable lattice models, *prépublication*, `q-alg/9512027`.

[21] **Takeuchi M., 1990**. A two-parameter quantization of $GL(n)$, *Proc. Japan Acad.*, 66, Ser. A, p. 112-114.