THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE

INSTITUT GASPARD MONGE

Par Florent Hivert

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE FONDAMENTALE

SUR LE SUJET

Combinatoire des fonctions quasi-symétriques

COMPOSITION DU JURY :

D. Krob,	rapporteur
C. Reutenauer,	rapporteur
J.-Y. Thibon,	directeur de thèse
D. Arquès,	
J.-P. Gazeau,	
E. Vasserot,	
A. Zvonkine,	examinateurs.

Il y a trois sortes de gens dans le monde :

ceux qui savent compter,
et ceux qui ne savent pas.

À tous ceux qui essayent d'apprendre...

Remerciement

Je tiens tout d'abord à exprimer mes premiers remerciements à Jean-Yves Thibon pour m'avoir encadré et soutenu pendant tout ce travail. Je le remercie non seulement pour sa patience et sa très grande disponibilité, mais également pour la manière dont il a su me communiquer son point de vue sur la combinatoire, à mis chemin entre l'informatique, les mathématiques et la physique. Que ces quelques lignes expriment toute la gratitude que je lui porte.

Je veux ensuite remercier Daniel Krob, tout d'abord pour avoir accepter de rapporter ce travail, mais surtout pour son accueil chaleureux lors de mes premiers contacts avec la combinatoire, c'est sous son regard attentif que j'ai commencé ce travail. Qu'il soit remercié pour toute l'aide qu'il a pu m'apporter par la suite.

Je remercie Christophe Reutenauer d'avoir accepter d'être rapporteur de ma thèse. Je voudrais témoigner ici de tout l'intérêt que je porte à ses travaux.

Je remercie chaleureusement Alexandre Zvonkine pour avoir accepté de présider mon jury. Je suis très honoré que Didier Arquès, Jean Pierre Gazeau et Eric Vasserot aient acceptés de faire parti de mon jury. Le fait que des chercheurs d'horizon aussi divers puissent être réunis dans un même jury témoigne pour moi du rôle de la combinatoire dans la recherche scientifique.

Je tiens à remercier ici tous les membres du phalanstère de combinatoire algébrique. Je remercie en particulier Gerard Duchamp, Alain Lascoux et Bernard Leclerc pour les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec eux. Je tiens à remercier Chan Ung et Frederic Toumazet pour leur aide ainsi que pour toutes les heures passées en leur compagnie.

Je remercie enfin pour leur soutient mes parents et mes camarades de l'École Normale, de Marne-la-Vallée de Jussieu et d'ailleurs. Je remercie particulièrement Jean-Christophe Novelli et Nicolas Thiéry pour leur amitié et leur patience.

Résumé

Nous introduisons de nouvelles actions du groupe symétrique et de son algèbre de Hecke sur les polynômes, pour lesquelles les invariants sont les polynômes quasi-symétriques. Nous interprétons cette construction en termes de caractères de Demazure d'un groupe quantique dégénéré. Nous utilisons l'action de l'algèbre de Hecke générique pour définir des analogues quasi-symétriques et non commutatifs des fonctions de Hall-Littlewood. Nous montrons que ces fonctions généralisées ont un certain nombre de propriétés communes avec les fonctions classiques.

Dans un deuxième temps, nous construisons une généralisation des fonctions quasi-symétriques appelée fonctions quasi-symétriques matricielles. Ceci peut être vue comme une généralisation de l'algèbre de convolution des permutations de Malvenuto-Reutenauer.

Enfin nous étudions un analogue du monoïde plaxique appelé monoïde Chinois. Nous définissons un objet combinatoire qui joue le rôle des tableaux de Young pour ce monoïde, et en particulier, nous donnons un analogue de la correspondance de Robinson-Schensted.

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Introduction

Fonctions symétriques

Les fonctions symétriques forment un objet central de la combinatoire algébrique. Leur première utilisation systématique dans des problèmes d'énumérations remonte à MacMahon [64]. Les fonctions symétriques interviennent en particulier comme séries génératrices de permutations soumises à certaines contraintes (voir Foulkes [20], Gessel [24] et Gessel-Reutenauer [25]). Leur théorie s'est considérablement enrichie des liens avec la théorie des groupes découverts par Frobenius et Schur, puis mis en valeur par Littlewood [55, 56].

Dans le cadre de la théorie des représentations des groupes, le rôle principal est tenu par une base particulière appelée fonctions de Schur. Ces fonctions ont tout d'abord été définies par Jacobi [32] comme quotient de deux alternants :

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma)\,\sigma(x^{\lambda+\delta})}{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma)\,\sigma(x^{\delta})}. \tag{1.1}$$

Leur nom provient du fait que Schur lui même a mis en évidence leur interprétation comme caractères des représentations polynomiales irréductibles des groupes linéaires [75].

Parallèlement à l'étude des fonctions de Schur sont apparus des objets combinatoires complexes et extrêmement intéressants : les tableaux de Young qui interviennent dans de nombreux calculs de fonctions symétriques [86]. Ils permettent de donner une définition purement combinatoire des fonctions de Schur : la fonction de Schur s_λ est égale à la somme des poids des tableaux de Young de forme λ.

$$s_\lambda = \sum_{T\in\mathrm{Tab}(\lambda)} x^T. \tag{1.2}$$

Cette définition par tableaux a permis de résoudre de nombreux problèmes. En particulier, elle permet de mieux comprendre la règle de Littlewood-Richardson qui donne la décomposition du produit de deux fonctions de Schur.

Ce point de vue est la conséquence de plusieurs travaux dont l'idée de départ est dû à Robinson et indépendamment à Schensted : Pour calculer la longueur maximale d'une sous-suite croissante d'une suite d'entiers, Schensted [74] a donné un algorithme qui calcule un tableau à partir d'un mot. C'est la correspondance de Robinson-Schensted. Knuth a alors remarqué que deux mots donnaient le même tableau s'ils étaient congrus par certaines réécritures élémentaires [38]. Ainsi en prenant le quotient du monoïde libre par les relations de Knuth, on obtient un monoïde que Lascoux et Schützenberger ont appelé monoïde plaxique [49]. Les tableaux forment une section de ce monoïde, c'est-à-dire qu'il y a un tableau et un seul dans chaque classe d'équivalence sous les relations de Knuth. L'algèbre des fonctions symétriques apparaît alors comme une sous-algèbre commutative de l'algèbre de ce monoïde. Par ce biais, le monoïde plaxique explique un bon nombre de propriétés des fonctions symétriques et des tableaux.

La combinatoire aussi bien que la théorie des groupes se sont rendus compte que l'on comprend mieux un problème après avoir introduit un paramètre supplémentaire. En combinatoire on parle de q-analogues, en théorie des groupes on parle de groupes quantiques.

Les fonctions de Schur admettent des q-analogues particulièrement intéressants : les fonctions de Hall-Littlewood. Elles ont été introduites en 1961 par D. E. Littlewood comme une réalisation concrète d'une algèbre définie par P. Hall dans une note non publiée sur la théorie des groupes abéliens (voir [28]). L'algèbre de Hall est engendrée par les classes de p-groupes abéliens finis, pour un entier premier p fixé. Une classe d'isomorphisme est codée par une partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ qui note les exposants dans la décomposition :

$$G_\lambda \approx \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/p^{\lambda_i}\mathbb{Z}). \tag{1.3}$$

On appelle λ le type du groupe G_λ. Soit u_λ la classe d'isomorphisme de G_λ. La structure multiplicative de l'algèbre de Hall est définie par

$$u_\alpha u_\beta = \sum_\lambda g^\lambda_{\alpha\beta} u_\lambda, \tag{1.4}$$

où $g^\lambda_{\alpha\beta}$ est le nombre de sous-groupes H de G_λ de type α et tels que le quotient G_λ/H soit de type β. Hall a montré que ces nombres sont en fait donnés par des polynômes en p, que l'on appelle polynômes de Hall. (En fait, l'algèbre de Hall avait déjà été découverte par Steinitz [80], *cf.* [33]).

Un p-groupe abélien fini peut être vu comme un module fini sur l'anneau de valuation discrète $\mathbb{Z}_p$ (entiers p-adiques) et on peut faire la même construction pour l'anneau $\mathbb{K}[[t]]$ où $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ est un corps fini à q éléments. Les constantes de structures $g^\lambda_{\alpha\beta}$ sont données par les mêmes polynômes en q. Cette version de l'algèbre de Hall a été utilisée par J. A. Green en 1955 pour déterminer la table des caractères des groupes linéaires finis $GL(n, \mathbb{F}_q)$ [26].

On savait que l'algèbre de Hall était isomorphe à l'algèbre des fonctions symétriques, mais on ne connaissait pas de bases de fonctions symétriques avec $g^\lambda_{\alpha\beta}$ pour constantes de structures. Or, on a besoin d'une telle base pour développer un algorithme pratique pour calculer les tables de caractères. Ce problème a été résolu par Littlewood : il a défini les fonctions symétriques

$$P_\mu(x_1, \dots, x_n; q) = \frac{1}{\prod_{i>0}[m_i]_q!} \; \frac{1}{a_\delta} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{Sgn}(\sigma)\, \sigma \left(x^\mu \prod_{i<j} x_i - q x_j \right) \tag{1.5}$$

où m_i est la multiplicité de i dans la partition μ. Il a alors montré que

$$u_\lambda = q^{-n(\lambda)} P_\lambda(x; q^{-1}) \tag{1.6}$$

donne une réalisation de l'algèbre de Hall (ici $n(\lambda) = \sum_{i>0}(i-1)\lambda_i$). De plus, il a observé que par la spécialisation $q = -1$, les fonctions P_μ se réduisaient à une classe de fonctions symétriques introduites par Schur en 1911 comme fonctions génératrices des caractères spinoriels du groupe symétrique [75].

Les fonctions de Hall-Littlewood peuvent être définies, comme dans [62], en orthogonalisant la base des fonctions monomiales par rapport à un produit scalaire déformé. D'autres déformations avec deux paramètres ou plus donnent les fonctions symétriques de Macdonald et de Kerov. Soit $\{Q_\mu\}$ la base duale de P_μ pour le produit scalaire déformé. Comme P_μ est orthogonale, Q_μ est proportionnel à P_μ. Il est plus intéressant de regarder la base duale $\{Q'_\mu\}$ de $\{P_\mu\}$ pour le produit scalaire ordinaire qui rend les fonctions de Schur orthonormées. La fonction Q'_μ est un q-analogue du produit h_μ de fonctions symétriques homogènes, et les coefficients $K_{\lambda\mu}(q)$ du développement

$$Q'_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda\mu}(q) s_\lambda \tag{1.7}$$

sont des q-analogues des nombres de Kostka $K_{\lambda\mu}$.

H. O. Foulkes a conjecturé en 1974 [20] que les $K_{\lambda\mu}(q)$ étaient des polynômes à coefficients entiers positifs. Cette conjecture a été prouvée en 1978 par A. Lascoux et M. P. Schützenberger [49], qui ont introduit une statistique appelée *charge* sur l'ensemble $\mathrm{Tab}(\lambda,\mu)$ des tableaux de Young de forme λ et de poids μ. Ils ont montré que

$$K_{\lambda\mu}(q) = \sum_{t\in\mathrm{Tab}(\lambda,\mu)} q^{\mathrm{charge}(t)}. \tag{1.8}$$

Cette statistique a d'importantes applications en mécanique statistique, où elle apparaît comme l'énergie de certaines quasi-particules dans l'approche par le Bethe Ansatz des chaînes de spins quantiques [35] ou dans l'approche par les matrices de transfert par coins des modèles résolubles sur réseau [67].

Les polynômes réciproques $\tilde{K}_{\lambda\mu}(q) = q^{n(\mu)}K_{\lambda\mu}(q^{-1})$ sont les valeurs des caractères unipotents de $GL(n,\mathbb{F}_q)$ sur les classes unipotentes [79, 58], et leurs fonctions génératrices $\tilde{Q}'_\mu = \sum \tilde{K}_{\lambda\mu}(q)s_\lambda$ sont les caractéristiques graduées des représentations de Springer du groupe symétrique dans la cohomologie des variétés unipotentes [31]. Ils décrivent aussi certain espaces de polynômes harmoniques [43] et il en existe un analogue à deux paramètres [22].

Enfin les fonctions Q'_μ ont d'intéressantes spécialisations aux racines de l'unité [44, 45, 62] qui apparaissent comme étant reliées aux représentations des algèbres affines quantiques [48, 53] et de la q-algèbre de Virasoro [4].

La place des fonctions symétriques à l'intérieur de l'anneau des polynômes se comprend bien à l'aide des différences divisées. Il s'agit d'opérateurs qui apparaissent pour la première fois dans les travaux de Newton sur l'interpolation. Elles sont réapparues simultanément dans les travaux de Bernstein-Gelfand-Gelfand [2] et de Demazure [11, 12]. Leur intérêt est multiple. Tout d'abord elles définissent une réalisation de l'algèbre de Hecke dégénérée comme algèbre d'opérateurs agissant sur les polynômes. On a ainsi un outil pratique pour calculer dans l'algèbre de Hecke. De plus elles permettent de bien décrire la structure de l'anneau des polynômes considéré comme un module sur les fonctions symétriques. C'est la théorie des polynômes de Schubert [50, 52, 63].

D'autre part, le symétriseur de Jacobi qui apparaît dans la définition des fonctions de Schur se factorise dans l'algèbre de Hecke. Ces dernières apparaissent donc comme les images des monômes dominants sous l'action du symétriseur total. Rappelons qu'elles sont les caractères des représentations irréductibles du groupe linéaire. Les symétriseurs partiels donnent alors les caractères des modules de Demazure [12]. Ce sont des modules sur le sous groupe de GL_N formé par les matrices triangulaires supérieures.

Enfin, dans [18], les auteurs ont observé que la définition de Littlewood (1.5) peut s'interpréter en termes d'une action de l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ sur $\mathbb{C}(q)[x_1,\ldots,x_n]$ (voir aussi section 5). Cette action est obtenue en remontant à $H_n(q)$ l'action de l'algèbre de Hecke dégénérée $H_n(0)$ définie au moyen des différences divisées. Le q-symétriseur de Littlewood apparaît alors comme l'élément de Yang-Baxter associé à la permutation maximale [85].

Fonctions quasi-symétriques et fonctions symétriques non-commutatives

Tout ceci montre que les fonctions symétriques ont une combinatoire extrêmement riche. Elles admettent d'autre part un certain nombre de généralisations dont l'une – les fonctions quasi-symétriques – est l'objet central de cette thèse.

Pour étudier les permutations avec un ensemble de descentes fixé, Gessel a introduit une première généralisation des fonctions symétriques, les fonctions quasi-symétriques [24] qui sont des fonctions partiellement symétriques. En particulier, il a défini des fonctions F_I, qui sont les fonctions caractéristiques des permutations dont l'ensemble de descentes est codé par la composition I. Leur rôle a été expliqué par Malvenuto et Reutenauer [66] qui ont montré que l'algèbre des fonctions quasi-symétriques est en dualité avec la somme directe des algèbres de descentes de Solomon [77].

De leur coté, en partant de la notion de quasi-déterminant, Gelfand, Krob, Leclerc, Lascoux, Retakh et Thibon ont introduit une autre généralisation des fonctions symétriques, les fonctions symétriques non commutatives [23]. Ce sont les éléments d'une algèbre non commutative dont l'image commutative est l'algèbre des fonctions symétriques usuelles. Il est apparu que l'algèbre des fonctions symétriques non commutatives pouvait elle même s'identifier à la somme directe des algèbres de descentes de tous les groupes symétriques.

Les liens entre ces nouvelles constructions et les fonctions symétriques classiques sont en fait très profonds : ils ne se limitent pas au niveau formel, mais il est également possible d'en donner des interprétations abstraites, en particulier en théorie des représentations.

La première interprétation des fonctions quasi-symétriques et des fonctions symétriques non-commutatives vient de l'étude de l'algèbre de Hecke dégénérée. L'étude des représentations de cette dernière a été menée par Norton [68] et Carter [5]. L'analogue de la caractéristique de Frobenius a été trouvé par Krob et Thibon. L'algèbre de Hecke n'étant pas semi-simple, il est difficile de classifier toutes ses représentations. La méthode standard est alors de considérer d'une part l'anneau de Grothendieck engendré par les irréductibles et d'autre part celui engendré par les indécomposables projectifs. Krob et Thibon ont montré qu'ils étaient respectivement isomorphes aux anneaux des fonctions quasi-symétriques et des fonctions symétriques non-commutatives [40].

La deuxième interprétation vient d'un analogue de la dualité de Schur-Weyl. Le groupe linéaire est remplacé par une spécialisation $q = 0$ d'une algèbre quantique [42, 41]. C'est essentiellement une spécialisation particulière du groupe quantique à deux paramètres de Takeuchi. Krob et Thibon ont alors montré que l'algèbre des fonctions quasi-symétriques était isomorphe à l'anneau des modules polynomiaux identifiés à suite de composition près. En particulier, les fonctions quasi-symétriques fondamentales de Gessel F_I sont les caractères des modules irréductibles polynomiaux, elles jouent donc le rôle des fonctions de Schur. Par dualité, les fonctions symétriques non-commutatives sont les caractères des modules projectifs, les fonctions de Schur ruban R_I apparaissent alors comme les caractères des modules projectifs indécomposables.

Plan de la thèse

Comme nous l'avons vu, les fonctions quasi-symétriques forment une généralisation intéressante des fonctions symétriques. Dans ce travail, nous avons cherché à transporter aux fonctions quasi-symétriques les constructions classiques des fonctions symétriques.

Après avoir rappelé, au chapitre 2, les préliminaires combinatoires et algébriques, nous commençons au chapitre 3 par définir une nouvelle action du groupe symétrique sur les polynômes appelée action quasi-symétrisante dont les invariants sont exactement les polynômes quasi-symétriques (section 3.1). Dans un deuxième temps, nous construisons un analogue quasi-symétrisant des différences divisées. Nous obtenons ainsi une action de l'algèbre de Hecke dégénérée sur les polynômes (section 3.2), que nous remontons à l'algèbre de Hecke générique $H_n(q)$ (section 3.3). Cela nous permet de définir une version quasi symétrisante du symétriseur de Weyl ainsi que son q-analogue de Yang-Baxter (sous-section 3.3.2) . Nous terminons ce chapitre par l'étude d'une certaine classe d'actions du groupe symétrique sur l'anneau des polynômes. Ces dernières ont pour invariants une hiérarchie infinie d'algèbre de fonctions partiellement symétriques dont le niveau 1 est l'algèbre des fonctions quasi-symétriques et le niveau infini, les fonctions symétriques usuelles.

Le chapitre 4 est consacré aux interprétations de cette construction dans la théorie des représentations de l'algèbre enveloppante quantique $\mathcal{U}_0(gl_N)$. Nous montrons que l'action quasi-symétrisante peut être vue comme l'action du groupe de Weyl. Les formules de symétrisation de l'algèbre de Hecke dégénérée s'interprètent alors comme les formules des caractères de Weyl et Demazure pour cette algèbre (théorème 4.4 et 4.12).

Le chapitre 5 est une autre application des actions quasi-symétrisantes.

Nous utilisons le q-analogue du symétriseur de Weyl obtenu sous-section 3.3.2 pour définir une notion de fonctions de Hall-Littlewood quasi-symétriques G_I analogue à (1.5), (voir section 5). Par dualité, nous obtenons des fonctions de Hall-Littlewood non commutatives H_I analogues aux Q'_μ (section 5.2). Nous étudions quelques propriétés de ces fonctions de Hall-Littlewood généralisées, en particulier, nous donnons des développements explicites sur les bases de Schur généralisées ainsi que les constantes de structures (théorèmes 5.6, 5.13 et 5.15). Cela nous permet de montrer que les H_I se comportent comme les Q'_μ par la spécialisation de q à une racine de l'unité (corollaire 5.19).

On pouvait espérer une telle propriété en comparant les résultats de [44, 45] dans le cas commutatif et l'analyse de l'idempotent de Klyachko présentée dans [23]. Ainsi la fonction symétrique non commutative

$$K_n(q) = \sum_{|I|=n} q^{\mathrm{Maj}(I)} R_I \tag{1.9}$$

a pour image commutative la fonction de Hall-Littlewood $\tilde{Q}'_{(1^n)}$, dont la spécialisation $q = e^{2\pi i/n}$ est la somme de puissance p_n. Vue comme un élément de l'algèbre des descentes, elle devient

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{Maj}(\sigma)}\,\sigma \tag{1.10}$$

dont la spécialisation $q = e^{2\pi i/n}$ est, à une constante près, l'idempotent de Klyachko [37].

Notre action non standard de l'algèbre de Hecke peut se remonter à l'algèbre de Hecke affine $\tilde{H}(q)$. De cette manière, il est possible de caractériser une base à deux paramètres de fonctions symétriques qui semble diagonaliser le centre de l'algèbre de Hecke affine. Les fonctions ainsi obtenues ne semblent pas être les bons analogues des fonctions de Macdonald (section 5.4).

