C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–??, 2001 – PXMA????.TEX –
Combinatoire/*Combinatorics*
(Algèbre/*Algebra*)

Sur quelques propriétés de l'algèbre des arbres binaires

Florent HIVERT [a], Jean-Christophe NOVELLI [b], Jean-Yves THIBON [c]

[a] **Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée, 77454 Marne-la-Vallée cedex**
Courriel : hivert@univ-mlv.fr
[b] **Laboratoire Franco-Russe de Mathématiques, Université Indépendante de Moscou, 11, Bolchaya Vlassevsky per., 121002, Moscou. Courriel : novelli@mccme.ru**
[c] **Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée, 77454 Marne-la-Vallée cedex**
Courriel : jyt@univ-mlv.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous montrons qu'il existe au moins une tour d'algèbres dont la théorie des représentations est décrite par l'algèbre des arbres binaires de Loday-Ronco.

On some properties of the algebra of planar binary trees

Abstract. *We prove that there exists at least one tower of algebras whose representation theory is taken into account by the algebra of planar binary trees of Loday-Ronco.*

Dans une note précédente [4], nous avons attiré l'attention sur la similitude entre l'alggèbre des arbres binaires de Loday-Ronco $\mathbf{PBT}$, les fonctions symétriques libres $\mathbf{FSym}$ et les fonctions symétriques non commutatives $\mathbf{Sym}$. D'après [4], $\mathbf{PBT}$ peut s'identifier à la sous-algèbre de $\mathbf{FQSym}$ engendrée par les polynômes

$$\mathbf{P}_T = \sum_{\mathcal{P}(\sigma)=T} \mathbf{F}_\sigma \, . \tag{1}$$

Cette définition est en tout point semblable à celle des fonctions de Schur rubans non commutatives R_I [5], qui peut s'écrire

$$R_I = \sum_{P(\sigma)=T} \mathbf{F}_\sigma \, . \tag{2}$$

où $P(\sigma)$ est le P-symbole hypoplaxique de σ, un quasi-ruban étant ici identifié à une composition.

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

Rappelons que $\mathbf{FQSym}$ est naturellement munie d'un produit scalaire [1, 2, 3] défini $\langle \mathbf{F}_\sigma, \mathbf{G}_\tau \rangle = \delta_{\sigma\tau}$, et que les entiers

$$c_{IJ} = \langle R_I, R_J \rangle \quad |I| = |J| = n$$

s'interprètent comme les invariants de Cartan de la 0-algèbre de Hecke $H_n(0)$: le coefficient c_{IJ} est égal à la multiplicité du module simple S_I dans le module projectif indécomposable P_J.

La similitude entre les définitions des équations (1) et (2) conduit à s'interroger sur la possibilité d'une interprétation analogue des entiers

$$c_{TU} = \langle \mathbf{P}_T, \mathbf{P}_U \rangle = \sum_{\mathcal{P}(\sigma)=T;\mathcal{P}(\sigma^{-1})=U} 1.$$

Cela revient à supposer l'existence d'une tour d'algèbres sur $\mathbb{C}$: $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ avec $\dim_{\mathbb{C}}(A_n) = n!$, dont les modules simples S_T (et donc aussi les modules projectifs indécomposables P_T) seraient indexés par les arbres binaires planaires à n sommets. Pour que l'analogie soit complète, il faudrait aussi disposer de plongements naturels $A_p \otimes A_q \hookrightarrow A_{p+q}$ et d'identifications de $\mathbf{PBT}$ aux sommes directes de groupes de Grothendieck

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{n\geq 0} G_0(A_n)\,, \quad \mathcal{K} = \bigoplus_{n\geq 0} K_0(A_n)$$

telles que le produit de $\mathbf{PBT} = \mathbf{PBT}^*$ exprimé dans des bases appropriées corresponde à l'induction de $A_p \otimes A_q$ à A_{p+q}.

Soit $M^{(n)}$ la matrice des c_{TU}. Le calcul de la seule matrice $M^{(3)}$ suffit à se convaincre qu'elle ne peut pas être directement une matrice d'invariants de Cartan car elle a un zéro sur la diagonale. En effet, si l'on suppose que $\langle \mathbf{P}_T, \mathbf{P}_U \rangle = \dim \hom_{A_n}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_U)$, ou de façon équivalente, si l'on suppose que les modules simples sont indexés de manière à ce que $S_T = P_T/\text{Rad}\, P_T$, on a automatiquement au moins 1 sur la diagonale puisque $\hom_{A_n}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_T)$ contient au moins l'application identité.