Dans le chapitre 6, nous construisons un relèvement non commutatif des fonctions quasi-symétriques. Pour ce faire nous introduisons un nouvel objet combinatoire : les multimots. Nous dégageons alors une notion de quasi-symétrie pour ces multimots, à partir de laquelle nous obtenons des « fonctions » quasi-symétriques dans l'algèbre des multimots. Ces nouvelles fonctions forment une bigèbre dont les bases sont indicées par les matrices à coefficients entiers et qui généralise l'algèbre de Hopf des permutations de Malvenuto-Reutenauer [66]. On peut ainsi voir cette algèbre comme une structure analogue, non plus sur les permutations mais sur les doubles classes des groupes symétriques. Nous montrons que cette algèbre est une algèbre libre dont nous donnons explicitement un système de générateurs. Nous montrons que cette algèbre est en fait l'algèbre de convolution du commutant homogène de l'action du groupe linéaire $GL(V)$ dans $T(S^{+}(V))$ (théorème 6.57) ce qui peut être vu comme un résultat à la Schur-Weyl, l'algèbre des doubles classes remplaçant celle du groupe symétrique.

Dans le chapitre 7, nous présentons l'étude du monoïde chinois. Schützenberger s'est demandé s'il n'existait pas des monoïdes proches du plaxique. Il avait remarqué que parmi les monoïdes ternaires (relations d'équivalences sur trois lettres), le nombre de classes du monoïde plaxique croît particulièrement lentement. Duchamp et Krob ont alors montré que seuls deux autres monoïdes présentaient la même croissance [17], ce qui signifie que les classes ces monoïdes sont en bijection avec les tableaux. L'un d'eux ne semble pas particulièrement intéressant. L'autre est le monoïde chinois.

Nous nous sommes donc intéressés à ce monoïde en essayant de généraliser les constructions classiques du monoïde plaxique. Nous montrons ainsi que le rôle des tableaux est joué par une structure combinatoire que nous avons nommée escalier chinois (section 7.3). Ainsi chaque classe d'équivalence chinoise contient un et un seul mot escalier (On dit que les mots escaliers forment une section du monoïde chinois). Nous construisons un analogue de l'algorithme d'insertion de Schensted pour ce monoïde. A titre d'application, nous montrons que les classes standards sont toutes de cardinal impair. Nous donnons ensuite l'analogue de la correspondance de Robinson-Schensted pour ce nouvel objet (théorème 7.18, sous-section 7.6.2 et théorème 7.65). Ceci nous permet de ramener la question du dénombrement des classes chinoises à l'étude d'une statistique sur les mots de Dyck appelé poids chinois. Malheureusement, cette statistique ne respecte pas la structure algébrique des mots de Dyck, ce qui fait que son étude est difficile. Nous terminons le chapitre en traitant divers problèmes d'énumérations.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Combinatoire élémentaire

Cette section est consacrée aux définitions des objets combinatoires les plus simples dont nous fixons les notations et la terminologie. Nous commençons par un des objets les plus fondamentaux : les mots.

2.1.1 Mots

Soit X un ensemble totalement ordonné appelé *alphabet*. Les éléments de X sont appelés *lettres*. On appelle *mot* toute suite finie de lettres $w = w_1 w_2 \dots w_n$. Un mot est noté en écrivant successivement ses lettres. La longueur de la suite est appelée longueur du mot et est notée $\ell(w)$. Remarquons qu'il existe un mot de longueur 0 appelé *mot vide* et noté ϵ. L'ensemble des mots sur l'alphabet X est noté X^*.

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_n$ un mot. On appelle

- *sous-mot* de w, tout mot de la forme $w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}$ avec $i_1 < \dots < i_k$;
- *facteur* de w, tout mot de la forme $w_i w_{i+1} \dots w_j$;
- *préfixe* (ou facteur gauche) de w, tout mot de la forme $w_1 w_2 \dots w_i$;
- *suffixe* (ou facteur droit) de w, tout mot de la forme $w_i w_{i+1} \dots w_n$.

Considérons par exemple, sur l'alphabet $X = a < b < c < d < e < f$, le mot $w = abecbbfec$. Alors bcf est un sous-mot de w mais n'en est pas un facteur. Le mot ecf est un facteur de w, les mots abe et fec sont respectivement un préfixe et un suffixe de w.

On appelle *évaluation* d'un mot w la donnée, pour chaque lettre l, du nombre d'occurrences k_l de l dans le mot. Le plus souvent, on notera l'évaluation d'un mot comme un monôme $a^{k_a} b^{k_b} \dots z^{k_z}$. Avec cette notation l'évaluation du mot est alors son image commutative.

Par exemple, sur l'alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, le mot $w = abecbbfec$ a pour évaluation le monôme $ab^3c^2e^2f$.

Produit de concaténation, monoïde libre et algèbre libre

On appelle *concaténation* de deux mots u et v le mot $w = u \cdot v$ obtenu en écrivant les lettres de v dans l'ordre à la suite de celles de u. Par exemple, la concaténation des mots abe et $cbbfec$ est le mot $abecbbfec$. Par souci de simplification, on écrira uv au lieu de $u \cdot v$ quand ceci ne créera pas d'ambiguïté.

L'ensemble des mots sur l'alphabet X muni du produit de concaténation est un monoïde appelé *monoïde libre*. Si $\mathbb{K}$ est un corps, on note $\mathbb{K}\langle X\rangle$ l'espace vectoriel des combinaisons linéaires formelles de mots sur X à coefficients dans $\mathbb{K}$. La concaténation munit $\mathbb{K}\langle X\rangle$ d'une structure d'algèbre non commutative appelée *algèbre libre* ou *algèbre de concaténation*. L'évaluation est un morphisme de l'algèbre libre dans l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur l'alphabet X.

Produit de mélange

Définition 2.1 *On définit par récurrence le produit de mélange noté* $\sqcup\!\sqcup$ *en posant :*

$$\epsilon \sqcup\!\sqcup v = v \sqcup\!\sqcup \epsilon = v, \tag{2.1}$$

$$au \sqcup\!\sqcup bv = a(u \sqcup\!\sqcup bv) + b(au \sqcup\!\sqcup v), \tag{2.2}$$

où ϵ *désigne le mot vide,* a *et* b *sont deux lettres et* u *et* v *deux mots.*

Par exemple, $ab \sqcup\!\sqcup ac = abac + 2aabc + 2aacb + acab$. On munit ainsi $\mathbb{K}\langle X\rangle$ d'une deuxième structure d'algèbre, commutative celle-ci.

Note 2.2 Le mot vide est donc l'élément neutre pour les deux produits. On identifie donc $k\epsilon$ avec le scalaire k. En conséquence, dans ce contexte on notera le mot vide 1 au lieu de ϵ.

Standardisation

Définition 2.3 *Soit* $w = w_1w_2 \dots w_n$ *un mot. On appelle standardisée de* w *et l'on note* $\mathrm{Std}(w)$ *l'unique permutation* σ *de* $\mathfrak{S}_n$*, telle que*

$$\sigma(i) < \sigma(j) \quad \Longleftrightarrow \quad w_i \leq w_j. \tag{2.3}$$

On la calcule de la manière suivante : pour chaque lettre x de l'alphabet, on numérote de gauche à droite les occurrences de x. On obtient donc un mot sur l'alphabet $\{a_1 < a_2 < \dots < b_1 < b_2 < \dots\}$ dont toutes les lettres sont distinctes. En remplaçant les lettres par des entiers, tout en conservant l'ordre, on obtient un mot sur l'alphabet $\{1 < 2 < 3 < \dots\}$. Ce mot vu comme une permutation est la standardisée de w.

Par exemple, pour le mots *abdbbca* on trouve $a_1b_1d_1b_2b_3c_1a_2$. Après renumérotation, on trouve la permutation 1374562.

2.1.2 Partitions, tableaux

Dans la théorie des fonctions symétriques, de nombreux objets (entre autres les bases) sont indexés par les partitions. Leur combinatoire a donné lieu à de nombreux travaux, citons par exemple les travaux d'Andrews [1] ainsi que ceux de Hardy et Ramanujan [29].

Partitions

Une partition est une suite finie d'entiers strictement positifs rangés dans l'ordre décroissant :

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r).$$

Les entiers λ_i sont appelés *parts* de la partition. Le nombre r de parts est appelé *longueur* de la partition et est noté $\ell(\lambda)$. La somme des parts est appelée *somme* ou *poids* de la partition et est notée $n = |\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$. On dit alors que λ est une partition de n et on note $\lambda \vdash n$. Par exemple, il y a 7 partitions de 5 :

$$(5),\quad (4,1),\quad (3,2),\quad (3,1,1),\quad (2,2,1),\quad (2,1,1,1),\quad (1,1,1,1,1).$$

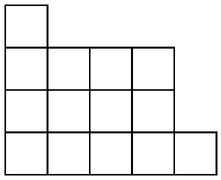
Il est souvent utile d'avoir une notation qui donne le nombre d'occurrences de chaque entier comme part de λ. On utilise alors la notation

$$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_1} \dots p^{m_p})$$

qui signifie qu'il y a exactement m_i parts de λ égales à i. Le nombre m_i est appelé la *multiplicité* de i dans λ.

Diagrammes de Ferrers, conjugaison

On représente graphiquement une partition λ par un diagramme appelé *diagramme de Ferrers* de la manière suivante : chaque part λ_i de la partition est représentée par une ligne de λ_i boîtes. On pose les lignes les unes sur les autres en montant, les bords gauches des lignes étant alignés. Par exemple, la partition $(5,4,4,1) = (14^2 5)$ est représentée par le diagramme



On identifie la partition avec son diagramme.

Note 2.4 La convention anglaise pose les lignes dans l'autre sens, c'est-à-dire les unes en dessous des autres.

La *conjuguée d'une partition* λ est la partition $\lambda^\sim$ dont le diagramme est le symétrique du diagramme de λ par rapport à la première bissectrice. Ainsi $\lambda^\sim_i$ est le nombre de cases dans la $i^{\text{ème}}$ colonne de λ. C'est donc le nombre de parts de λ supérieures à i. Par exemple, la conjuguée de $(5,4,4,1)$ est la partition $(4,3,3,3,1)$. On a trivialement $(\lambda^\sim)^\sim = \lambda$.

Ordre de dominance

Soit n un entier. On ordonne partiellement l'ensemble des partitions de n de la manière suivante. On dit que λ domine μ et l'on note $\lambda \trianglerighteq \mu$ si

$$\text{pour tout } i \geq 1 \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i. \tag{2.4}$$

Par exemple, les partitions de 5 sont dans l'ordre suivant :

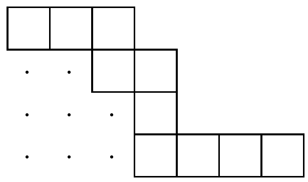
$$(5), \quad (4,1), \quad (3,2), \quad (3,1,1), \quad (2,2,1), \quad (2,1,1,1), \quad (1,1,1,1,1).$$

Si n est supérieur à 6 ce n'est pas un ordre total. En effet, les partitions $(3,1,1,1)$ et $(2,2,2)$ ne sont pas comparables.

Diagramme gauche

Soit λ et μ deux partitions. Par $\lambda \supset \mu$, on signifie que le diagramme de λ contient celui de μ, c'est à dire que $\lambda_i \geq \mu_i$ pour tout i. Un *diagramme gauche* est la différence ensembliste de deux diagrammes. Dans tout ce travail, les seuls diagrammes gauches considérés seront les *diagrammes rubans*. Ce sont les diagrammes R qui sont le bord supérieur droit du diagramme d'une partition. Plus précisément, le bord de λ est l'ensemble R des cases de λ telles que la case au dessus et à droite n'appartienne pas à λ.

Un diagramme ruban est aussi le diagramme d'une composition (voir la section suivante). Par exemple pour $\lambda = (7, 4, 4, 3)$ et $\mu = (3, 3, 2)$, on obtient le diagramme ruban



Tableaux

Introduits par Alfred Young dans sa série de travaux sur l'analyse substitutionnelle quantitative [86], les tableaux se sont révélés comme l'objet combinatoire central de la théorie des fonctions symétriques. Leur combinatoire est extrêmement riche [49, 38, 78, 21, 57].

On appelle remplissage du diagramme de λ la donnée, pour chaque case, d'un entier strictement positif. Bien évidemment, on représentera graphiquement un remplissage en plaçant l'entier dans la case correspondante.

Un *tableau* est un remplissage d'un diagramme de Ferrers tel que les entiers vont en croissant au sens large de gauche à droite à l'intérieur de chaque ligne, et en croissant au sens strict de bas en haut à l'intérieur de chaque colonne. Un *tableau gauche* est un remplissage d'une forme gauche qui vérifie les mêmes conditions. Un tableau T est dit *standard* s'il contient une fois et une seule chaque entier de 1 à n où n est le nombre de cases du tableau.

6	5			
2	3	2		
3	4	3		
2	4	2	1	2

6	7			
3	4	5		
2	3	3		
1	1	2	3	5

12	13			
8	9	11		
3	4	7		
1	2	5	6	10

FIG. 2.1 : Un remplissage, un tableau et un tableau standard

On étend ces définitions aux diagrammes gauches.

3	7			
	5	8		
		2		
		1	4	6

FIG. 2.2 : Un tableau standard de forme ruban

2.1.3 Compositions, quasi-rubans

Dans la théorie des fonctions symétriques non-commutatives et des fonctions quasi-symétriques, le rôle des partitions est joué par les compositions. Comme nous allons le voir, les partitions et les compositions sont deux objets combinatoires assez semblables.

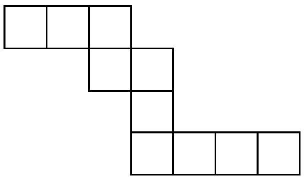
Compositions, rubans

On appelle *composition* toute suite finie d'entiers $K = (k_1, \ldots, k_p)$ strictements positifs. On dit que les k_i sont les *parts* de la composition. Le nombre p de parts est appelé longueur de la composition et est noté $\ell(K)$. Soit $n = |K| = k_1 + \cdots + k_p$ la *somme* de K. On dit alors que K est une composition de n et on écrit $K \vDash n$. Par exemple, il y a 8 compositions de somme 4 :

$$(4),\ (3,1),\ (2,2),\ (1,3),\ (2,1,1),\ (1,2,1),\ (1,1,2),\ (1,1,1,1).$$

On appelle *pseudo-composition* ou *vecteur d'entiers* toute suite finie d'entiers positifs ou nuls. Par extension, on parle de parts, de longueur et de somme pour une pseudo-composition.

On représente graphiquement une composition K par un diagramme appelé *diagramme ruban* de forme K de la manière suivante : on représente chaque part k_i de la composition par une ligne de k_i boîtes, en plaçant la première boîte de la $k_i{}^{\text{ème}}$ ligne sous la dernière boîte de la ligne précédente. Le nombre de boîtes du diagramme de K est donc la somme de la composition K. On aura parfois besoin de désigner la composition de longueur r dont toutes les parts sont égales à i, on la notera i^r. Par exemple, le diagramme ruban associé à la composition $I = (3,2,1,4)$ est



Soient $I = (i_1, \ldots, i_q)$ et $J = (j_1, \ldots, j_p)$ deux compositions. Il y a deux manières naturelles de construire un diagramme ruban à partir des diagrammes de I et de J. Soit on colle la première boîte du diagramme de J en dessous de la dernière boîte de celui de I ; on obtient alors le diagramme de la composition $(i_1, \ldots, i_q, j_1, \ldots, j_p)$. On la note $I \cdot J$. Soit on colle le diagramme de J à droite de celui de I. On obtient alors la composition $(i_1, \ldots, i_q + j_1, \ldots, j_p)$, notée $I \triangleright J$.

Ensemble des descentes

Les sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ sont naturellement en bijection avec les compositions de n, par la correspondance :

$$S = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_p\} \longmapsto \mathrm{C}(S) = (i_1, i_2 - i_1, i_3 - i_2, \ldots, n - i_p). \quad (2.5)$$

La bijection inverse est donnée par la correspondance :

$$K = (k_1, \ldots, k_p) \longmapsto \mathrm{Des}(K) = \{k_1 + \cdots + k_j,\ j = 1, \ldots, p-1\}. \quad (2.6)$$

L'ensemble associé à la composition K est appelé *ensemble des descentes* de K. Si on lit le diagramme de K de haut en bas, chaque ligne étant lue de gauche à droite, l'ensemble $\mathrm{Des}(K)$ est l'ensemble des numéros des cases qui ont une case juste en dessous. Par exemple la composition $(3, 1, 2, 1, 2, 2)$ de somme 11 correspond au sous-ensemble $\{3, 4, 6, 7, 9\}$ de $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

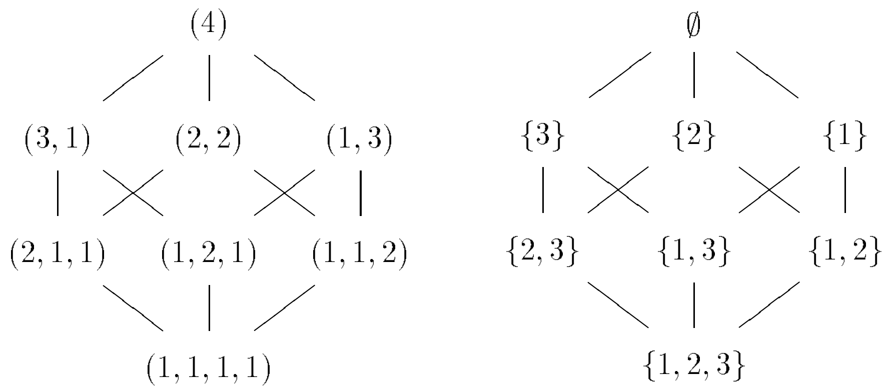


FIG. 2.3 : Compositions de 4 et sous-ensembles de $\{1, 2, 3\}$.

Ceci permet de transférer aux compositions les constructions combinatoires élémentaires sur les parties de $\{1, \ldots, n-1\}$. La *conjuguée* $K^{\sim}$ de la composition K est obtenue en lisant de gauche à droite les hauteurs des colonnes du diagramme de K. Elle correspond au complémentaire de l'ensemble des descentes de K. Par exemple la conjuguée de $(3, 2, 1, 4)$ est $(1, 1, 2, 3, 1, 1, 1)$. Ces deux compositions correspondent aux parties $\{3, 5, 6\}$ et $\{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$ de $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

Ordre de raffinement

Soit I et J deux compositions du même nombre n. On dit que I est *plus fine* que J et on note $I \succeq J$ si $\mathrm{Des}(I) \supseteq \mathrm{Des}(J)$.

Donnons une définition équivalente que l'on peut lire directement sur les compositions : écrivons $J = (j_1, \dots, j_p)$. La composition I est plus fine que J si il existe p compositions, $J_1, \dots, J_p$ de sommes respectives $j_1, \dots, j_p$ telles que I soit obtenue en collant les compositions $J_1, \dots, J_p$ les unes après les autres (c'est-à-dire $I = J_1 \cdot J_2 \cdots J_p$). Autrement dit, en supposant que I s'écrive $I = (i_1, i_2, \dots, i_q)$, on peut trouver $p+1$ entiers

$$0 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_p - 1 < u_p = q$$

tels que

$$J_s = (i_{u_{s-1}+1}, i_{u_{s-1}+2}, \dots, i_{u_s}).$$

La composition J s'écrit donc

$$J = (i_1 + i_2 + \cdots + i_{u_1}, i_{u_1+1} + \cdots + i_{u_2}, \quad \dots \quad , i_{u_{p-1}+1} + \cdots + i_q).$$

On appelle alors *composition de raffinement de J par I* la composition

$$\#(I, J) = (\ell(J_1), \dots, \ell(J_p)) = (u_1, u_2 - u_1, \dots, q - u_{p-1}).$$

Reprenons les notations précédentes. Écrivons alors

$$I = J_1 \cdot J_2 \cdots J_p = (i_1, i_2, \dots, i_{u_1} \cdot i_{u_1+1}, \dots, i_{u_2} \cdot \quad \dots \quad \cdot i_{u_{p-1}+1}, \dots, i_q).$$

On considère I comme un q-uplet dans lequel certaines parts sont séparées par «,» et d'autres par «·». On remplace alors chaque sous-suite entre deux «,» par la somme de ses parts moins le nombre de «·». On obtient ainsi une composition de $n - (p-1)$ de longueur $q - p$ que l'on note I/J. C'est la composition associée au complémentaire de l'ensemble $\mathrm{Des}(J)$ dans $\mathrm{Des}(I)$, considéré comme un sous-ensemble du complémentaire de $\mathrm{Des}(J)$ dans $\{1, \dots, n-1\}$.

Fixons une composition J de n. L'algorithme ci-dessus définit une bijection compatible avec l'ordre entre les compositions plus fines que J et les compositions de $n - \ell(J) + 1$ (Voir figure 2.4).

Exemple 2.5 Soit $I = (2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1)$ et $J = (2, 3, 5, 2, 1, 1)$, on écrit donc $I = (2 \cdot 2, 1 \cdot 2, 1, 1, 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1)$. On obtient alors $I/J = (3, 2, 1, 1, 2)$ et $\#(I, J) = (1, 2, 4, 1, 1, 1)$. Les ensembles de descentes correspondants sont $\mathrm{Des}(J) = \{2, 5, 10, 12, 13\}$ et $\mathrm{Des}(I) = \{2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13\}$. Ce sont des parties de $\{1 < \cdots < 13\}$. Alors $\mathrm{Des}(I) \setminus \mathrm{Des}(J) = \{4, 7, 8, 9\}$ vu comme une partie de $\{1 < 3 < 4 < 6 < 7 < 8 < 9 < 11\}$ est, après renumérotation, $\{3, 5, 6, 7\}$ vu comme une partie de $\{1 < \cdots < 8\}$ et est donc associé à la composition $(3, 2, 1, 1, 2)$.

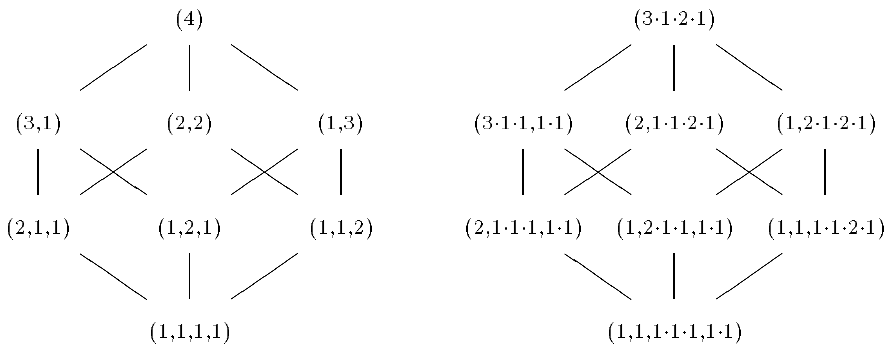


FIG. 2.4 : Compositions de 4 et compositions plus fines que $(3, 1, 2, 1)$.

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la définition :

Proposition 2.6 *Soient I et J deux compositions du même nombre n. Supposons que $I \succeq J$. Alors $J^\sim \succeq I^\sim$ et $(\#(I, J))^\sim = J^\sim / I^\sim$.*

Exemple 2.7 Avec les notations de l'exemple précédent, on a

$$I^\sim = (1, 2, 3, 5, 3) \quad \text{et} \quad ({}^\sim J) = (1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 3).$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} J^\sim / I^\sim \; &= (2, 2, 1, 1, 4) = (1, 2, 4, 1, 1, 1)^\sim = (\#(I, J))^\sim \\ \#(J^\sim, I^\sim) &= (1, 1, 2, 4, 1) = \; (3, 2, 1, 1, 2)^\sim \; = \; (I/J)^\sim. \end{aligned}$$

Indice majeur

Une des statistiques importantes sur les compositions est l'indice majeur de Mac Mahon [64].

Définition 2.8 *Soit $K = (k_1, \ldots, k_p)$ une composition. L'*indice majeur *de K est défini par*

$$\mathrm{Maj}(K) = \sum_{i \in \mathrm{Des}(K)} i = (p-1)k_1 + (p-2)k_2 + \cdots + 2k_{p-2} + k_{p-1}. \qquad (2.7)$$

Il vérifie la relation :

$$\mathrm{Maj}(K) + \mathrm{Maj}(K^{\sim}) = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{2.8}$$

Enfin, on a la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{K \vDash n} q^{\mathrm{Maj}(K)} = (1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^{n-1}). \tag{2.9}$$

Quasi-rubans

La notion de quasi-ruban est, en un certain sens, duale de la notion de tableau de forme ruban. Ces deux objets d'apparences semblables sont en fait très différents [40, 42, 69].

Définition 2.9 *Soit I une composition. On appelle* quasi-ruban de forme I *tout remplissage du diagramme ruban associé à I, tel que les lettres vont en croissant au sens large de gauche à droite à l'intérieur de chaque ligne, et en croissant au sens strict de* haut en bas *à l'intérieur de chaque colonne.*

On appelle mot quasi-ruban de forme I *tout mot sur l'alphabet X obtenu en lisant de gauche à droite les colonnes d'un diagramme quasi-ruban de forme I, chaque colonne étant lue de* bas en haut.

L'ensemble des mots quasi-rubans de forme I est noté $\mathrm{QR}(I)$.

Algorithme 2.10 *Pour savoir si un mot $w = w_1w_2\ldots w_n$ est un quasi-ruban, on procède de la manière suivante :*

- *On décompose w en produit de facteurs décroissants maximaux :*

$$w = f_1 f_2 \ldots f_p.$$

- *Pour tout $i < p$, on compare la première lettre v_i (c'est-à-dire la plus grande) du facteur f_i avec la dernière lettre u_{i+1} (la plus petite) du facteur suivant f_{i+1}. Alors*
- *si pour tout i, on a $v_i < u_{i+1}$, le mot est un quasi-ruban, sinon le mot n'est pas un quasi-ruban.*

Graphiquement, on écrit en colonne les facteurs maximaux décroissants de w. On colle les différentes colonnes les unes derrière les autres de manière à

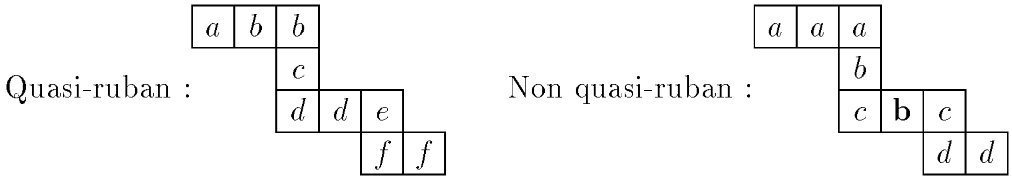


FIG. 2.5 : Exemple et contre-exemple de quasi-rubans.

obtenir un remplissage d'un diagramme ruban. Le mot w est alors un quasi-ruban si ce remplissage est lui même un quasi-ruban.

Par exemple, le mot $abdcbdfef$ est un quasi-ruban de forme $(3,1,3,2)$. C'est la lecture du premier des deux tableaux de la figure 2.5. En revanche le mot $aacbabdcd$ n'est pas un quasi-ruban. En effet, le diagramme obtenu en écrivant en colonne ses facteurs décroissants n'est pas un diagramme quasi-ruban.

2.1.4 Permutations, groupe symétrique

On appelle *permutation* toute bijection de l'intervalle entier $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur lui même. On note $\sigma\mu$ la composée $\sigma \circ \mu$ des deux permutations σ et μ. Ceci munit l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations d'une structure de groupe appelée groupe symétrique. On représente une permutation par la suite des images des entiers de 1 à n. Par exemple la permutation qui envoie 1 sur 2, 2 sur 3 et 3 sur 1 est notée 231.

Transpositions élémentaires

On appelle *transposition* et on note $\sigma_{i,j}$ la permutation qui échange les deux entiers i et j et qui laisse les autres fixes. On appelle *transposition élémentaire* la transposition qui échange les deux entiers consécutifs i et $i+1$. On la note σ_i. C'est donc la permutation

$$1 \;\; 2 \;\; \ldots \;\; i-1 \;\; i+1 \;\; i \;\; i+2 \;\; \ldots \;\; n.$$

Les transpositions élémentaires engendrent le groupe symétrique. Plus précisément, le groupe symétrique est le groupe engendré par les transpositions élémentaires $(\sigma_i)_{i=1\ldots n}$ avec les relations

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= 1 && \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ \sigma_i\,\sigma_j &= \sigma_j\,\sigma_i && \text{pour } |i-j| > 1, \\ \sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i &= \sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1} && \text{pour } 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ces relations sont appelées relations de Moore-Coxeter. Les deux dernières relations sont appelées relations de tresses.

Permutoèdre

On représente le groupe symétrique et les relations de tresses par le graphe suivant appelé permutoèdre :

- les sommets du graphe sont les permutations de $\mathfrak{S}_n$,
- les arêtes sont étiquetées par les transpositions élémentaires,
- il y a une arête étiquetée σ_i entre σ et μ si $\sigma = \mu\, \sigma_i$.

la figure 2.6 montre le permutoèdre de $\mathfrak{S}_4$.

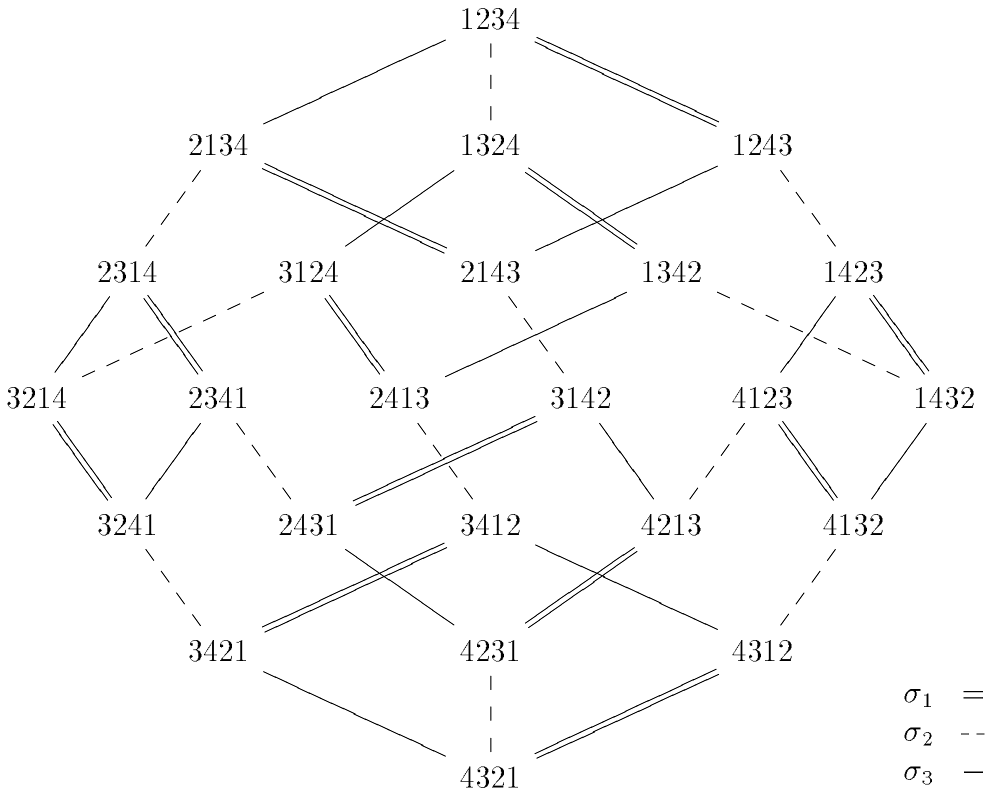


FIG. 2.6 : Le permutoèdre de $\mathfrak{S}_4$.

Mots réduits, longueur, signe

Définition 2.11 *Soit σ une permutation. On appelle* mot réduit *de σ toute décomposition de σ en transpositions élémentaires de longueur minimale :*

$$\sigma = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} . \tag{2.11}$$

La longueur d'un mot réduit est appelé longueur de la permutation et est notée $\ell(\sigma)$. Elle est égale au nombre *d'inversions* de σ, c'est-à-dire au nombre de couple $i < j$ tels que $\sigma(i) > \sigma(j)$. On appelle *signe* de la permutation σ le nombre $(-1)^{\ell(\sigma)}$. On le note $\mathrm{Sgn}(\sigma)$. Il vérifie

$$\mathrm{Sgn}(\sigma\,\mu) = \mathrm{Sgn}(\sigma)\,\mathrm{Sgn}(\mu). \tag{2.12}$$

La permutation de longueur minimale est l'identité Id. La permutation de longueur maximale est la permutation $n, n-1, \dots, 1$ (telle que i est envoyé sur $n+1-i$). On l'appelle *permutation maximale* et on la note ω. Elle a pour longueur $n(n-1)/2$ et admet de nombreux mots réduits. Parmi ceux-ci on trouve

$$\begin{aligned} \omega &= \sigma_1(\sigma_2\,\sigma_1)(\sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_1)\dots(\sigma_{n-1}\dots\sigma_2\,\sigma_1) && (2.13)\\ &= (\sigma_1\,\sigma_2\dots\sigma_{n-1})\dots(\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3)(\sigma_1\,\sigma_2)\,\sigma_1 && (2.14)\end{aligned}$$

Dans le permutoèdre, on représente la longueur des permutations comme suit : on dessine le permutoèdre en plaçant l'identité en haut, chaque transposition élémentaire fait descendre d'une ligne. La ligne correspond donc à la longueur de la permutation. Les mots réduits de la permutation σ sont les chemins qui partent de l'identité et qui vont à σ en ne remontant jamais.

Ordre de Bruhat

L'ordre de Bruhat est un ordre partiel sur $\mathfrak{S}_n$. Il est défini comme suit : Soit σ et μ deux permutations. Alors σ est plus petite que μ (on note $\sigma < \mu$), s'il existe un mot réduit $w = \mu_1 \dots \mu_p$ pour μ et une suite croissante d'entiers $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p$ telle que

$$\sigma = \mu_{i_1}\mu_{i_2}\dots\mu_{i_r}. \tag{2.15}$$

Autrement dit, il existe un mot réduit pour σ qui est un sous-mot d'un mot réduit pour μ. On peut également définir cet ordre par récurrence, au moyen de la propriété suivante :

Proposition 2.12 *Soit σ une permutation. Supposons que σ s'écrive $\sigma' \sigma_i$ avec $\ell(\sigma) = \ell(\sigma') + 1$. On a alors*

$$\{\mu \mid \mu \leq \sigma\} = \{\mu \mid \mu \leq \sigma'\} \cup \{\mu\, \sigma_i \mid \mu \leq \sigma\}. \tag{2.16}$$

La réunion n'est pas disjointe.

Descentes, montées, rubans

Définition 2.13 *On dit qu'une permutation σ admet une* descente *en position i si $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Dans le cas contraire, on dit que σ admet une montée.*

De manière équivalente, σ admet une descente en position i s'il existe un mot réduit pour σ qui se termine par σ_i. Cette définition se généralise à tous les groupes de Coxeter, et dans ce contexte on dira plutôt que σ_i est une descente de σ. On peut encore formuler cette définition d'une autre manière :

Proposition 2.14 *La transposition élémentaire σ_i est une descente de la permutation σ si et seulement si il existe une permutation σ' telle que*

$$\sigma = \sigma' \sigma_i \quad \textit{et} \quad \ell(\sigma) = \ell(\sigma') + 1. \tag{2.17}$$

On parle donc d'ensemble des descentes d'une permutation. Le plus souvent on codera l'ensemble des descentes de la permutation σ par la composition associée $C(\sigma)$, c'est-à-dire que $C(\sigma)$ est l'unique composition K telle que $\mathrm{Des}(\sigma) = \mathrm{Des}(K)$.

On peut la calculer de la manière suivante : on écrit successivement les images des entiers i de 1 à n, l'entier $i+1$ étant placé à droite de i s'il est plus grand, en dessous s'il est plus petit. On obtient ainsi un tableau de forme ruban. La forme de ce tableau est la composition K associée à l'ensemble des descentes de la permutation. Par exemple, la permutation $\sigma = 37582146$ a pour ensemble de descentes $\{2, 4, 5\}$. Il est codé par la composition $(2, 2, 1, 3)$. Le ruban associé est

$$\begin{array}{|c|c|ccc}
\hline
3 & 7 & & & \\
\hline
 & 5 & \multicolumn{1}{|c|}{8} & & \\
\cline{2-3}
 & & \multicolumn{1}{|c|}{2} & & \\
\cline{3-5}
 & & \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{6} \\
\cline{3-5}
\end{array}$$

Symétriquement, on dit que σ a un recul en position i si $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(i+1)$.

Pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, il y a une descente et un recul en i pour la permutation maximale. Il s'ensuit que l'on peut commencer ou terminer un mot réduit pour ω par n'importe quelle transposition élémentaire.

Algèbre des descentes

Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif. On appelle $\mathbb{K}$-*algèbre du groupe symétrique* l'algèbre des combinaisons linéaires de permutations à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec le produit du groupe symétrique. Elle est notée $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$.

Soit K une composition. Dans l'algèbre du groupe symétrique on définit l'élément suivant :

$$D_K = \sum_{C(\sigma)=K} \sigma\,. \tag{2.18}$$

C'est donc la somme de toutes les permutations qui ont le même ensemble de descentes. Soit Σ_n l'espace engendré par les D_K dans $\mathfrak{S}_n$ quand K décrit les compositions de n. Solomon [77] a prouvé, dans le contexte plus large des groupes de Coxeter, le théorème suivant :

Théorème 2.15 *Σ_n est une sous algèbre de $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$.*

On l'appelle *algèbre des descentes* du groupe symétrique. Comme nous le verrons plus tard, cette algèbre joue un rôle central dans la théorie des fonctions symétriques non-commutatives.

Cycles, type cyclique d'une permutation

La notion de type cyclique d'une permutation est fondamentale dans la théorie des représentations du groupe symétrique.

Définition 2.16 *On dit qu'une permutation σ est un* cycle *s'il existe des entiers $i_1, \dots, i_p$ tous distincts tels que*

- $\sigma(i_l) = i_{l+1}$, *si* $l < p$,
- $\sigma(i_p) = i_1$.
- $\sigma(i) = i$, *si* $i \neq i_1, \dots, i_p$.

L'entier p est appelé longueur du cycle, *l'ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$ le* support du cycle.

On notera les cycles en notant les entiers $i_1, \dots, i_p$ dans cet ordre entre parenthèses. Cette notation est entendue à permutation circulaire près. Par exemple le cycle (3562) de $\mathfrak{S}_8$ désigne la permutation 13546278. On le note aussi (2356), (6235) et (5623).

Deux cycles commutent si et seulement si ils ont leurs supports disjoints. La propriété fondamentale des cycles est la suivante :

Proposition 2.17 *Toute permutation se décompose de manière unique en produit de cycles de supports disjoints.*

L'unicité est bien évidemment entendue à l'ordre près des cycles puisque ceux-ci commutent. On notera une décomposition en cycles en juxtaposant les cycles. Le plus souvent on n'écrira pas les cycles de longueur 1 c'est à dire les points fixes. La permutation 73546218 est le produit des deux cycles (3562) et (17), les entiers 4 et 8 étant fixes. On la notera (17)(3562).

Si σ est une permutation, on note les longueurs des cycles de sa décomposition en ordre décroissant. On obtient ainsi une partition de n appelée *type cyclique* de la permutation σ. Par exemple la permutation 73546218 a pour type cyclique la partition 4211.

On dit que deux permutations σ et σ' sont conjuguées s'il existe une permutation μ telle que $\sigma\,\mu = \mu\,\sigma'$. Le type cyclique est l'invariant de conjugaison, c'est-à-dire que :

Proposition 2.18 *Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont même type cyclique.*

2.2 Fonctions symétriques

Les fonctions symétriques forment un objet central de tout ce travail. Nous avons adopté les notations du livre de Macdonald [62].

2.2.1 Bases et familles génératrices

Soient n un entier fixé et $X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ un alphabet totalement ordonné. Considérons l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes en les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$. Le groupe symétrique agit naturellement sur $\mathbb{K}[X]$ par permutation des variables :

$$(\sigma\, f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}). \tag{2.19}$$

La transposition élémentaire σ_i est donc l'unique morphisme d'algèbre qui échange x_i et x_{i+1} en fixant les autres variables. Un polynôme f est dit symétrique s'il est invariant par échange des variables, c'est-à-dire si

$$\sigma\, f = f \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_n. \tag{2.20}$$

Il est souvent pratique de considérer un alphabet X infini. Ceci est possible car les morphismes de restriction d'alphabet

$$\rho_{m,n} \ : \ f(x_1, \ldots, x_m) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \tag{2.21}$$

sont compatibles (c'est-à-dire $\rho_{m,p} = \rho_{n,p} \circ \rho_{m,n}$ pour $m > n > p$). On parle alors de fonctions symétriques plutôt que de polynômes symétriques. Les fonctions symétriques sont donc des sommes formelles de monômes, de degré fini, invariantes par échange des variables.

On note Sym l'algèbre des fonctions symétriques et Sym(X) l'algèbre des polynômes symétriques sur l'alphabet X.

Fonctions symétriques élémentaires

On appelle $r^{\text{ème}}$ fonction symétrique élémentaire la fonction définie par

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}. \tag{2.22}$$

Par exemple, la fonction symétrique e_2 s'écrit sur $X = \{x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}$:

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Le point de départ est le suivant :

Théorème 2.19 (Théorème fondamental)
L'algèbre des polynômes symétriques en n variables est librement engendrée par les polynômes symétriques élémentaires $(e_i)_{i \leq n}$.

On peut donc voir les fonctions symétriques comme les polynômes en les variables $(e_i)_{i \geq 1}$ avec la graduation particulière $\deg(e_i) = i$. On en déduit que la famille des $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \ldots e_{\lambda_p}$, où $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_p)$ décrit l'ensemble des partitions, est une base de Sym.