Toutefois, les matrices $M^{(n)}$ présentent une structure de blocs intéressante. Ceci nous conduira à nous demander s'il n'existe pas une transformation simple conduisant à une suite de matrices ayant les propriétés voulues.

Commençons par la structure de blocs. Soit T un arbre binaire. On note σ_T le *mot canonique* de T, défini comme le plus grand élément pour l'ordre lexicographique de la classe sylvestre de T. On appelle *squelette* de T le couple d'entiers (k, l) défini par

– le plus grand entier $k \leq n-1$ tel que $\sigma_T(n) = n, \ldots, \sigma_T(n-k+1) = n-k+1$,
– le nombre l de saillances de σ_T une fois retirés ces points fixes. Rappelons que i est une saillance pour σ si $\sigma(i) > \sigma(j)$ pour tout $j > i$.

Le squelette d'une classe sylvestre peut se définir purement géométriquement sur un arbre T comme la composante de T formée de la succession de fils droits la plus haute et des sommets se trouvant au-dessus de ceux-ci, les deux nombres se lisant comme suit. La figure 1 montre le squelette de la classe de $\sigma = (8, 9, 7, 5, 4, 6, 1, 2, 3, 10, 11)$. Le nombre de points fixes à la fin de σ (ici, 2) correspond à la taille de la branche gauche moins un, et le nombre de saillances (ici, 4) correspond à la taille de sa branche droite.

Nous pouvons maintenant présenter la structure de blocs de $M^{(n)}$. On dit que deux arbres T et U sont dans le même bloc s'il existe une puissance de $M^{(n)}$ dans laquelle le coefficient (T, U) est non nul (cette relation est symétrique car $M^{(n)}$ l'est, par définition).

THÉORÈME 1. – *Deux arbres sont dans le même bloc si et seulement s'ils ont même nombre de sommets et même squelette.*

THÉORÈME 2. – *Soit ν l'involution sur les arbres définie par $\nu(T) = T'$, où $T' = \mathcal{P}(\sigma_T^{-1})$. Alors*
– *l'involution ν préserve les blocs (T et $\nu(T)$ ont même squelette),*

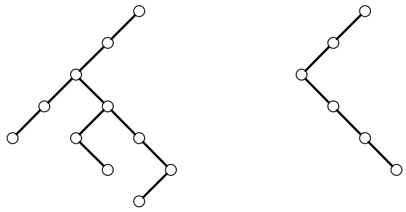

FIG. 1 – Un arbre et son squelette.

– *la matrice* $C^{(n)}$ *définie par*

$$C^{(n)}(T,U) = \langle\, \mathbf{P}_{\nu(T)}, \mathbf{P}_U \,\rangle$$

est unitriangulaire inférieure si on ordonne les arbres, d'abord par squelettes puis à l'intérieur d'un même squelette par l'ordre lexicographique inverse sur leurs mots canoniques lus de droite à gauche.

Nous avons représenté figure 2 les premières matrices $C^{(n)}$ en omettant les zéros pour faciliter la lecture. On en déduit alors une nouvelle fois que $\mathbf{PBT}$ est auto-duale. En effet, pour tout n,

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&&&&& \\ && 1 & 1 &&&&&&&&&& \\ &&&& 1 &&&&&&&&& \\ &&&&& 1 &&&&&&&& \\ &&&&&& 1 &&&&&&& \\ &&&&& 1 & 1 & 1 &&&&&& \\ &&&&& 1 && 1 & 1 &&&&& \\ &&&&&& 1 & 1 && 1 &&&& \\ &&&&&&&&&& 1 &&& \\ &&&&&&&&&& 1 & 1 && \\ &&&&&&&&&& 1 & 1 & 1 & \\ &&&&&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 2 – Les matrices $C^{(n)}$ pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

$$\det M^{(n)} = \varepsilon_n(\nu) \det C^{(n)} \neq 0,$$

où $\varepsilon_n(\nu)$ est la signature de la pemutation de l'ensemble des arbres binaires à n sommets induite par ν. Donc, la restriction du produit scalaire $\langle\, , \,\rangle$ de $\mathbf{FQSym}$ à la sous-algèbre de Hopf $\mathbf{PBT}$ est non dégénérée. Comme $\mathbf{FQSym}$ est auto-duale, $\mathbf{PBT}$ l'est aussi.