Fonctions symétriques monomiales

La famille des fonctions symétriques monomiales forme une autre base naturelle de Sym. Soit λ une partition. La *fonction symétrique monomiale* d'indice λ est la fonction définie par

$$m_\lambda = \sum x_1^{\lambda_1} \cdots x_r^{\lambda_r}, \tag{2.23}$$

somme de toutes les permutations distinctes du monôme $x_1^{\lambda_1} \cdots x_r^{\lambda_r}$, c'est-à-dire la somme de tous les monômes dont la partition obtenue en réordonnant les exposants est égale à λ. Par exemple, la fonction symétrique $m_{2,1}$ s'écrit :

$$m_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2.$$

Nous allons maintenant définir plusieurs familles génératrices de l'algèbre des fonctions symétriques qui seront utiles dans la suite. Soit $E(t)$ la série génératrice des fonctions symétriques élémentaires :

$$E(t) = \sum_{r \geq 0} e_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t). \tag{2.24}$$

Fonctions complètes

On définit la $r^{\text{ème}}$ fonction complète comme la somme de tous les monômes de degré r :

$$h_r = \sum_{\lambda \vdash r} m_\lambda. \tag{2.25}$$

Par exemple, la fonction symétrique h_2 s'écrit :

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Leur série génératrice est donnée par

$$H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = E(-t)^{-1} = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1}. \tag{2.26}$$

Fonctions symétriques sommes de puissances

Soit r un entier. On appelle $r^{\text{ème}}$ *fonction symétrique somme de puissance* la fonction définie par

$$p_r = \sum_{x \in X} x^r. \tag{2.27}$$

Par exemple, la fonction symétrique p_2 s'écrit :

$$p_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Leur série génératrice est donnée par

$$P(t) = \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} = \frac{d}{dt} \log H(t) = \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t}. \tag{2.28}$$

Dualité

Nous allons maintenant décrire la structure d'algèbre de Hopf de Sym. Il apparaît que Sym est autoduale.

On définit sur Sym un produit scalaire par l'une des deux formules équivalentes

$$\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} \quad \text{et} \quad \langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda,\mu} \tag{2.29}$$

avec $z_\lambda = \prod i^{m_i} m_i!$ où m_i est la multiplicité i dans λ. La formule suivante qui matérialise l'autodualité de Sym est appelée formule de Cauchy. Soient u_λ et v_μ deux bases de Sym. Alors

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda u_\lambda(X) v_\mu(Y). \tag{2.30}$$

Ceci nous conduit à définir sur Sym le coproduit suivant, dual du produit usuel :

$$\Delta(p_r) = 1 \otimes p_r + p_r \otimes 1 \tag{2.31}$$

On montre alors que Sym munit du produit usuel, du coproduit Δ et de l'antipode $\omega(p_r) = -p_r$ est une algèbre de Hopf graduée auto-duale.

2.2.2 Fonctions de Schur

Les fonctions de Schur, bien qu'ayant été définies par Jacobi [32], portent le nom de Schur car c'est lui qui a mis à jour le rôle fondamental joué par ces dernières dans la théorie des représentations [75]. Nous commençons par rappeler la définition originale en termes d'alternants.

Alternants

On appelle alternant le déterminant de Vandermonde :

$$a_\delta = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j) = \mathrm{Det}(x_i^{n-j}). \tag{2.32}$$

Soit $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ un monôme. On considère le polynôme obtenu par antisymétrisation de x^α :

$$a_\alpha = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma)\, \sigma(x^\alpha). \tag{2.33}$$

L'alternant est donc l'antisymétrisé du monôme x^δ appelé *monôme escalier* défini par $x^\delta = x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-2}^2 x_{n-1}$. Toute fonction antisymétrique est divisible par l'alternant. Si λ est une partition on pose $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1}\cdots x^{\lambda_n}$. On appelle *fonction de Schur* la fonction s_λ définie par

$$s_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta = \frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma)\,\sigma(x^{\lambda+\delta})}{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma)\,\sigma(x^{\delta})}. \tag{2.34}$$

On montre que les fonctions de Schur sont des fonctions symétriques à coefficients entiers, et que la famille $\{s_\lambda\}$ est une base de Sym.

Définition combinatoire

Soit T un tableau. On appelle *poids de T* et on note x^T le monôme dont l'exposant de x_i est égal au nombre d'occurrences de l'entier i dans T.

Par exemple, le poids du tableau

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\cline{1-2} 3 & 4 \\
\cline{1-4} 2 & 3 & 4 & 4 \\
\hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
\hline
\end{array}$$

est $x_1^2x_2^3x_3^4x_4^3$.

Soit λ une partition. Notons Tab(λ) l'ensemble des tableaux de Young de forme λ. La fonction de Schur s_λ est alors égale à

$$s_\lambda = \sum_{T\in\mathrm{Tab}(\lambda)} x^T. \tag{2.35}$$

Par exemple, la fonction de Schur $s_{(2,1)}$ s'écrit sur trois lettres :

$$s_{(2,1)}(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2.$$

En effet, il existe 8 tableaux de forme $(2,1)$ sur l'alphabet à trois lettres :

$$\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$$

Dualité

Les fonctions de Schur forment une base autoduale. Autrement dit, elles sont orthonormées pour le produit scalaire de (2.29) :

$$\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}. \tag{2.36}$$

C'est une conséquence de l'identité de Cauchy

$$\sum_\lambda s_\lambda(X)s_\lambda(Y) = \prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}. \tag{2.37}$$

Nombres de Kostka

Soit λ et μ deux partitions. On note $\mathrm{Tab}(\lambda, \mu)$ l'ensemble des tableaux de forme λ, et de poids x^μ. On appelle *nombre de Kostka* et on note $K_{\lambda\mu}$ le nombre de ces tableaux. On peut donc reformuler la définition combinatoire des fonctions de Schur de la manière suivante

$$s_\lambda = \sum_\mu K_{\lambda\mu} m_\mu. \tag{2.38}$$

Par dualité, on en déduit la formule donnant les fonctions complètes comme combinaisons linéaires des fonctions de Schur :

$$h_\mu = \sum_\mu K_{\lambda\mu} s_\lambda. \tag{2.39}$$

Les propriétés des fonctions de Schur, et en particulier leur orthogonalité, sont expliquées par la théorie des représentations qui les interprète comme les caractéristiques des représentations irréductibles des groupes symétriques ou comme les caractères des représentations irréductibles des groupes linéaires.

2.3 Caractères

2.3.1 Fonctions symétriques et caractères

Le but de cette sous-section est de décrire les interprétations classiques des fonctions symétriques dans la théorie des représentations du groupe symétrique [75, 62] et du groupe linéaire [84]. Nous commençons par un bref rappel des définitions élémentaires de cette théorie. Tous les espaces vectoriels seront des espaces vectoriels complexes.

Représentations

Soit G un groupe fini, par exemple $\mathfrak{S}_n$. On appelle *représentation* de G tout couple (ρ, V) où V est un espace vectoriel de dimension finie et ρ est un morphisme de G dans $GL(V)$. On dira alors que V est un G-*module*. Pour simplifier, on écrira $g \cdot v$ au lieu de $\rho(g)(v)$ si $g \in G$ et $v \in V$. On dit qu'une application linéaire $\varphi : V \to W$ est un morphisme de G-modules si le diagramme suivant commute, pour tout $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array} \tag{2.40}$$

Un des buts de la théorie des représentations est de classifier les représentations des groupes à isomorphisme près. Pour ceci, on décompose les représentations en représentations élémentaires :

On appelle *sous-représentation* ou *sous-module* d'une représentation V tout sous-espace $U \subset V$ stable par G. Une représentation V est dite *irréductible* si elle n'admet pas de sous-représentation non triviale (distincte de V et de 0), on dit aussi que le G-module V est *simple*. Une représentation est dite *indécomposable* si elle ne peut pas s'écrire comme somme directe de deux représentations $V = V_1 \oplus V_2$. Dans le cas des groupes finis il y a équivalence entre les deux (en caractéristique nulle). On a donc le théorème :

Théorème 2.20 *Toute représentation complexe d'un groupe fini G est une somme directe de représentations irréductibles de G.*

On dit que l'algèbre d'un groupe fini est *semi-simple*. La stratégie de la théorie des représentations est donc d'identifier les représentations irréductibles et de comprendre comment elles se combinent entre elles.

Caractères

Pour identifier un endomorphisme à similitude près, on peut utiliser, entre autres, comme invariant le polynôme caractéristique, c'est à dire la collection des fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres. Dans le cas d'un G-module V, la donnée pour tous les éléments de g du polynôme caractéristique de $\rho(g)$ est très redondante : en effet la somme des valeurs propres de g^p est égale à la somme des puissances $n^{\text{ème}}$ des valeurs propres de g. Pour connaître le polynôme caractéristique de tous les éléments de G, il suffit donc de connaître la somme des valeurs propres, c'est à dire la trace de $\rho(g)$ pour tous les $g \in G$:

Définition 2.21 *Soit (ρ, V) une représentation d'un groupe fini G. On appelle* caractère *de la représentation l'application χ_V de G dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)). \tag{2.41}$$

De la relation classique $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, on déduit en particulier

$$\chi_V(h^{-1}gh) = \chi_V(g). \tag{2.42}$$

Les caractères sont donc des fonctions de G à valeurs dans $\mathbb{C}$, constantes sur les classes de conjugaison. On appelle une telle fonction *fonction centrale*.

On définit sur les fonctions centrales le produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u(g) v(g^{-1}). \tag{2.43}$$

où u et v sont deux fonctions centrales et $|G|$ désigne l'ordre (c'est-à-dire le cardinal) du groupe fini G. Le théorème suivant décrit tout l'intérêt de cette construction :

Théorème 2.22 *Soit G un groupe fini.*

- *il y a autant de modules irréductibles V_λ que de classes de conjugaison λ de G,*
- *les caractères χ_λ des modules irréductibles V_λ forment une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$,*
- *deux modules sont isomorphes si et seulement si ils ont même caractère.*

Pour connaître un module V, il suffit donc de connaître son caractère χ_V, les coefficients de la décomposition de χ_V sur les caractères irréductibles χ_λ donnent la décomposition de V en somme directe de modules irréductibles.

Induction, restriction, réciprocité de Frobenius

Soit G un groupe fini et H un sous groupe. Soit (ρ, V) une représentation de G. On appelle *restriction* de V à H la représentation $(\rho_{|H}, V)$. On la note $\mathrm{Res}_H^G V = \mathrm{Res}\, V$. La construction duale est appelée induction. Supposons que V soit une représentation de G et $W \subset V$ un sous-espace invariant par H. Alors pour $g \in G$, le sous espace

$$g \cdot W = \{g \cdot w \mid w \in W\} \tag{2.44}$$

dépend seulement de la classe à gauche gH de G modulo H. Si c est une classe de G/H, on note $c \cdot W$ ce sous espace de V. On dit que V est induit par W si et seulement si V est la somme directe de ces sous-espaces :

$$V = \bigoplus_{c \in G/H} c \cdot W. \tag{2.45}$$

On note alors $V = \mathrm{Ind}_H^G W = \mathrm{Ind}\, W$. Par exemple la représentation de G sur les classes modulo H est la représentation induite par la représentation triviale de H.

La formule de réciprocité de Frobenius relie les caractères des représentions restreintes et induites.

Théorème 2.23 (Réciprocité de Frobenius) *Soient G un groupe fini et H un sous groupe. Soient W une représentation de H et U une représentation de G. On a*

$$\langle \chi_{\mathrm{Ind}\, W}, \chi_U \rangle_G = \langle \chi_W, \chi_{\mathrm{Res}\, U} \rangle_H . \tag{2.46}$$

Caractères du groupe symétrique

Nous allons maintenant voir comment cette construction s'applique au groupe symétrique et la relier aux fonctions symétriques.

Rappelons tout d'abord que toute permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ se factorise de manière unique en un produit de cycles disjoints, et que la partition qui code la longueur des cycles est appelée type cyclique de la permutation. On la note ici $\mathrm{Cycl}(\sigma)$. Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont même type cyclique.

Définition 2.24 *Soit $\lambda = 1^{m_1} \ldots i^{m_i}$ une partition. On appelle* indicateur de cycle *de la classe de conjugaison associée à λ, la fonction symétrique $z_\lambda^{-1} p_\lambda$ où p_λ est le produit de sommes de puissances et $z_\lambda = \prod i^{m_i} m_i!$*

On note R^n l'espace des fonctions centrales sur $\mathfrak{S}_n$ et

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} R^n. \tag{2.47}$$

Soit u une fonction centrale sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On lui associe une fonction symétrique appelée *caractéristique* de Frobenius définie par

$$\mathrm{ch}(u) = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda u(\lambda) \tag{2.48}$$

où $u(\lambda)$ est la valeur de u sur les permutations de type cyclique λ. Le fait fondamental est le suivant :

Proposition 2.25 *La caractéristique de Frobenius est une isométrie de R^n dans la composante homogène Sym^n de degré n de Sym.*

Ainsi les images des caractères irréductibles forment une base orthonormée de Sym^n. Cette base n'est autre que la base des fonctions de Schur. Donc pour décomposer en irréductibles une représentation de $\mathfrak{S}_n$ on calcule d'abord sa caractéristique. Ensuite, il suffit, dans l'algèbre des fonctions symétriques, de décomposer cette caractéristique sur les fonctions de Schur pour avoir les multiplicités.

Ces calculs sont aidés par le fait que l'induction de $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ correspond au produit des fonctions symétriques : si U et V sont deux représentations, on a

$$\mathrm{ch}(U)\,\mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}\left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} U \times V\right). \tag{2.49}$$

Ici on a confondu une représentation avec son caractère. Ainsi, on note $\mathrm{ch}(W)$ au lieu de $\mathrm{ch}(\chi_W)$. On gardera cette notation dans la suite.

On a alors les correspondances suivantes entre représentations et caractéristiques. La représentation triviale de $\mathfrak{S}_n$ a pour caractéristique la fonction complète h_n. La représentation irréductible V_λ (module de Specht) a pour caractère la fonction de Schur s_λ. La fonction élémentaire e_n correspond à la représentation alternée $(\sigma \mapsto \mathrm{Sgn}(\sigma))$.

La table des caractères de $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire le tableau des valeurs $\chi^\lambda(\mu)$ des caractères irréductibles χ_λ sur les classes associées aux partitions μ, est donnée par le produit scalaire de fonctions symétriques :

$$\chi^\lambda(\mu) = \langle s_\lambda, p_\mu \rangle . \tag{2.50}$$

On peut donc transférer tous les calculs de caractères des groupes symétriques dans les fonctions symétriques. On verra des applications de cette théorie dans la section 3.1 (propriété 3.9). La dualité de Schur-Weyl permet, qui plus est, de réutiliser toute cette théorie pour le groupe linéaire.

Caractères du groupe linéaire

La théorie précédente admet des généralisations aux groupes infinis. Il faut alors restreindre les représentations étudiées. Pour ceci, on peut, par exemple, utiliser une structure topologique ou géométrique sur le groupe (groupes compacts, groupes de Lie). Ici, on va se restreindre aux représentations polynomiales de GL_N.

Soit $(\xi_i)_{1 \leq i \leq N}$ la base canonique de $\mathbb{C}^N$. Soit une représentation (ρ, V) de GL_N dans un espace V de dimension p. Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une base de V. La représentation (ρ, V) sera dite *polynomiale* si les coefficients des matrices des $\rho(g)$ dans la base $(v_1, \ldots, v_p)$ sont des polynômes en les coefficients de g dans la base (ξ_i). Par extension de la théorie de caractères des groupes finis, on va étudier l'application

$$\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)). \tag{2.51}$$

Par hypothèse, si V est une représentation polynomiale, le caractère de V est une fonction polynomiale des coefficients de g dans la base (ξ_i).

Soit H le sous groupe des matrices diagonales. On note $\mathrm{Diag}(x_1, \dots, x_N)$ la matrice diagonale

$$\mathrm{Diag}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_N \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

La trace est un invariant de conjugaison (ici cela veut dire qu'elle ne dépend pas de la base dans laquelle on la calcule), en particulier pour toute matrice de permutation $S \in GL_N$, on a

$$\chi_V(S^{-1}gS) = \chi_V(g). \tag{2.53}$$

Cela veut dire que les traces des matrices diagonales $\mathrm{Diag}(x_1, \dots, x_N)$ sont des fonctions symétriques de $\{x_1, \dots, x_N\}$. Si V est une représentation on appelle *caractère* de V la fonction symétrique χ_V de $\mathrm{Sym}(x_1, \dots, x_N)$ telle que

$$\chi_V(x_1, x_2, \dots, x_N) = \mathrm{Tr}\left(\rho(\mathrm{Diag}(x_1, x_2, \dots, x_N))\right). \tag{2.54}$$

On montre alors que

Théorème 2.26

- *Une représentation polynomiale est déterminée à isomorphisme près par son caractère.*
- *Les représentations polynomiales irréductibles R_λ de GL_N sont celles dont les caractères sont les fonctions de Schur $(s_\lambda)_{\ell(\lambda)\leq N}$.*

On a alors la correspondance suivante entre représentations et caractères : le caractère de la somme directe de deux représentations est la somme des caractères, le produit tensoriel correspondant au produit des fonctions symétriques. Le caractère de la représentation vectorielle de GL_N sur $\mathbb{C}^N$ est la fonction élémentaire $e_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Dualité de Schur-Weyl

Soient $V = \mathbb{C}^N$ et n un entier. Considérons l'espace vectoriel $V^{\otimes n}$. Le groupe linéaire agit diagonalement sur $V^{\otimes n}$:

$$g(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n) = g(u_1) \otimes g(u_2) \otimes \cdots \otimes g(u_n). \tag{2.55}$$

Le groupe symétrique agit à droite par permutation des composantes :

$$(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n)^\sigma = u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)}. \tag{2.56}$$

On a donc deux morphismes d'algèbres :

$$GL(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \longleftarrow \mathbb{C}\mathfrak{S}_n. \tag{2.57}$$

Le théorème de Schur Weyl affirme que les images de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ et de $GL(V)$ dans $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ sont les commutants l'une de l'autre.

Nous verrons dans le chapitre 6 une extension de ceci en considérant $T(S^+(V))$ (algèbre tensorielle de l'algèbre symétrique) et en remplaçant $\mathfrak{S}_n$ par une structure d'algèbre sur les doubles classes $\mathfrak{S}_\lambda\backslash\mathfrak{S}_N/\mathfrak{S}_\mu$ (voir théorème 6.57).

2.3.2 Différences divisées et modules de Demazure

Dans son étude de la variété de drapeaux, Demazure a vu apparaître des opérateurs particuliers agissant sur les polynômes appelés différences divisées [11, 12, 2]. Nous rappelons ici les éléments de cette construction (voir aussi [50, 52, 63]).

On appelle *différence divisée* l'opérateur ∂_{xy} défini par

$$\partial_{xy} f = \frac{f(x,y) - f(y,x)}{x-y}, \tag{2.58}$$

où f est une fonction des deux variables x et y. De manière équivalente

$$\partial_{xy} = (x-y)^{-1}(1-\sigma_{xy}). \tag{2.59}$$

où σ_{xy} est la transposition qui échange x et y. Dans la suite nous allons nous restreindre aux fonctions f qui sont des polynômes en les variables $x_1, \ldots, x_n$. L'opérateur $\partial_i = \partial_{x_i y_i}$ laisse stable l'espace des polynômes tout en abaissant le degré de 1. En effet, si f est un polynôme $(1-\sigma_{xy})f$ est toutjours divisible par $(x-y)$.

Sur le produit fg, l'opérateur ∂_i agit par

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + (\sigma_i f)(\partial_i g). \tag{2.60}$$

en particulier si $f(x_i, x_{i+1}) = f(x_{i+1}, x_i)$, on a

$$\partial_i(fg) = f\,\partial_i g. \tag{2.61}$$

On montre que les différences divisées vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\partial_i^2 &= 0 && \text{pour } 1 \le i \le n-1,\\
\partial_i\,\partial_j &= \partial_j\,\partial_i && \text{pour } |i-j| > 1,\\
\partial_i\,\partial_{i+1}\,\partial_i &= \partial_{i+1}\,\partial_i\,\partial_{i+1} && \text{pour } 1 \le i \le n-2.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Ceci a la conséquence importante suivante : soit σ une permutation. Soit $\sigma_{i_1}\dots\sigma_{i_p}$ un mot réduit pour σ. Les relations de tresses assurent que l'opérateur ∂_σ défini par

$$\partial_\sigma = \partial_{i_1}\dots\partial_{i_p} \tag{2.63}$$

est indépendant du mot réduit choisi pour σ. De plus, on montre que si $\sigma_{j_1}\dots\sigma_{j_p}$ n'est pas un mot réduit alors l'opérateur $\partial_{j_1}\dots\partial_{j_p}$ est nul.

On peut ainsi considérer l'opérateur ∂_ω associé à la permutation maximale. Il s'exprime de la manière suiante :

$$\partial_\omega = \frac{1}{a_\delta}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{Sgn}(\sigma)\,\sigma\,. \tag{2.64}$$

où a_δ désigne comme précédemment l'alternant $\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$. On en déduit l'expression des fonctions de Schur à partir des différences divisées :

$$s_\lambda = \partial_\omega\, x^{\lambda+\delta}. \tag{2.65}$$

Remarquons que les relations (2.62) peuvent être vues comme des relations de définition d'une algèbre ayant pour base $(\partial_\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$. Cette algèbre est parfois appelée algèbre Nil-Hecke.

Différences divisées isobares

Dans la suite, on va plutôt utiliser les opérateurs *isobares* ainsi nommés car ils préservent le degré. Ils sont définis par

$$\pi_i\, f = \partial_i(x_i f). \tag{2.66}$$

A la place des relations (2.62), ils vérifient

$$\begin{aligned}
\pi_i^2 &= \pi_i && \text{pour } 1 \le i \le n-1,\\
\pi_i\,\pi_j &= \pi_j\,\pi_i && \text{pour } |i-j| > 1,\\
\pi_i\,\pi_{i+1}\,\pi_i &= \pi_{i+1}\,\pi_i\,\pi_{i+1} && \text{pour } 1 \le i \le n-2.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

On peut donc, de la même manière, définir π_σ pour toute permutation σ.

Différences divisées et symétrisation

La propriété fondamentale des différences divisées est la suivante. On a l'égalité entre opérateurs :

$$\sigma_i\,\partial_i = \partial_i \quad \text{ou de manière équivalente} \quad \sigma_i\,\pi_i = \pi_i\,. \tag{2.68}$$

Ainsi l'image de n'importe quel polynôme par π_i est une fonction symétrique par rapport aux variables x_i et x_{i+1}. Par conséquent pour une permutation quelconque, si i est un recul de σ, on peut alors l'écrire $\sigma = \sigma_i\,\sigma'$ et donc l'image par π_σ est un polynôme symétrique par rapport à σ_i. Ceci permet, à partir du monôme x^δ, de définir des polynômes ayant toutes les symétries partielles possibles. Ce sont les fameux polynômes de Schubert [2, 12, 50, 63].

On appelle symétriseur maximal l'opérateur π_ω où ω est la permutation maximale.

Proposition 2.27 *Le symétriseur maximal π_ω est un projecteur sur l'espace des polynômes symétriques.*

Le symétriseur maximal peut s'écrire

$$\pi_\omega\,f = \frac{1}{a_\delta}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{Sgn}(\sigma)(x^\delta f) = \partial_\omega(x^\delta f). \tag{2.69}$$

Les différences divisées permettent donc de factoriser l'opérateur de Jacobi en symétriseurs élémentaires, en particulier la fonction de Schur s'exprime très simplement par

$$s_\lambda = \pi_\omega\,x^\lambda. \tag{2.70}$$

Tout ceci provient en fait de considérations au niveau des modules du groupe linéaire. Nous rappelons ici brièvement cette construction [63, 11].

Poids, vecteur de poids

Dans la section 2.3.1, on a vu l'importance du sous-groupe H des matrices diagonales. On montre que ce sous groupe est simultanément diagonalisable dans tous les modules polynomiaux.

Définition 2.28 *Soient V un GL_N-module polynomial et $v \in V$. On dit que v est un* vecteur de poids *s'il est vecteur propre simultané de tout le sous-groupe H de GL_N.*

Soit v un vecteur de poids d'un module polynomial V. Par définition, dans un module polynomial, les coefficients de la matrices de représentation $\rho(M)$ sont des polynômes des coefficients de M. Pour toute matrice diagonale $M = \mathrm{Diag}(x_1, \dots, x_N)$, l'image de v par M est donc de la forme

$$\mathrm{Diag}(x_1, \dots, x_N) \cdot v = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_N^{p_N}\, v, \tag{2.71}$$

où $P = (p_1, \dots, p_N)$ est un N-uplet d'entiers qui ne dépend pas de $x_1, \dots, x_N$. On l'appelle *poids* du vecteur v. Dans la suite, par commodité, on identifiera P avec x^P (qui est habituellement noté e^P en théorie des représentations). On conservera le nom de *poids* pour x^P.

Soit B^+ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures appelé *sous-groupe de Borel*. On appelle *vecteur de plus haut poids* d'un module V tout vecteur de poids v tel que

$$\text{pour tout} \quad b \in B^+, \qquad b \cdot \mathbb{K}v = \mathbb{K}v. \tag{2.72}$$

Le poids d'un vecteur de plus haut poids est alors un N-uplet P décroissant, que l'on verra comme une partition $\lambda = (p_1 \geq \dots \geq p_N)$. Un tel poids est dit *dominant*. On montre que tout vecteur de plus haut poids engendre un module irréductible sous l'action de GL_N. Aux scalaires près, un module irréductible contient un et un seul vecteur de plus haut poids. On retrouve ainsi la correspondance entre partitions et modules irréductibles de GL_N.

Groupe de Weyl, poids extrémaux

Le caractère d'un module est la trace de H sur ce module. Dans une base de vecteurs de poids, cette trace est la fonction génératrice des poids. Le groupe symétrique agit naturellement sur l'espace des poids par

$$\sigma(p_1, \dots, p_N) = (p_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, p_{\sigma^{-1}(N)}). \tag{2.73}$$

Dans le contexte des représentations des groupes de Lie, cette action s'interprète comme une action d'un groupe de réflexions dans un espace euclidien. On appelle alors le groupe symétrique *groupe de Weyl*. En fait cette action correspond à une action sur les vecteurs.

Considérons maintenant un module irréductible V. Il est engendré par un vecteur v_0 de poids dominant λ. On appelle *poids extrémaux* du module V les poids

$$\sigma(\lambda) \quad \text{pour} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_N. \tag{2.74}$$

Les vecteurs $\sigma(v_0)$ correspondants sont appelés *vecteurs extrémaux*.

Modules de Demazure

Soient V un module irréductible de plus haut poids λ et v_0 un vecteur de plus haut poids λ. Soit σ une permutation. On appelle *module de Demazure* le sous-module $B^+(\sigma(v_0))$, de V engendré par $\sigma(v_0)$ sous l'action de B^+. On appelle *caractère de Demazure* la fonction génératrice des poids du module $B^+(\sigma(v_0))$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.29 (Formule des caractères de Demazure)
Soit V un module irréductible engendré par le vecteur v_0 de plus haut poids λ. Soit σ une permutation et $v = \sigma(v_0)$ le vecteur extrémal associé. Le caractère du module de Demazure B^+v est donné par

$$\chi(B^+v) = \pi_\sigma\, x^\lambda. \tag{2.75}$$

2.4 q-analogues

Dans la section précédente, on a défini des opérateurs appelés différences divisées qui agissent sur les polynômes. Ces opérateurs vérifient des relations de commutation très particulières, ils engendrent ainsi une algèbre qui est en fait une dégénérescence d'une algèbre appelée algèbre de Hecke. Cette dernière est une déformation à un paramètre de l'algèbre du groupe symétrique, elle permet de définir un q-analogue de l'opérateur de symétrisation. Ce nouvel opérateur apparaît dans une expression d'une autre base des fonctions symétriques : les fonctions de Hall-Littlewood. Ces fonctions sont des déformations des fonctions de Schur. Elles peuvent se construire à partir de l'algèbre de Hecke, de la même manière que les différences divisées donnent les fonctions de Schur.

2.4.1 Algèbre de Hecke

Définition 2.30 *Soit q un paramètre formel ou complexe. On appelle* algèbre de Hecke $H_n(q)$ *du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (type A_{n-1}) la $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-algèbre engendrée par les éléments $(T_i)_{i=1,\ldots,n-1}$ avec les relations*

$$\begin{aligned} T_i^2 &= (q-1)\, T_i + q && \textit{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ T_i\, T_j &= T_j\, T_i && \textit{pour } |i-j| > 1, \\ T_i\, T_{i+1}\, T_i &= T_{i+1}\, T_i\, T_{i+1} && \textit{pour } 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Ainsi pour $q = 1$, on a $H_n(1) = \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. On dit que la *spécialisation* $q = 1$ de l'algèbre de Hecke est l'algèbre du groupe symétrique. On peut en fait montrer que si q est non nul et différent d'une racine de l'unité, $H_n(q)$ est isomorphe à l'algèbre du groupe symétrique $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$.

Soit $\sigma = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p}$ un mot réduit. Les relations de tresses assurent que l'élément $T_{i_1} \dots T_{i_p}$ est indépendant du mot réduit pour σ. On note cet élément T_σ. Par convention, on pose $T_{\mathrm{Id}} = 1$, quand Id est l'identité du groupe symétrique. La famille $(T_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ est une base de l'algèbre de Hecke.

Conjugaison

On peut construire facilement une autre base de l'algèbre de Hecke. En effet, si T_i vérifie l'équation

$$T_i^2 = (q-1)\, T_i + q \quad \text{ou encore} \quad (T_i - q)(T_i + 1) = 0, \tag{2.77}$$

alors l'opérateur $\overline{T}_i = T_i + (q-1)$ vérifie aussi cette équation. Ceci définit une involution de l'algèbre de Hecke appelée *conjugaison* et notée $T \mapsto \overline{T}$.

Note 2.31 On définit souvent l'algèbre de Hecke avec deux paramètres q_1 et q_2 en remplaçant la relation quadratique par

$$(T_i - q_1)(T_i - q_2) = 0. \tag{2.78}$$

La conjugaison correspond alors à l'échange des deux racines q_1 et q_2. Remarquons dans ce cas que la structure de l'algèbre ne dépend que du rapport q_1/q_2. Les conventions choisies ici sont celles que l'on obtient quand on interprète q comme le cardinal d'un corps fini (voir la section suivante). Elles permettent en outre la spécialisation $q = 0$.

Algèbre de Hecke dégénérée

Si l'on spécialise $q = 0$ dans les relations de définition de l'algèbre de Hecke, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T_i^2 &= -\, T_i & &\text{pour } 1 \le i \le n-1, \\ T_i\, T_j &= T_j\, T_i & &\text{pour } |i-j| > 1, \\ T_i\, T_{i+1}\, T_i &= T_{i+1}\, T_i\, T_{i+1} & &\text{pour } 1 \le i \le n-2. \end{aligned} \tag{2.79}$$

On obtient une nouvelle algèbre appelée *algèbre de Hecke dégénérée*. Les relations vérifiées par les π_i montrent donc que l'application

$$T_i \mapsto -\,\pi_i\,. \tag{2.80}$$

est une action de l'algèbre de Hecke dégénérée sur l'anneau des polynômes. Remarquons que la conjugaison nous fournit une deuxième action de l'algèbre de Hecke :

$$T_i \mapsto \overline{\pi}_i = \pi_i - 1. \tag{2.81}$$

Notons que si σ est une permutation quelconque, on a la relation

$$\pi_\sigma = \sum_{\mu \leq \sigma} \overline{\pi}_\mu, \tag{2.82}$$

l'ordre sur les permutations étant l'ordre de Bruhat.

Action de l'algèbre de Hecke sur les polynômes

Le but de ce qui suit est d'obtenir un q-analogue de l'opérateur maximal π_ω. On utilise pour cela une action de l'algèbre de Hecke sur les polynômes. L'algèbre de Hecke générique $H_n(q)$ agit sur $\mathbb{C}[X]$ par la formule [8, 60, 50] :

$$T_i\, f = (q-1)\,\pi_i\, f + \sigma_i\, f. \tag{2.83}$$

C'est une action fidèle, c'est-à-dire que si T et T' sont deux éléments de l'algèbre de Hecke qui ont même action sur les polynômes, ils sont égaux. Autrement dit,

$$\text{si pour tout } f \in \mathbb{K}[q, q^{-1}] \quad Tf = T'f \quad \text{alors} \quad T = T'. \tag{2.84}$$

Il est ainsi possible de calculer dans l'algèbre de Hecke en considérant l'action de cette dernière sur les polynômes. De plus, remarquons que si f est un polynôme symétrique, alors, pour tout g, on a $T(fg) = f\,T(g)$. Ainsi pour calculer dans l'algèbre de Hecke, il suffit de calculer sur une base de l'espace des polynômes considéré comme module libre sur l'anneau des polynômes symétriques.

On peut ainsi en déduire une caractérisation des polynômes symétriques :

Proposition 2.32 *Un polynôme f est symétrique si et seulement si il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

– *pour tout i,* $T_i\, f = qf$, – *pour tout i,* $\overline{T}_i\, f = f$. (2.85)

Équation de Yang-Baxter

La proposition précédente indique que l'on doit pouvoir construire des opérateurs de q-symétrisation à l'aide de cette action de l'algèbre de Hecke. C'est en effet le cas. Pour ceci, à la suite de [18], on pose :

Définition 2.33 *On appelle opérateurs* élémentaires de q-symétrisation et q-antisymétrisation *les opérateurs définis par :*

$$\square_i = T_i + 1 \quad et \quad \nabla_i = T_i - q. \tag{2.86}$$

Le fait fondamental est qu'ils vérifient les relations suivantes :

$$\square_i^2 = (q+1)\,\square_i \quad \text{et} \quad \nabla_i^2 = -(q+1)\,\nabla_i \tag{2.87}$$

A un scalaire près, ce sont donc des idempotents (on parle alors de quasi-idempotents). On cherche à définir $\square_\sigma$ et ∇_σ pour toute permutation σ. La difficulté vient du fait que ces opérateurs ne vérifient pas la relation de tresse mais une déformation de cette dernière appelée équation de Yang-Baxter :

$$\square_i(\square_{i+1} - \frac{q}{1+q})\,\square_i = \square_{i+1}(\square_i - \frac{q}{1+q})\,\square_{i+1}, \tag{2.88}$$

$$\nabla_i(\nabla_{i+1} + \frac{q}{1+q})\,\nabla_i = \nabla_{i+1}(\nabla_i + \frac{q}{1+q})\,\nabla_{i+1}\,. \tag{2.89}$$

Plus généralement, soit $[u]_q$ le q-entier $[u]_q = \frac{1-q^u}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{r-1}$. Les opérateurs $R_i(u,v)$ définis par

$$R_i(u,v) = \square_i - q\frac{[v-u-1]_q}{[v-u]_q} \quad \text{ou} \quad R_i(u,v) = \nabla_i + q\frac{[v-u-1]_q}{[v-u]_q} \tag{2.90}$$

sont deux solutions de l'équation suivante qui est la forme habituelle de l'équation de Yang-Baxter [85] :

$$R_i(u,v)R_{i+1}(u,w)R_i(v,w) = R_{i+1}(w,v)R_i(u,w)R_{i+1}(u,v). \tag{2.91}$$

Cette relation se comprend mieux si on l'étend à toutes les décompositions réduites. Soit $\sigma_{i_1}\,\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_p}$ une décomposition réduite d'une permutation σ. Cette décomposition réduite définit une suite de transpositions :

$$\tau_1 = \sigma_{i_1}, \quad \tau_2 = (\sigma_{i_1})\,\sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}), \quad \tau_3 = (\sigma_{i_1}\,\sigma_{i_2})\,\sigma_{i_3}(\sigma_{i_2}\,\sigma_{i_1}),\ \ldots \tag{2.92}$$

L'ensemble de ces transpositions correspond à l'ensemble des inversions de σ. Il ne dépend donc pas du mot réduit de σ. Une fonction f de l'ensemble des transpositions dans un anneau commutatif définit une solution de l'équation de Yang-Baxter si elle vérifie : pour toute permutation σ et pour tout mot réduit de σ, les produits d'opérateurs

$$(\Box_{i_1} + f(\tau_{i_1}))(\Box_{i_2} + f(\tau_{i_2}))(\Box_{i_3} + f(\tau_{i_3}))\cdots \tag{2.93}$$
$$(\nabla_{i_1} - f(\tau_{i_1}))(\nabla_{i_2} - f(\tau_{i_2}))(\nabla_{i_3} - f(\tau_{i_3}))\cdots \tag{2.94}$$

sont indépendants du choix du mot réduit de la permutation σ. On en trouve une solution en prenant un nouvel ensemble de variables $\{u_1, \ldots, u_p\}$ et en posant (voir par exemple [7]) :

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{qu_i - u_j}{u_i - u_j}. \tag{2.95}$$

Ici, on a seulement besoin du cas particulier

$$\{u_1, \ldots, u_p\} = \{1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}\}. \tag{2.96}$$

Dans ce cas on trouve pour f :

$$f(\sigma_{ij}) = q\frac{[j-i-1]_q}{[j-1]_q}. \tag{2.97}$$

On définit ainsi des opérateurs $\Box_\sigma$ et ∇_σ pour toute permutation σ.

Exemple 2.34 Par exemple, soit le mot réduit $\sigma = \sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_3\,\sigma_2$ de la permutation $\sigma = 3412$. La suite de transpositions associée est

$$\begin{aligned}
\tau^1 &= \sigma_2 &&= \sigma_{32},\\
\tau^2 &= \sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_2 &&= \sigma_{42},\\
\tau^3 &= \sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_1\,\sigma_3\,\sigma_2 &&= \sigma_{31},\\
\tau^4 &= \sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_3\,\sigma_2 &&= \sigma_{41}\,.
\end{aligned}$$

Ce qui donne les opérateurs :

$$\Box_{3412} = \Box_2\left(\Box_3 - \frac{q}{1+q}\right)\left(\Box_1 - \frac{q}{1+q}\right)\left(\Box_2 - \frac{q+q^2}{1+q+q^2}\right)$$
$$\nabla_{3412} = \nabla_2\left(\nabla_3 + \frac{q}{1+q}\right)\left(\nabla_1 + \frac{q}{1+q}\right)\left(\nabla_2 + \frac{q+q^2}{1+q+q^2}\right)$$

Nous allons seulement utiliser le cas où σ est la permutation maximale ω.

q-symétriseur et q-antisymétriseur

On appelle *q-symétriseur* et *q-antisymétriseur* les opérateurs maximaux $\Box_\omega$ et ∇_ω. La construction précédente donne une factorisation de ces deux opérateurs pour chaque mot réduit de ω. Leur nom est justifié par les expressions suivantes

$$\Box_\omega = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_\sigma \quad \text{et} \quad \nabla_\omega = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-q)^{\ell(\omega\sigma)}\, T_\sigma \tag{2.98}$$

qui expriment que ce sont des q-analogues des opérateurs de symétrisation et antisymétrisation. De la construction à partir de l'équation de Yang-Baxter, on peut déduire la proposition :

Proposition 2.35 *Soit i un entier. Il existe quatre permutations σ, σ', δ et δ' telles que :*

$$\Box_\omega = \Box_i\, \Box_\sigma = \Box_{\sigma'}\, \Box_i \quad \textit{et} \quad \nabla_\omega = \nabla_i\, \nabla_\delta = \nabla_{\delta'}\, \nabla_i$$

En particulier, cela permet de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.36 *Le q-symétriseur $\Box_\omega$, considéré comme agissant sur les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$, a pour image l'espace des polynômes symétriques.*

De plus, si l'on prend les coefficients dans $\mathbb{C}(q)$, l'opérateur $\dfrac{1}{[n]_q!}\Box_\omega$ est un projecteur sur l'espace des polynômes symétriques.

Remarquons que les factorisations de Young dans le cas du groupe symétrique se généralisent à l'algèbre de Hecke de la manière suivante :

$$\Box_\omega = \Box_{\omega'}\,(1 + T_{n-1} + T_{n-1}\,T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}\ldots T_1)\,, \tag{2.99}$$
$$\Box_\omega = (1 + T_{n-1} + T_{n-2}\,T_{n-1} + \cdots + T_1\,T_2\ldots T_{n-1})\,\Box_{\omega'}\,. \tag{2.100}$$

où ω' est la permutation maximale de $\mathfrak{S}_{n-1}$.

2.4.2 Fonctions de Hall-Littlewood

Dans [18] les auteurs utilisent la construction précédente pour donner une nouvelle expression des fonctions de Hall-Littlewood. Dans cette section nous allons rappeler les définitions de ces fonctions, ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

Définitions

Rappelons que la fonction de Schur s_λ est définie par

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \frac{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma)\,\sigma(x^\lambda x^\delta)}{\prod_{i<j}(x_i - x_j)}. \tag{2.101}$$

La fonction de Hall-Littlewood R_λ est une q-déformation de la fonction de Schur s_λ :

$$R_\lambda = \frac{1}{a_\delta} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma)\,\sigma\left(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}\prod_{i<j}(x_i - qx_j)\right). \tag{2.102}$$

L'alternant a_δ est antisymétrique, ce qui signifie que $\sigma\, a_\delta = \mathrm{Sgn}(\sigma)a_\delta$. On peut donc réécrire la définition précédente comme suit :

$$R_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma\left(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}\prod_{i<j}\frac{x_i - qx_j}{x_i - x_j}\right). \tag{2.103}$$

On montre alors que les coefficients de R_λ sont tous divisibles par un polynôme en q. En effet, considérons la série génératrice $v_\lambda(q)$ des permutations qui fixent le monôme x^λ comptées par leur longueur :

$$v_\lambda(q) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\lambda} q^{\ell(\sigma)}. \tag{2.104}$$

Les permutations de $\mathfrak{S}_\lambda$ sont les permutations de $\mathfrak{S}_{m_0}\times\mathfrak{S}_{m_1}\times\mathfrak{S}_{m_2}\times\dots$ où m_i est la multiplicité de i dans λ (On a rajouté des 0 a la fin pour obtenir une partition de longueur n). On trouve donc que

$$v_\lambda(q) = \prod_i [m_i]_q! \tag{2.105}$$

où $[m_i]_q! = \prod_{k\leq i}[k]$ est la q-factorielle. On voit alors facilement que v_λ divise le polynôme R_λ.