Étudions maintenant d'un peu plus près les blocs de la matrice ainsi obtenue. Nous appellerons *triangle de Catalan* la matrice triangulaire comptant le nombre d'arbres binaires par taille (ligne) et longueur de la chaîne de fils droits partant de la racine (colonne), et *triangle de Stirling* (de première espèce) la matrice triangulaire comptant le nombre de permutations par longueur (ligne) et par nombre de saillances. On représente ici les deux triangles où l'on a retiré les arbres n'ayant pas de fils droit à la racine et les permutations n'ayant qu'une seule saillance.

THÉORÈME 3. – *Considérons un bloc de squelette* (k,l) *de la matrice* $C^{(n)}$ *pour un entier* n *donné.*

– *Le nombre* $m_n(k,l)$ *de lignes de ce bloc est donné par le* $(l-1)$*-ieme nombre (ou premier si* $l = 1$*) de la* $(n-k)$*-ieme ligne du tableau de Catalan.*

– *La somme* $d_n(k,l)$ *des éléments de ce bloc est donnée par le* $(l-1)$*-ieme nombre (ou premier si* $l = 1$*) de la* $(n-k)$*-ieme ligne du tableau de Stirling.*

Nous pouvons maintenant présenter quelques résultats sur l'algèbre A_n dont la matrice des invariants de Cartan serait la matrice $C^{(n)}$. Tout d'abord, comme cette matrice est unitriangulaire inférieure, il est

1							1						
	1							1					
	2	1						3	1				
	5	3	1					11	6	1			
	14	9	4	1				50	35	10	1		
	42	28	14	6	1			274	225	85	15	1	
	132	90	48	20	6	1		1764	1624	735	175	21	1

FIG. 3 – Les triangles modifiés de Catalan et des nombres de Stirling de première espèce.

toujours possible de construire une algèbre dont les modules projectifs ont les suites de compositions prescrites par cette matrice en quotientant l'algèbre des chemins d'un carquois orienté (qui se trouve être ici acyclique) où l'on place c_{TU} flèches de T vers U et où tous les chemins de longueur ≥ 2 sont nuls. On peut donc déjà énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 4. – *Il existe une tour d'algebres imbriquées dont $C^{(n)}$ est la matrice de Cartan.*

Si (A_n) est une tour d'algèbres vérifiant les conditions requises, les squelettes (k, l) correspondent effectivement aux blocs (au sens de sous algèbres indécomposables) $B_n(k, l)$ de A_n. Alors, $d_n(k, l)$ est la dimension de $B_n(k, l)$, et $m_n(k, l)$ le nombre de ses modules simples.

Remarquons qu'il existe a priori plusieurs tours d'algèbres non isomorphes dont $C^{(n)}$ est la matrice de Cartan. Nous avons décrit plus haut la plus simple d'entre elles mais aussi probablement la moins intéressante. Nous avons calculé les carquois correspondant à chaque bloc de la matrice pour $n \leq 6$ en mettant le moins de flèches possibles (donc le moins de relations). La structure des carquois et de leurs relations semble posséder une certaine régularité mais elle reste malheureusement insuffisamment comprise pour nous permettre de décrire ces algèbres pour tout n.

Références bibliographiques

[1] G. Duchamp, F. Hivert, J.-Y. Thibon, Une généralisation des fonctions quasi-symétriques et des fonctions symétriques non commutatives, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), no. 12, 1113–1116.

[2] G. Duchamp, F. Hivert, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions VI: free quasi-symmetric functions and related algebras, Internat. J. Alg. Comput. (à paraître).

[3] G. Duchamp, F. Hivert, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions VII (en préparation).

[4] F. Hivert, J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon, Un analogue du monoïde plaxique pour les arbres binaires de recherche, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. 332, 2002, no. ??, ????-????

[5] D. Krob, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions IV: Quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$, J. Algebraic Combin. 6 (1997), no. 4, 339–376.

[6] J.-L. Loday, M.O. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, Adv. Math. 139 (1998), no. 2, 293–309.

[7] J.-L. Loday, M.O. Ronco, Order structure on the algebra of permutations and of planar binary trees, J. Algebraic Combin. 15 (2002), no. 3, 253-270.