Définition 2.37 *On appelle* polynômes de Hall-Littlewood *les polynômes symétriques à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$ définis par*

$$P_\lambda(x_1,\dots,x_n;q) = \frac{1}{v_\lambda(q)} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma\left(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}\prod_{i<j}\frac{x_i - qx_j}{x_i - x_j}\right) \tag{2.106}$$

$$P_\lambda(x_1,\dots,x_n;q) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda} \sigma\left(x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}\prod_{i<j}\frac{x_i - qx_j}{x_i - x_j}\right). \tag{2.107}$$

Il est clair sur les deux définitions précédentes que P_λ interpole entre la fonction de Schur s_λ et la fonction monomiale m_λ :

$$P_\lambda(X;0) = s_\lambda(X) \quad \text{et} \quad P_\lambda(X;1) = m_\lambda(X). \tag{2.108}$$

Ces polynômes ont la propriété d'être stables par adjonction de variables : si λ est une partition de longueur inférieure à n, alors

$$P_\lambda(x_1,\ldots,x_n,0;\ q) = P_\lambda(x_1,\ldots,x_n;\ q). \tag{2.109}$$

On peut donc prendre la limite quand n tend vers l'infini et parler de *fonctions de Hall-Littlewood.*

Soit $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}[q]}$ l'algèbre des fonctions symétriques à coefficient dans l'anneau $\mathbb{Z}[q]$. Les fonctions de Hall-Littlewood forment une base de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}[q]}$. De plus si l'on écrit les fonctions de Hall-Littlewood dans la base des fonctions de Schur

$$P_\lambda = \sum_\mu c_{\lambda\mu} s_\mu, \tag{2.110}$$

les coefficients $c_{\lambda\mu}$ sont nuls sauf si $\lambda \trianglerighteq \mu$ pour l'ordre de dominance des partitions et $c_{\lambda\lambda} = 1$. On dit que la matrice de transition est unitriangulaire supérieure.

Fonctions de Hall-Littlewood et algèbre de Hecke

Il est remarquable que le symétriseur de Littlewood admette une factorisation dans l'algèbre de Hecke. On peut ainsi obtenir une expression des fonctions de Hall-Littlewood à partir de l'algèbre de Hecke.

Rappelons que le q-symétriseur $\square_\omega$ a pour image l'algèbre des polynômes symétriques. On montre alors que

$$P_\mu(x_1,\ldots,x_n;q^{-1}) = q^{-\binom{n}{2}} \frac{1}{v_\lambda(q^{-1})} \square_\omega(x^\mu). \tag{2.111}$$

Cette expression va nous permettre de généraliser les fonctions de Hall-Littlewood aux fonctions quasi-symétriques qu moyen d'une action particulière de l'algèbre de Hecke.

Polynômes de Kostka-Foulkes

Les propriétés combinatoires des fonctions de Hall-Littlewood sont plus visibles sur leur base duale : On appelle fonctions de Hall-Littlewood modifiées la base duale (Q'_μ) de la base (P_λ). C'est donc la base adjointe pour le produit scalaire qui rend les fonctions de Schur orthonormées. Les fonctions Q'_μ interpolent entre les fonctions de Schur s_μ et les produits de fonctions complètes h_μ. L'expression de Q'_μ sur les fonctions de Schur est donc un q-analogue de l'expression des h_μ sur s_λ :

$$Q'_\mu(X;q) = \sum_\lambda K_{\lambda\mu}(q) s_\lambda(X) \tag{2.112}$$

Les coefficients $K_{\lambda\mu}(q)$ sont appelés *polynômes de Kostka-Foulkes*. Ce sont des q-analogues des nombres de Kostka. Lascoux et Schützenberger ont montré que $K_{\lambda\mu}(q)$ est la fonction génératrice d'une statistique c appelée *charge* sur l'ensemble $\mathrm{Tab}(\lambda, \mu)$ des tableaux de Young de forme λ et de poids μ [62].

Factorisations aux racines de l'unité

Pour $q = 1$, la fonction Q'_λ se réduit au produit des fonctions complètes h_λ. Elle se factorise donc sous la forme

$$Q'_\lambda(X, 1) = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_p}. \tag{2.113}$$

Cette factorisation admet une généralisation remarquable aux racines de l'unité (voir [44]) :

Théorème 2.38 *Soient $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots p^{m_p}$ une partition et k un entier. On pose alors $m_i = kq_i + r_i$ avec $0 \le r_i < k$ et $\mu = 1^{r_1} 2^{r_2} \cdots p^{r_p}$. Soit ζ une racine primitive $k^{ème}$ de l'unité. On alors la factorisation :*

$$Q'_\lambda(X, \zeta) = Q'_\mu(X, \zeta) \prod_{i \ge 1} \left(Q'_{(i^k)}(X, \zeta) \right)^{q_i}. \tag{2.114}$$

2.5 Fonctions quasi-symétriques, fonctions symétriques non commutatives

2.5.1 Fonctions symétriques non commutatives

Générateurs algébriques

Le théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques (théorème 2.19) affirme que l'algèbre des fonctions symétriques n'est autre que l'algèbre des polynômes commutatifs sur les indéterminées indépendantes e_k, avec la graduation $\deg(e_k) = k$.

En oubliant l'alphabet sous-jacent on définit l'algèbre des *fonctions symétriques non-commutatives* comme l'algèbre associative libre sur une suite infinie Λ_k d'indéterminées non commutatives (appelées fonctions élémentaires non commutatives) graduée par $\deg(\Lambda_k) = k$ [23].

Comme dans le cas commutatif, on définit la série génératrice

$$\lambda(t) = \sum_{n \geq 0} \Lambda_n t^n \tag{2.115}$$

Les fonctions homogènes complètes non commutatives S_n sont définies par leur série génératrice

$$\sigma(t) = \lambda(-t)^{-1} = \sum_{n \geq 0} S_n t^n. \tag{2.116}$$

Réalisation

Il existe une réalisation concrète, notée $\mathbf{Sym}(A)$, des fonctions symétriques non-commutatives dans l'algèbre libre. Soit $A = \{a_n | n \geq 1\}$ une suite infinie d'indéterminées non commutatives de degré 1. On pose

$$\sum_{n \geq 0} \Lambda_n(A) t^n = \overleftarrow{\prod_{i \geq 1}} (1 + t a_i) = \cdots (1 + t a_3)(1 + t a_2)(1 + t a_1). \tag{2.117}$$

Ainsi $\Lambda_n(A)$ est identifié avec la somme de tous les mots strictement décroissants de longueur n et $S_n(A)$ avec la somme des mots de longueur n croissants au sens large. Le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \mathrm{Eval} \ : \mathbf{Sym}(A) &\to \mathrm{Sym}(X) \\ a_i &\mapsto x_i, \end{aligned} \tag{2.118}$$

qui envoie un mot sur son image commutative envoie Λ_n sur e_n. Ainsi **Sym** est un relèvement non commutatif de l'algèbre des fonctions symétriques classiques.

Il est à noter que les fonctions symétriques non-commutatives ainsi réalisées ne sont pas symétriques pour l'action classique du groupe symétrique, mais pour une action différente due à Lascoux et Schützenberger [49].

Sommes de puissances

La définition des analogues des sommes de puissances pose un problème plus subtil : on montre en fait qu'il y a plusieurs possibilités. Si l'on part de l'expression classique

$$H(t) = \exp\left\{\sum_{k\geq 1} p_k \frac{t^k}{k}\right\}, \tag{2.119}$$

on peut choisir de définir les sommes de puissances non commutatives Φ_k par la même formule

$$\sigma(t) = \exp\left\{\sum_{k\geq 1} \Phi_k \frac{t^k}{k}\right\}. \tag{2.120}$$

D'un autre côté, en prenant comme série génératrice $\psi(t) = \sum_{k\geq 1} \Psi_k t^{k-1}$, on peut chercher à voir $\sigma(t)$ comme la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \sigma(t)\psi(t), \tag{2.121}$$

avec la condition initiale $\sigma(0) = 1$. L'existence de ces deux solutions vient du fait qu'il n'y a pas unicité de la notion de dérivée logarithmique pour les séries à coefficients non commutatifs. Il y a en fait une infinité d'autres choix possibles.

Structure de Hopf

On peut montrer que les deux familles de sommes de puissances Φ_k et Ψ_k engendrent la même algèbre de Lie $\mathcal{L}$. De plus, le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt montre que **Sym** peut être identifiée à l'algèbre enveloppante de $\mathcal{L}$. Ainsi, il existe un coproduit canonique sur **Sym** pour lequel $\mathcal{L}$ est l'espace des éléments primitifs. En particulier, on a :

$$\Delta\Psi_k = \Psi_k \otimes 1 + 1 \otimes \Psi_k\,, \qquad \Delta\Phi_k = \Phi_k \otimes 1 + 1 \otimes \Phi_k\,, \tag{2.122}$$

et donc

$$\Delta\Lambda_n = \sum_{k=0}^{n} \Lambda_k \otimes \Lambda_{n-k}\,, \qquad \Delta S_n = \sum_{k=0}^{n} S_k \otimes S_{n-k}\,. \tag{2.123}$$

Enfin l'involution $\tilde{\omega}(\Lambda_n) = (-1)^n S_n$ vue comme antipode fait de **Sym** une algèbre de Hopf.

Bases linéaires

Comme dans le cas des fonctions symétriques, on définit à partir des générateurs algébriques des bases linéaires. Dans notre cas, comme les générateurs ne commutent plus, on indexe les bases par des compositions au lieu de partitions : pour $I = (i_1, \ldots, i_r)$ on pose

$$\Lambda^I = \Lambda_{i_1}\Lambda_{i_2}\cdots\Lambda_{i_r}, \qquad S^I = S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_r}, \tag{2.124}$$

$$\Psi^I = \Psi_{i_1}\Psi_{i_2}\cdots\Psi_{i_r}, \qquad \Phi^I = \Phi_{i_1}\Phi_{i_2}\cdots\Phi_{i_r}. \tag{2.125}$$

On a donc déjà quatre bases de **Sym**.

Fonctions de Schur rubans

Les fonctions de Schur rubans forment une cinquième base particulièrement importante puisqu'elle va jouer le rôle de la base des fonctions de Schur. On les définit par la somme alternée

$$R_I = \sum_{I \succeq J} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)}\, S^J \quad \text{où encore} \quad S^I = \sum_{I \succeq J} R_J. \tag{2.126}$$

L'image commutative de R_I est la fonction de Schur ruban ordinaire introduite par Mac-Mahon [64]. Ces fonctions de Schur rubans ont une règle de multiplication particulièrement simple [65] :

$$R_I\, R_J = R_{I \triangleright J} + R_{I \cdot J} \tag{2.127}$$

Cette règle était connue de Mac-Mahon dans le cas commutatif.

Lien avec l'algèbre des descentes

indexalgèbre !des descentes Dans la réalisation $\mathbf{Sym}(A)$ définie plus haut, R_I est la somme de tous les mots de forme ruban I sur l'alphabet A. Ceci suggère de définir l'isomorphisme linéaire de Σ_n vers $\mathbf{Sym}_n$

$$\alpha(D_K) = R_K. \tag{2.128}$$

Le produit des permutations donne alors un nouveau produit sur les composantes homogène de degré n de **Sym** appelé produit intérieur :

$$F * G = \alpha(\alpha^{-1}(G)\alpha^{-1}(F)). \tag{2.129}$$

Ainsi **Sym** apparaît comme la somme des algèbres des descentes de tous les groupes symétriques :

$$\Sigma = \bigoplus_{n \geq 0} \Sigma_n. \tag{2.130}$$

2.5.2 Fonctions quasi-symétriques

Il reste à définir l'analogue des fonctions monomiales. Rappelons que dans le cas commutatif elles forment la base duale des fonctions complètes. On voit clairement ici, d'après les formules (2.122), que le coproduit de **Sym** est cocommutatif. Par conséquent l'algèbre duale de **Sym** sera elle même commutative. Les fonctions monomiales vont apparaître dans l'algèbre commutative des fonctions quasi-symétriques [24, 66, 23].

Nous allons commencer par fixer quelques notations qui seront utilisées dans toute la suite de la thèse.

Monômes et pseudo-compositions

Soit $X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ un alphabet totalement ordonné de variables commutatives indépendantes. On note $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{P}_k(X)$), l'ensemble des parties (resp. des parties à k éléments) de l'alphabet X.

Soit m un monôme $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ où les m_i peuvent être nuls. Pour des raisons de lisibilité, on identifie m avec la pseudo-composition

$$[m_1, m_2, \dots, m_n] \in \mathbb{N}^n.$$

On appelle *support* de m l'ensemble $A \in \mathcal{P}(X)$ des x_i dont l'exposant est non nul et *composition des exposants* la composition K obtenue en supprimant les zéros de la suite $(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Dans la suite, on identifiera A^K avec m. Par exemple, si $X = \{x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}$, on écrit

$$x_1^2 x_3 = [2, 0, 1, 0] = \{x_1, x_3\}^{(2,1)},$$

$$x_1^3 x_2^5 x_4 = [3, 5, 0, 1] = \{x_1, x_2, x_4\}^{(3,5,1)}.$$

Polynômes quasi-symétriques

Définition 2.39 *Un polynôme $f \in \mathbb{C}[X]$ est dit* quasi-symétrique *si pour toute composition $I = (i_1, \dots, i_r)$, le coefficient du monôme A^I est indépendant de l'ensemble de variables $A \in \mathcal{P}_r(X)$. Autrement dit, le coefficient de*

$$\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}\}^I = x_{j_1}^{i_1} x_{j_2}^{i_2} \cdots x_{j_r}^{i_r} \qquad (2.131)$$

est indépendant de $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

Remarquons que l'ordre des variables est ici fondamental.

Comme pour les fonctions symétriques, on fait tendre le nombre de variables vers l'infini, en prenant la limite projective dans la catégorie des algèbres graduées et on obtient une algèbre appelée algèbre des fonctions quasi-symétriques notée **QSym** [24]. On peut voir de telles « fonctions » comme des polynômes sur un alphabet infini $X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots\}$.

Fonctions quasi-monomiales

Il est clair que les fonctions

$$M_I = \sum_{A \in \mathcal{P}_r(X)} A^I = \sum_{j_1 < \cdots < j_r} x_{j_1}^{i_1} \cdots x_{j_r}^{i_r} \tag{2.132}$$

indexées par les compositions $I = (i_1 \ldots, i_r)$ forment une base de **QSym**. La dernière somme est étendue à toutes les pseudo-compositions obtenues en insérant des zéros dans I. Par exemple

$$M_{(2,1)} = \{x_1, x_2\}^{(2,1)} + \{x_1, x_3\}^{(2,1)} + \{x_1, x_4\}^{(2,1)} + \{x_2, x_3\}^{(2,1)} + \{x_2, x_4\}^{(2,1)} + \{x_3, x_4\}^{(2,1)}$$

et, pour des raisons de lisibilité, on préfère écrire

$$M_{(2,1)} = [2, 1, 0, 0] + [2, 0, 1, 0] + [2, 0, 0, 1] + [0, 2, 1, 0] + [0, 2, 0, 1] + [0, 0, 2, 1]$$

au lieu de $M_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4$.

Fonctions quasi-rubans

La deuxième base importante de **QSym** est formée par les *fonctions quasi-rubans*. Dans [24], Gessel les définit comme les fonctions caractéristiques des permutations qui ont un ensemble de descentes donné. Elles apparaissent comme les analogues des fonctions de Schur [41, 42]. On peut les définir par

$$F_I = \sum_{I \preceq J} M_J, \tag{2.133}$$

Par exemple,

$$F_{122} = M_{122} + M_{1112} + M_{1211} + M_{11111}.$$

Il est important de voir que F_I est la somme des images commutatives de tous les mots quasi-rubans de forme I (voir [24]).

Dualité

Les propriétés caractéristiques des fonctions quasi-symétriques sont expliquées par le fait qu'elles sont en dualité avec l'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives, qui est la somme directe des algèbres des descentes de tous les groupes symétriques [66]. Cette dualité est définie par le crochet

$$\left\langle M_I, S^J \right\rangle = \delta_{IJ} \quad \text{où encore} \quad \langle F_I, R_J \rangle = \delta_{IJ}. \tag{2.134}$$

On vérifie alors que **Sym** est le dual gradué de **QSym**, c'est à dire que :

$$\langle f \otimes g, \Delta(P) \rangle = \langle fg, P \rangle \,, \tag{2.135}$$

$$\langle \gamma(f), P \otimes Q \rangle = \langle f, PQ \rangle \,, \tag{2.136}$$

où le coproduit de **QSym** est défini comme suit : soient Y un deuxième alphabet et $X \sqcup Y$ la somme ordinale de X et de Y, c'est-à-dire l'union de X et de Y où les variables de X sont plus petites que les variables de Y. Alors toute fonction $f \in \mathbf{QSym}(X)$ s'étend naturellement à une fonction quasi-symétrique $f(X \sqcup Y)$ que l'on peut voir comme une fonction

$$\gamma(f) \in \mathbf{QSym}(X) \otimes \mathbf{QSym}(Y). \tag{2.137}$$

2.5.3 Caractéristiques de Frobenius pour l'algèbre de Hecke dégénérée

Les fonctions de Schur rubans non-commutatives R_I et les fonctions quasi-symétriques F_I ont un bon nombre de propriétés en commun avec les fonctions de Schur. En particulier, les constantes de structure de **Sym** et **QSym** dans ces bases sont des entiers positifs. Cela suggère l'existence d'une interprétation en théorie des représentations. De telles interprétations apparaissent dans les spécialisations $q = 0$ de q-déformations de certaines structures classiques reliées aux fonctions de Schur [19, 16, 40, 42].

Caractéristique de l'algèbre de Hecke générique

La première interprétation fait intervenir l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ de type A à $q = 0$. Rappelons que si q est un nombre complexe générique (différent de 1 et d'une racine de l'unité) $H_n(q)$ est semi-simple. Elle est en fait isomorphe à $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. On peut alors définir une caractéristique, analogue à celle du groupe symétrique, qui envoie le q-module de Specht irréductible

$V_\lambda(q)$ sur la fonction de Schur s_λ. Le produit usuel des fonctions symétriques correspond à l'induction

$$\mathrm{ch}\left(V_\lambda(q) \otimes V_\mu(q) \uparrow_{H_m(q)\otimes H_n(q)}^{H_{m+n}(q)}\right) = s_\lambda s_\mu. \tag{2.138}$$

Ainsi les représentations des algèbres de Hecke génériques sont bien comprises. Remarquons que la caractéristique est indépendante de q.

Suite de compositions

L'algèbre dégénérée est plus compliquée car elle n'est pas semi-simple. Il est alors difficile de comprendre toutes les représentations. Une grande partie du travail a cependant été fait par Norton [68], et Carter dans le cas particulier du type A [5]. Ils ont en fait identifié les modules non pas à isomorphisme près, mais à une équivalence plus faible près.

On appelle *suite de composition* d'un module V toute suite de sous-modules

$$V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V \tag{2.139}$$

telle que les quotients V_{i+1}/V_i soient simples. Les modules apparaissant dans une telle suite sont appelés facteurs de composition.

Modules simples de $H_n(0)$

Il y a 2^{n-1} modules simples pour $H_n(0)$ qui sont tous de dimension 1. On peut indexer ces modules par des compositions I de n. On définit une représentation irréductible φ_I de $H_n(0)$ en posant

$$\varphi_I(T_i) = \begin{cases} -1 & \text{si } i \in \mathrm{Des}(I), \\ 0 & \text{si } i \notin \mathrm{Des}(I). \end{cases} \tag{2.140}$$

Le module de $H_n(0)$ correspondant est noté $\mathbb{C}_I$. Ces modules forment un système complet de $H_n(0)$ modules simples.

Caractéristique de Frobenius

On identifie alors deux modules non pas s'ils sont isomorphes mais de manière plus faible s'ils ont les mêmes facteurs de composition avec les mêmes multiplicités. Soient alors un $H_n(0)$-module V et une suite de composition $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = V$. On définit la caractéristique de V comme la fonction quasi-symétrique

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_i F_{I_i} \tag{2.141}$$

où I_i est la composition associée au module V_{i+1}/V_i. Ce choix est compatible avec le produit d'induction

$$\operatorname{ch}\left([M \otimes N] \uparrow_{H_m(0)\otimes H_n(0)}^{H_{m+n}(0)}\right) = \operatorname{ch}([M]) \operatorname{ch}([N]), \tag{2.142}$$

ainsi qu'avec la caractéristique du cas générique. C'est-à-dire que la spécialisation $q = 0$ d'un module de l'algèbre générique garde la même caractéristique. Remarquons que si l'on part d'un module de Specht V_λ simple, le module correspondant à $q = 0$ n'est en général ni irréductible, ni même semi-simple.

Par dualité on peut montrer que les fonctions symétriques non-commutatives s'interprètent comme les caractères des modules projectifs [40].

2.5.4 L'algèbre quantique dégénérée $\mathcal{U}_0(gl_N)$

La deuxième interprétation vient de la spécialisation $q = 0$ d'une algèbre quantique [42, 41]. Rappelons que la quantification standard $U_q(gl_N)$ contient des facteurs $q + q^{-1}$ et que l'on ne peut pas poser directement $q = 0$ dans les relations. Il faut utiliser une variante qui est essentiellement la spécialisation $(r, s) = (q, 1)$ de la déformation à deux paramètres de Takeuchi [81]. Nous ne donnons ici que le cas $q = 0$.

Définition 2.40 *Soit $N \geq 1$ un entier. L'algèbre $\mathcal{U}_0(gl_N)$ est la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par les éléments $(e_i)_{1\leq i\leq N-1}$, $(f_i)_{1\leq i\leq N-1}$, $(k_i)_{1\leq i\leq N}$ soumis aux relations :*

$$k_i\, k_j = k_j\, k_i \qquad \textit{pour } 1 \leq i, j \leq N, \tag{2.143}$$

$$\begin{cases} e_i\, k_{i+1} = 0 & \textit{pour } 1 \leq i \leq N-2, \\ k_i\, e_i = 0 & \textit{pour } 1 \leq i \leq N-1, \\ k_i\, e_j = e_j\, k_i & \textit{pour } i \neq j, j+1, \end{cases} \tag{2.144}$$

$$\begin{cases} k_{i+1} f_i = 0 & \textit{pour } 1 \leq i \leq N-2, \\ f_i\, k_i = 0 & \textit{pour } 1 \leq i \leq N-1, \\ k_i\, f_j = f_j\, k_i & \textit{pour } i \neq j, j+1, \end{cases} \tag{2.145}$$

$$e_i f_j - f_j\, e_i = \delta_{i,j}(k_{i+1} - k_i) \qquad \textit{pour } 1 \leq i, j \leq N, \tag{2.146}$$

$$\begin{cases} e_i\, e_{i+1}\, e_i = e_i^2\, e_{i+1} & \textit{pour } 1 \leq i \leq N-2, \\ e_{i+1}\, e_i\, e_{i+1} = e_i\, e_{i+1}^2 & \textit{pour } 1 \leq i \leq N-2, \end{cases} \tag{2.147}$$

$$\begin{cases} f_i\, f_{i+1}\, f_i = f_{i+1}\, f_i^2 & \textit{pour } 1 \leq i \leq N-2, \\ f_{i+1}\, f_i\, f_{i+1} = f_{i+1}^2\, f_i & \textit{pour } 1 \leq i \leq N-2, \end{cases} \tag{2.148}$$

$$\begin{cases} e_i\,e_j = e_j\,e_j & pour\ |i-j|>1, \\ f_i\,f_j = f_j\,e_j & pour\ |i-j|>1, \end{cases} \tag{2.149}$$

$$\begin{cases} e_i\,e_{i+1}\,k_{i+1} = k_{i+1}\,e_i\,e_{i+1} & pour\ 1 \le i \le N-2, \\ f_{i+1}\,f_i\,k_{i+1} = k_{i+1}\,f_{i+1}\,f_i & pour\ 1 \le i \le N-2. \end{cases} \tag{2.150}$$

Proposition 2.41 *$\mathcal{U}_0(gl_N)$ est une bigèbre pour le coproduit Δ et la co-unité ϵ définis par :*

$$\begin{cases} \Delta(e_i) = 1 \otimes e_i + e_i \otimes k_i & pour\ 1 \le i \le N-1, \\ \Delta(f_i) = k_{i+1} \otimes f_i + f_i \otimes 1 & pour\ 1 \le i \le N-1, \\ \Delta(k_i) = k_i \otimes k_i & pour\ 1 \le i \le N, \end{cases} \tag{2.151}$$

$$\begin{cases} \epsilon(e_i) = 0 & pour\ 1 \le i \le N-1, \\ \epsilon(f_i) = 0 & pour\ 1 \le i \le N-1, \\ \epsilon(k_i) = 1 & pour\ 1 \le i \le N. \end{cases} \tag{2.152}$$

Représentation fondamentale de $\mathcal{U}_0(gl_N)$

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension N et $(\xi_i)_{1\le i\le N}$ une base de cet espace. Soit $(E_{i,j})_{1\le i,j\le N}$ la base canonique de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ associée à la base (ξ_i) de V définie par $E_{ij}(\xi_k) = \delta_{jk}\xi_i$. On vérifie facilement que l'on peut définir un morphisme ρ de $\mathcal{U}_0(gl_N)$ dans $\mathrm{End}(V)$ par

$$\begin{cases} \rho(e_i) = E_{i,i+1} & \text{pour } 1 \le i \le N-1, \\ \rho(f_i) = E_{i+1,i} & \text{pour } 1 \le i \le N-1, \\ \rho(k_i) = \sum_{i\ne j} E_{j,j} & \text{pour } 1 \le i \le N. \end{cases} \tag{2.153}$$

Le couple (ρ_V, V) est appelé *représentation fondamentale* de $\mathcal{U}_0(gl_N)$. Comme $\mathcal{U}_0(gl_N)$ est une bigèbre, on peut définir pour $n > 2$ sa n-ème puissance tensorielle $(\rho_{n,N}, V^{\otimes n})$ par :

$$\rho_{n,N} = \rho_V^{\otimes n} \circ \Delta^{(n)}$$

où $\Delta^{(n)} : \mathcal{U}_0(gl_N) \to \mathcal{U}_0(gl_N)^{\otimes n}$ désigne le coproduit d'ordre n.

Modules polynomiaux irréductibles de $\mathcal{U}_0(gl_N)$

Définition 2.42 *On appelle $\mathcal{U}_0(gl_N)$-*module polynomial de degré *n tout sous-$\mathcal{U}_0(gl_N)$-module de la n-ème puissance tensorielle $V^{\otimes n}$ de la représentation V fondamentale de $\mathcal{U}_0(gl_N)$.*

Les caractères des modules polynomiaux de $\mathcal{U}_0(gl_N)$ vivent naturellement dans une algèbre, appelée algèbre hypoplaxique qui, est un quotient de l'algèbre plaxique. Elle a pour base les mots quasi-rubans sur l'alphabet $\{x_1, < \cdots < x_n\}$ (voir [40, 42, 69]).

En utilisant le fait que l'action de $\mathcal{U}_0(gl_N)$ sur $V^{\otimes n}$ commute avec l'action à droite de $H_n(0)$, Krob et Thibon ont construit une famille de $\mathcal{U}_0(gl_N)$ modules polynomiaux irréductibles notée $\mathbf{D}_I$. Ils ont montré que ces modules forment une famille complète de module polynomiaux irréductibles et que le module $\mathbf{D}_I$ a pour caractère la fonction

$$\chi(\mathbf{D}_I) = \sum_{w \in QR(I)} x_w = F_I(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.154}$$

qui est un analogue hypoplaxique de la fonction quasi-symétrique F_I. Il est remarquable que les F_I engendrent dans l'algèbre hypoplaxique une sous-algèbre commutative isomorphe à $\mathbf{QSym}$. Novelli a donné une preuve purement combinatoire de ce résultat [69].

Chapitre 3

Actions quasi-symétrisantes

Résumé

Le but de ce chapitre est de définir puis d'étudier de nouvelles actions du groupe symétrique et de son algèbre de Hecke sur les polynômes dont les invariants sont exactement les fonctions quasi-symétriques. Nous allons procéder en trois temps : d'abord nous allons définir une telle action pour le groupe symétrique (section 3.1). Ensuite, par une technique de différences divisées [50, 52, 63], nous étendrons cette action à l'algèbre de Hecke dégénérée (section 3.2). L'action de l'algèbre de Hecke générique sera obtenue par interpolation entre les deux [8, 60, 50] (voir section 3.3). Nous terminons le chapitre en étudiant des actions particulière du groupe symétrique sur l'anneau des polynômes que nous appellons actions locales. Ceci permet de définir une hiérarchie infinie de fonctions partiellement symétriques (section 3.4).

3.1 Action du groupe symétrique

Dans tout ce chapitre $X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ désignera un alphabet fini de cardinal n, totalement ordonné.

3.1.1 Définition

L'action habituelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est donnée par

$$\sigma\, f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \tag{3.1}$$

ou, sur les monômes, avec nos notations (voir sous-section 2.5.2) :

$$\sigma[m_1, \ldots, m_n] = [m_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, m_{\sigma^{-1}(n)}]. \tag{3.2}$$

Définissons l'action quasi-symétrisante :

Définition 3.1 *Soit $m = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} = [k_1, \ldots, k_n]$ un monôme. L'action de l'opérateur $\boldsymbol{\sigma}_i$ sur le monôme m est donnée par*

$$\boldsymbol{\sigma}_i[k_1, \ldots, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n] = \begin{cases} [k_1, \ldots, k_{i+1}, k_i, \ldots, k_n] & \textit{si } k_i = 0 \textit{ ou } k_{i+1} = 0 \\ [k_1, \ldots, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n] & \textit{si } k_i \neq 0 \textit{ et } k_{i+1} \neq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

L'application $\sigma_i \to \boldsymbol{\sigma}_i$ définit une action fidèle du groupe symétrique sur $\mathbb{C}[X]$ appelée action quasi-symétrisante*.*

Pour le voir, nous allons en donner une autre expression.

Proposition 3.2 *Soit $m = [k_1, \ldots, k_n] = A^I$ un monôme. L'action quasi-symétrisante de la permutation σ est donnée par l'opérateur $\boldsymbol{\sigma}$ défini par :*

$$\boldsymbol{\sigma}(A^I) = (\sigma\, A)^I = \{x_{\sigma(i)} \mid x_i \in A\}^I. \tag{3.4}$$

Démonstration. On vérifie facilement que si σ est une transposition élémentaire, les deux expressions définissent le même opérateur. Par exemple, si k_1 et k_2 sont deux entiers non nuls, la transposition $\boldsymbol{\sigma}_1$ appliquée au monôme $x_1^{k_1}x_2^{k_1} = [k_1, k_2, 0] = \{x_1, x_2\}^{(k_1,k_2)}$ donne $[k_1, k_2, 0]$ qui est bien égal à $(\sigma_1\{x_1, x_2\})^{(k_1,k_2)}$. De même, la transposition $\boldsymbol{\sigma}_2$ donne $[k_1, 0, k_2]$ qui s'écrit $(\sigma_2\{x_1, x_2\})^{(k_1,k_2)} = \{x_1, x_3\}^{(k_1,k_2)}$.

Or, il est évident que (3.4) définit bien une action du groupe symétrique. Ainsi, les opérateurs de (3.3) vérifient les relations de Moore-Coxeter. Par conséquent, ces deux expressions définissent bien la même action du groupe symétrique. De plus, il est facile de voir que cette action est fidèle car l'action sur les monômes de degré 1, c'est à dire les variables, permet de retrouver la permutation. $\square$

Exemple 3.3 En appliquant la formule (3.4), on trouve

$$\boldsymbol{\sigma}_1(x_1^6x_2^2) = \boldsymbol{\sigma}_1[6, 2, 0] = (\sigma_1\{x_1, x_2\})^{(6,2)} = \{x_1, x_2\}^{(6,2)} = x_1^6x_2^2,$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}_1(x_1^6x_3^2) = \boldsymbol{\sigma}_1[6, 0, 2] = (\sigma_1\{x_1, x_3\})^{(6,2)} = \{x_2, x_3\}^{(6,2)} = x_2^6x_3^2.$$

C'est en accord avec (3.3). Soit maintenant $\sigma_{1,4}$ la transposition qui échange 1 et 4 et fixe 2 et 3. Soit $\boldsymbol{\sigma}_{1,4}$ l'opérateur associé. Alors

$$\boldsymbol{\sigma}_{1,4}[1, 0, 2, 0] = (\sigma_{1,4}\{x_1, x_3\})^{(1,2)} = \{x_3, x_4\}^{(1,2)} = [0, 0, 1, 2].$$

et donc $\boldsymbol{\sigma}_{1,4}(x_1x_3^2) = x_3x_4^2$.

Note 3.4 On va voir dans la suite que contrairement à l'action classique, cette action n'est pas une action fidèle de *l'algèbre* du groupe symétrique. On va donc devoir distinguer entre les permutations abstraites et leur action quasi-symétrisante. On utilisera la convention suivante : Les permutations abstraites seront notées en caractères normaux, par exemple σ. Les opérateurs quasi-symétrisants associés seront notés par la lettre grasse correspondante, par exemple $\boldsymbol{\sigma}$. De plus, comme les actions classiques sont fidèles, il n'est pas utile de les distinguer des permutations abstraites et on conservera donc les caractères normaux.

Note 3.5 L'action quasi-symétrisante présente des différences importantes avec l'action classique. En voici quelques unes :

– C'est une action sur l'espace vectoriel des polynômes, sans aucun lien avec la structure d'algèbre : par exemple $(\boldsymbol{\sigma}_1\, x_1^2)(\boldsymbol{\sigma}_1\, x_2) = x_1x_2^2$ alors que $\boldsymbol{\sigma}_1(x_1^2x_2) = x_1^2x_2$.

– En particulier, contrairement aux polynômes symétriques qui sont des scalaires pour l'action classique, les polynômes quasi-symétriques ne sont pas des scalaires pour l'action quasi-symétrisante. On voit facilement que dans notre cas, les seuls polynômes f qui vérifient $\boldsymbol{\sigma}(fg) = f\,\boldsymbol{\sigma}(g)$ pour toute permutation σ et tout polynôme g, sont les polynômes constants.

– Si $\sigma_{i,j}$ est la transposition qui échange i et j, alors les variables x_k où $i \leq k \leq j$ ne sont pas des scalaires pour cette action. Autrement dit la transposition $\sigma_{i,j}$ agit sur toutes les variables entre x_i et x_j : on a calculé précédemment dans l'exemple 3.3 que $\boldsymbol{\sigma}_{1,4}(x_1x_3^2) = x_3x_4^2$. L'exposant de x_3 a changé.

Action sur les parties de $\{1, \ldots, n\}$ et classes à gauches

Nous allons maintenant relier notre action aux classes du groupe symétrique modulo un sous-groupe de Young. Rappelons tout d'abord que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ par

$$\sigma\, A = \{\sigma(i) \mid i \in A\}. \tag{3.5}$$

Cette action est transitive sur l'ensemble des parties à p éléments. C'est-à-dire que si A et B sont deux parties à p éléments, il existe une permutation σ telle que $\sigma\, A = B$. Le nombre de permutations qui fixent une partie à p éléments est $p!(n-p)!$. Ce sont en effet les permutations qui se factorisent en une permutation de la partie elle même et une permutation de son complémentaire.

Proposition 3.6 *Soit $A = \{1, \ldots, p\}$ pour un certain $p \leq n$.*

– L'image de A par la permutation σ ne dépend que de la classe à gauche de σ dans le quotient $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p})$. Ceci définit une bijection entre les parties à p éléments de $\{1, \ldots, n\}$ et les classes du quotient $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p})$.

– Chaque classe c de $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p})$ contient une unique permutation de longueur minimale σ_c.

– Quand c parcourt l'ensemble des classes du quotient $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p})$, l'ensemble des permutations de longueur minimale σ_c est exactement l'ensemble des permutations qui apparaissent dans le mélange

$$12 \ldots p \sqcup\!\sqcup\; p+1 \ldots n. \tag{3.6}$$

On notera cet ensemble par $\mathfrak{S}_{n/p}$.

Démonstration. Par définition de l'action, les permutations qui agissent trivialement sur A sont exactement les permutations de $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}$. On peut donc caractériser une classe par l'image de A sous l'action de l'un quelconque de ses éléments. D'où le premier point. Si c est la classe des permutations qui envoient A sur un ensemble B, la permutation la plus courte de c est la seule permutation de la classe telle que

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(n). \tag{3.7}$$

En effet, si une permutation ne vérifie pas ceci, on peut obtenir une permutation plus courte en la multipliant à droite par une permutation de $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}$. Ceci définit une et une seule permutation puisque $\sigma\, A = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(p)\}$ est égal à B. D'où le deuxième point. Le troisième point est juste une reformulation de l'équation précédente. $\square$

Notons qu'il existe de nombreux autres codages pour les classes : on peut remplacer les parties A à p-éléments de $\{1, \ldots, n\}$ par des mots de longueur p sur l'alphabet $\{0, 1\}$ en écrivant 0 en position i si $i \notin A$ et 1 si $i \in A$. Un autre codage est obtenu à l'aide des partitions λ contenues dans le rectangle $(n-p)^p$: on part de l'angle supérieur droit du rectangle et on suit le bord du diagramme de Ferrers associé à la partition. on obtient ainsi un mot de longueur n sur les lettres S=« sud » et E=« est ». Par exemple, dans le rectangle 5^4, la partition $\lambda = (1, 4)$ correspond à $\{1, 2, 4, 8\}$ (voir figure 3.1).

Nouvelle définition des fonctions quasi-symétriques

L'action quasi-symétrisante permet de reformuler la définition des fonctions quasi-symétriques.

$$\text{Classe}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 1\,2\,4\,8\,3\,5\,6\,7\,9 \end{pmatrix} \mod \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_5 \quad \longleftrightarrow \quad \{1,2,4,8\} \quad \longleftrightarrow$$

$$(110100010) \quad \longleftrightarrow \quad SSESEEESE \quad \longleftrightarrow$$

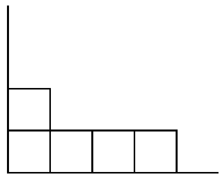


FIG. 3.1 : Différents codages pour les classes à gauche modulo $\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_5$.

Proposition 3.7 *Un polynôme $f \in \mathbb{C}[x_1 < \cdots < x_n]$ est quasi-symétrique si et seulement si $\boldsymbol{\sigma}\, f = f$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.*

Démonstration. Par définition, un polynôme est quasi-symétrique si et seulement si le coefficient du monôme codé par A^K est indépendant de l'ensemble $A \in \mathcal{P}_{\ell(K)}(X)$, et ce pour toute composition K.

Fixons une composition K de longueur p. Le groupe symétrique agit transitivement sur les parties de X à p éléments. Ainsi, si A et B sont deux parties à p éléments de X, il existe une permutation σ telle que $\sigma\, A = B$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{\sigma}\, A^K = B^K$. Ainsi, si $\boldsymbol{\sigma}\, f = f$, le coefficient de A^K dans f est égale à celui de B^K. On a donc montré que si f est un polynôme invariant sous l'action quasi-symétrisante, pour toute composition K, le coefficient de A^K est indépendant de A.

Réciproquement, il est clair que si f est quasi-symétrique alors f est invariant par l'action quasi-symétrisante. $\square$

Comme les fonctions monomiales sous l'action habituelle, les fonctions quasi-monomiales sont les sommes des orbites sous l'action du groupe symétrique. On peut de plus les exprimer de la manière suivante :

Proposition 3.8 *Soit $K = (k_1, \ldots, k_p)$ une composition. Soit $m = X^K = [k_1, \ldots, k_p, 0, \ldots, 0]$. Alors*

$$M_K = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n/p}} \boldsymbol{\sigma}\, m = \frac{1}{p!(n-p)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \boldsymbol{\sigma}\, m. \tag{3.8}$$

Démonstration. D'après la proposition 3.6, l'application

$$\sigma \in \mathfrak{S}_{n/p} \longmapsto \sigma\{1, \ldots, p\}$$

est une bijection de $\mathfrak{S}_{n/p}$ dans $\mathcal{P}_p(X)$. D'ou la première égalité puisque

$$M_K = \sum_{A \in \mathcal{P}_p(X)} A^K.$$

La deuxième égalité résulte du fait que $p!(n-p)!$ est exactement le nombre de permutations qui fixent le monôme X^K. □

3.1.2 Caractéristique

Dans cette sous-section nous étudions les propriétés de la représentation du groupe symétrique que nous venons de construire. En particulier nous allons donner sa caractéristique de Frobenius ainsi qu'une base de l'image du groupe symétrique dans les endomorphismes de $\mathbb{C}[X]$.

L'action quasi-symétrisante est compatible avec la graduation usuelle de l'anneau $\mathbb{C}[X]$ des polynômes. On peut donc définir la caractéristique graduée ch_t comme la série génératrice des caractéristiques des représentations sur les composantes homogènes $\mathbb{C}_i[X]$.

$$\mathrm{ch}_t(\mathbb{C}[X]) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{ch}(\mathbb{C}_i[X]) t^i. \tag{3.9}$$

Proposition 3.9 *La caractéristique graduée de la représentation de $\mathfrak{S}_n$ par l'action quasi-symétrisante sur l'anneau des polynômes est donnée par la formule*

$$\mathrm{ch}_t(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{(1-t)^m} h_{(m,n-m)}. \tag{3.10}$$

Cette proposition repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.10 *La caractéristique de la représentation induite à $\mathfrak{S}_n$ par la représentation triviale de $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{n-m}$ est la fonction symétrique*

$$\mathrm{ch}(\mathfrak{S}_n / (\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{n-m})) = h_{(n-m,m)}. \tag{3.11}$$

Ce lemme est bien connu. Il résulte du fait que l'induction des représentations des deux sous-groupes de Young correspond au produit des fonctions symétriques et que le caractère de la représentation triviale de $\mathfrak{S}_p$ est la fonction complète h_p (voir par exemple [62] section I.7).

Démonstrationde la proposition 3.9. On a vu précédemment que les classes à gauche du quotient $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{n-m}$ correspondent aux parties à m éléments de $\{1, \dots n\}$. En fait, par définition de la représentation induite, cette correspondance est un isomorphisme de représentations. Ainsi $h_{(n-m,m)}$ est bien la caractéristique de représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur les ensembles de cardinal m. Cette représentation apparaît dans les polynômes autant de fois qu'il y a de compositions de longueur m (la somme de la composition donne le degré). Or, la série génératrice des compositions de longueur m comptées par leur somme est

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{K \vDash i,\ \ell(K)=m} t^i \right) = \frac{t^m}{(1-t)^m}. \tag{3.12}$$

Il reste à voir que la représentation sur les polynômes constants est isomorphe à la représentation triviale de caractéristique h_n. Elle correspond au cas où m est nul dans la somme. D'où la formule. □

Corollaire 3.11 *Les seules représentations irréductibles V_λ qui apparaissent dans $\mathbb{C}[X]$ sous l'action quasi-symétrisante sont la représentation triviale $V_{(n)}$ et les représentations à deux lignes $V_{(n-m,m)}$ pour $m \leq \frac{n}{2}$.*

Démonstration. On a $h_{(n-m,m)} = h_{(m,n-m)}$ puisque les fonctions symétriques commutent, et pour $m \leq \frac{n}{2}$ la fonction complète à deux lignes se développe sur les fonctions de Schur par

$$h_{(n-m,m)} = \sum_{k \leq m} s_{(n-k,k)}. \tag{3.13}$$

Les fonctions de Schur s_λ étant les caractéristiques des modules irréductibles V_λ, le corollaire est démontré. □

Corollaire 3.12 *Pour tout $i < n-2$ on a l'égalité entre opérateurs :*

$$\boldsymbol{\sigma}_i\, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}\, \boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_{i+1}\, \boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_i\, \boldsymbol{\sigma}_{i+1} + \boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{\sigma}_{i+1} - \mathbf{1} = 0. \tag{3.14}$$

Remarquons que c'est la somme alternée des permutations qui échangent les trois entiers $i, i+1, i+2$.

Démonstration. Il est connu que la somme alternée des permutations d'un sous-groupe de Young correspondant à la partition λ s'annule dans tous les modules V_μ tels que la conjuguée de la partition λ n'est pas plus fine que μ. Dans notre cas, pour un sous-groupe de type $(1, \dots, 1, 3, 1, \dots, 1)$, on trouve l'égalité donnée. □

En fait, on peut en donner une preuve élémentaire :

Démonstration. Supposont en effet que A soit un ensemble d'entiers parmi i, $i+1$ et $i+2$. Alors, soit A, soit son complémentaire contient deux de ces trois entiers. Notons j et k les deux entiers. La transposition $\sigma_{j,k}$ fixe donc l'ensemble A. Or, les transpositions sont de signe négatif. la transposition $\sigma_{j,k}$ annule donc la somme alternée des permutations sur $\{i, i+1, i+2\}$:

$$\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(i,i+1,i+2)} (-1)^{\ell(\sigma)} \sigma \right) \sigma_{j,k} = 0. \tag{3.15}$$

On a donc montré que pour tout A,

$$\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(i,i+1,i+2)} (-1)^{\ell(\sigma)} \boldsymbol{\sigma} \right) A = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(i,i+1,i+2)} (-1)^{\ell(\sigma)} \boldsymbol{\sigma} \right) \boldsymbol{\sigma}_{j,k} A = 0. \tag{3.16}$$

D'où l'égalité entre opérateurs quasi-symétrisants. □

L'argument de ce corollaire montre en particulier que le seul polynôme f anti-quasi-symétrique, c'est-à-dire tel que

$$\boldsymbol{\sigma}_i f = -f \quad \text{pour toute transposition élémentaire } \sigma_i,$$

ou encore tel que

$$\boldsymbol{\sigma} f = \mathrm{Sgn}(f) f \quad \text{pour toute permutation } \sigma,$$

est le polynôme nul.

Qui plus est, le corrolaire permet d'exprimer l'action de toutes les permutations comme une combinaison linéaire de l'action des permutations telles qu'aucun mot réduit ne contienne de facteur $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$. Il existe plusieurs caractérisations de ces permutations, par exemple :

Définition 3.13 *On dit qu'une permutation σ évite le motif 321 s'il n'existe pas d'entiers $i < j < k$ tels que $\sigma(i) > \sigma(j) > \sigma(k)$.*

Lemme 3.14 *Une permutation évite le motif 321 si et seulement si aucun de ses mots réduits ne contient le facteur $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$.*

Ce sont également les permutations dont le tableau d'insertion par l'algorithme de Robinson-Schensted n'a pas plus de deux lignes.

On a donc pour conséquence le théorème suivant :

Théorème 3.15 *L'image de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ dans les endomorphismes de $\mathbb{C}[X]$ par l'action quasi-symétrisante est isomorphe au quotient de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ par l'idéal engendré par*

$$(\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i - \sigma_{i+1}\,\sigma_i - \sigma_i\,\sigma_{i+1} + \sigma_i + \sigma_{i+1} - 1)_{i=1\ldots n-2}. \tag{3.17}$$

La famille $(\boldsymbol{\sigma})$ où σ décrit l'ensemble de toutes les permutations qui évitent le motif 321 est une base de l'image de $\mathbb{C}\langle\mathfrak{S}_n\rangle$ dans les endomorphismes.

Remarquons que pour tout couple (A, B) d'ensembles de même cardinal il existe une unique permutation de longueur minimale qui envoie A sur B. L'ensemble de ces permutations est exactement l'ensemble des permutations qui évitent 321.

3.2 Action de l'algèbre de Hecke dégénérée

On rappelle que l'algèbre de Hecke dégénérée est l'algèbre engendrée par les $(T_i)_{i=1,\ldots,n-1}$ avec les relations

$$\begin{aligned} T_i^2 &= -\,T_i && \text{pour } 1 \leq i \leq n-1,\\ T_i\,T_j &= T_j\,T_i && \text{pour } |i-j| > 1,\\ T_i\,T_{i+1}\,T_i &= T_{i+1}\,T_i\,T_{i+1} && \text{pour } 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Le but de cette section est de montrer qu'il existe une action de l'algèbre de Hecke dégénérée sur les polynômes, dont les invariants sont exactement les fonctions quasi-symétriques. A l'aide de cette action, on trouve une nouvelle expression des fonctions quasi-rubans de Gessel.

3.2.1 Différences divisées quasi-symétrisantes

Nous allons utiliser une méthode très similaire à celle de Lascoux et Schützenberger. Dans [50, 52], ils décrivent plusieurs familles d'opérateurs agissant sur l'anneau des polynômes, qui vérifient les relations de tresse et de Hecke. En particulier, les opérateurs appelés différences divisées isobares, définis par

$$\pi_i\,f = \frac{1-\sigma_i}{x_i - x_{i+1}}(x_i f). \tag{3.19}$$

définissent une action de l'algèbre de Hecke dégénérée (voir par exemple [63, 12, 2]). Remarquons que la formule précédente peut se réécrire

$$\pi_i\, f = \frac{x_i f - x_{i+1}\, \sigma_i\, f}{x_i - x_{i+1}}. \tag{3.20}$$

Nous allons donc poser :

Définition 3.16 *Soit f un polynôme et $i < n$. on appelle* différences divisées isobares quasi-symétrisantes *les deux opérateurs $\boldsymbol{\pi}_i$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}_i$ définis par*

$$\boldsymbol{\pi}_i\, f = \frac{x_i f - x_{i+1}\, \boldsymbol{\sigma}_i\, f}{x_i - x_{i+1}} \quad et \quad \overline{\boldsymbol{\pi}}_i = \boldsymbol{\pi}_i - \mathrm{Id}\,. \tag{3.21}$$

Commençons par donner la règle de calcul de ces opérateurs :

Proposition 3.17 *Les actions de $\boldsymbol{\pi}_i$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}_i$ sur le monôme $[k_1, \ldots, k_n]$ sont données par les expressions :*

$$\boldsymbol{\pi}_i[k_1, \ldots, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k_i} [k_1, \ldots, k_i - j, j, \ldots, k_n] & si\ k_i \neq 0\ \ et\ k_{i+1} = 0, \\ [k_1, \ldots, k_n] & si\ k_i \neq 0\ \ et\ k_{i+1} \neq 0, \\ \displaystyle -\sum_{j=1}^{k_{i+1}-1} [k_1, \ldots, j, k_{i+1} - j, \ldots, k_n] & si\ k_i = 0\ \ et\ k_{i+1} > 1, \\ [k_1, \ldots, k_n] & si\ k_i = 0\ \ et\ k_{i+1} = 0, \\ 0 & si\ k_i = 0\ \ et\ k_{i+1} = 1, \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_i[k_1, \ldots, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{k_i} [k_1, \ldots, k_i - j, j, \ldots, k_n] & si\ k_i \neq 0\ \ et\ k_{i+1} = 0, \\ 0 & si\ k_i = 0\ \ et\ k_{i+1} = 0, \\ \displaystyle -\sum_{j=0}^{k_{i+1}-1} [k_1, \ldots, j, k_{i+1} - j, \ldots, k_n] & si\ k_i = 0\ \ et\ k_{i+1} \neq 0, \\ 0 & si\ k_i \neq 0\ \ et\ k_{i+1} \neq 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Ces formules sont des conséquences triviales de l'identité :

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{u+v=n-1} x^u y^v. \tag{3.24}$$

Par exemple : $\boldsymbol{\pi}_1[1,2,3] = [1,2,3]$ et $\boldsymbol{\pi}_2[1,0,3] = -[1,2,1] - [1,1,2]$. A l'aide de ces formules on vérifie aisément les identités suivantes, qui mélangent différences divisées et permutations :

Lemme 3.18 *On a :*

$$\boldsymbol{\sigma}_i\, \boldsymbol{\pi}_i = \quad \boldsymbol{\pi}_i \qquad et \qquad \boldsymbol{\sigma}_i\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_i = \quad \boldsymbol{\pi}_i - \boldsymbol{\sigma}_i \tag{3.25}$$

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\, \boldsymbol{\sigma}_i = - \overline{\boldsymbol{\pi}}_i \qquad et \qquad \boldsymbol{\pi}_i\, \boldsymbol{\sigma}_i = - \overline{\boldsymbol{\pi}}_i + \boldsymbol{\sigma}_i \tag{3.26}$$

où fg désigne la composition $f \circ g$ des deux opérateurs f et g. On gardera cette notation dans toute la suite.

La première de ces formules est particulièrement remarquable, elle permet d'établir l'équivalence suivante :

Lemme 3.19 *Un polynôme f est invariant par $\boldsymbol{\sigma}_i$ si et seulement si il est invariant par $\boldsymbol{\pi}_i$.*

Démonstration. Par définition $\boldsymbol{\pi}_i\, f = (x_i f - x_{i+1}\, \boldsymbol{\sigma}_i\, f)/(x_i - x_{i+1})$. Et donc si $\boldsymbol{\sigma}_i\, f = f$ alors $\boldsymbol{\pi}_i\, f = f$. Réciproquement, si $\boldsymbol{\pi}_i\, f = f$ alors

$$\boldsymbol{\sigma}_i\, f = \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\pi}_i\, f = \boldsymbol{\pi}_i\, f = f,$$

la deuxième égalité résultant du lemme précédent. D'où l'équivalence. □

Ces lemmes sont utiles dans la preuve du théorème fondamental suivant :

Théorème 3.20 *Les opérateurs $\boldsymbol{\pi}_i$ vérifient les relations :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_i^2 &= \boldsymbol{\pi}_i && \textit{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ \boldsymbol{\pi}_i\, \boldsymbol{\pi}_j &= \boldsymbol{\pi}_j\, \boldsymbol{\pi}_i && \textit{pour } |i-j| > 1, \\ \boldsymbol{\pi}_i\, \boldsymbol{\pi}_{i+1}\, \boldsymbol{\pi}_i &= \boldsymbol{\pi}_{i+1}\, \boldsymbol{\pi}_i\, \boldsymbol{\pi}_{i+1} && \textit{pour } 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Les opérateurs $\overline{\boldsymbol{\pi}}_i$ vérifient les relations :

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{\pi}}_i^2 &= -\overline{\boldsymbol{\pi}}_i && \textit{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ \overline{\boldsymbol{\pi}}_i\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_j &= \overline{\boldsymbol{\pi}}_j\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_i && \textit{pour } |i-j| > 1, \\ \overline{\boldsymbol{\pi}}_i\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_i &= \overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_i\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1} = 0 && \textit{pour } 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Avant de démontrer le théorème, nous allons en donner une formulation plus concise. Soit $\sigma = \sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_p}$ un mot réduit. Les relations de tresses assurent que les opérateurs $\boldsymbol{\pi}_\sigma = \boldsymbol{\pi}_{i_1} \cdots \boldsymbol{\pi}_{i_p}$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma = \overline{\boldsymbol{\pi}}_{i_1} \cdots \overline{\boldsymbol{\pi}}_{i_p}$ sont indépendants du choix du mot réduit de σ. Comme précédemment, on pose $\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]}$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}_{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]}$. Le théorème précédent s'écrit alors :

Corollaire 3.21 *Les applications $T_\sigma \mapsto (-1)^{\ell(\sigma)}\, \boldsymbol{\pi}_\sigma$ et $T_\sigma \mapsto \overline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma$ définissent deux actions de l'algèbre de Hecke dégénérée $H_n(0)$, appelées* actions quasi-symétrisantes*.*

La théorie classique (voir sous section 2.4.1) dit que si l'une des deux familles d'opérateurs vérifie les relations de Hecke alors l'autre les vérifie également. En effet, $\boldsymbol{\pi}$ et $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ sont image l'un de l'autre par l'involution de conjugaison de l'algèbre de Hecke (voir sous-section 2.4.1). Nous allons donc nous contenter de faire la preuve pour les opérateurs $\overline{\boldsymbol{\pi}}_i$. Rappelons enfin que, comme dans le cas classique, ces deux familles d'opérateurs sont liées par la relation

$$\boldsymbol{\pi}_\sigma = \sum_{\mu \leq \sigma} \overline{\boldsymbol{\pi}}_\mu, \tag{3.29}$$

l'ordre des permutations étant l'ordre de Bruhat.

Démonstration. Pour commencer, il est clair que les opérateurs $\overline{\boldsymbol{\pi}}_i$ agissent seulement sur les variables x_i et x_{i+1}. Il suffit donc de montrer les deux égalités suivantes :

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_1\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_1[i,j] = -\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_1[i,j] \tag{3.30}$$

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_1\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_2\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_1[i,j,k] = \overline{\boldsymbol{\pi}}_2\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_1\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_2[i,j,k] = 0 \tag{3.31}$$

quels que soient i, j, k.

Commençons par montrer la première de ces égalités. Si $i \neq 0$ et $j \neq 0$ les deux membres sont nuls d'après l'expression (3.23) de $\overline{\boldsymbol{\pi}}_1$. De plus, l'équation (3.25) permet de déduire le cas $i = 0$ et $j \neq 0$ du cas $i \neq 0$ et $j = 0$. On a donc seulement besoin de montrer que $\overline{\boldsymbol{\pi}}_1\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_1[i,0] = -\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_1[i,0]$.

Par définition (3.23), on a

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_1\, \overline{\boldsymbol{\pi}}_1[i,0] = \overline{\boldsymbol{\pi}}_1 \sum_{j=1}^{i} [j, i-j] = \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\boldsymbol{\pi}}_1[j, i-j] + \overline{\boldsymbol{\pi}}_1[0,i]. \tag{3.32}$$

Mais $\overline{\boldsymbol{\pi}}_1$ annule tous les monômes $[u,v]$ où u et v sont non nuls tous deux. Il reste donc $\overline{\boldsymbol{\pi}}_1[0,i]$ qui est égal à $-\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_1[i,0]$ d'après le lemme 3.18, ce qui prouve l'égalité (3.30).

Pour montrer la deuxième égalité, calculons, pour tout entier i non nul, $\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[0,i,0]$ d'une part et $\boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2[0,i,0]$ d'autre part. De (3.23), on déduit

$$\boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[0,i,0] = -\sum_{\substack{u+v=i\\ v\neq 0}}\ \sum_{\substack{s+t=v\\ t\neq 0}}[u,s,t] = -\sum_{\substack{u+v+w=i\\ w\neq 0}}[u,v,w]$$

Cette expression est symétrique en x_1 et x_2, son image sous l'action de $\boldsymbol{\overline{\pi}}_1$ est nulle. De la même manière

$$\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2[0,i,0] = -\sum_{\substack{u+v=i\\ u\neq 0\\ v\neq 0}}\ \sum_{\substack{s+t=v\\ t\neq 0}}[s,t,v] = -\sum_{\substack{u+v+w=i\\ v\neq 0\\ w\neq 0}}[u,v,w]$$

qui est symétrique en x_2 et x_3. On trouve finalement

$$\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[0,i,0] = \boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2[0,i,0] = 0. \tag{3.33}$$

Mais, d'après (3.25), on en déduit

$$\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[i,0,0] = \boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2[0,0,i] = 0.$$

Comme $\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[0,0,i] = \boldsymbol{\overline{\pi}}_2[i,0,0] = 0$, l'égalité (3.31) est encore vraie pour $[i,0,0]$ et $[0,0,i]$. Il reste donc les cas $[i,j,0]$, $[i,0,j]$ et $[0,i,j]$.

$$\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[i,0,j] = \sum_{\substack{u+v=i\\ v\neq 0}}[u,v,j] \quad \text{et donc} \quad \boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[i,0,j] = 0$$

De même

$$\boldsymbol{\overline{\pi}}_2[i,0,j] = -\sum_{\substack{u+v=j\\ v\neq 0}}[i,u,v] \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2[i,0,j] = -\sum_{\substack{u+v=i\\ v\neq 0}}[u,v,j]$$

Finalement

$$\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[i,0,j] = \boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2[i,0,j] = 0.$$

On termine le calcul avec (3.25) qui donne

$$\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[0,i,j] = -\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[i,0,j] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\overline{\pi}}_2[i,j,0] = -\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1[i,0,j]$$

Ainsi, on a montré l'égalité

$$\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,m = \boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_1\,\boldsymbol{\overline{\pi}}_2\,m = 0$$

pour tous les monômes m en trois variables, ce qui achève la preuve du théorème. □

3.2.2 Quasi-symétriseur total, fonctions quasi-rubans

Dans cette sous-section, nous allons nous intéresser particulièrement à l'opérateur maximal de l'algèbre de Hecke dégénérée. En effet, ce dernier apparaît comme un projecteur sur les fonctions quasi-symétriques. Il permet de donner une nouvelle expression des fonctions quasi-rubans de Gessel et de définir des fonctions quasi-rubans pour toute pseudo-composition, analogues des fonctions de Schur indexées par des vecteurs d'entiers arbitraires.

Définition 3.22 *On appelle* quasi-symétriseur maximal *ou* quasi-symétriseur total *l'opérateur*

$$\boldsymbol{\pi}_\omega = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \overline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma \,. \tag{3.34}$$

Dans la suite, quand cela ne créera pas d'ambiguïté, nous dirons pour simplifier « symétriseur ». Ce nom est justifié par la propriété suivante :

Proposition 3.23 *Le quasi-symétriseur total $\boldsymbol{\pi}_\omega$ est un projecteur sur l'espace des polynômes quasi-symétriques.*

Démonstration. Tout d'abord, on sait que si f est un polynôme quasi-symétrique alors $\boldsymbol{\pi}_i\, f = f$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{\pi}_\sigma\, f = f$ pour toute permutation σ et en particulier pour ω.

Il faut donc prouver que $\boldsymbol{\pi}_\omega\, f$ est quasi-symétrique pour tout f. Or, la permutation maximale a la propriété suivante : on peut commencer un mot réduit par n'importe laquelle des transpositions élémentaires. Ainsi pour tout i, on peut trouver une permutation σ' telle que $\boldsymbol{\pi}_\omega = \boldsymbol{\pi}_i\, \boldsymbol{\pi}_{\sigma'}$. Alors, par (3.25), on a les égalités

$$\boldsymbol{\sigma}_i\, \boldsymbol{\pi}_\omega = \boldsymbol{\sigma}_i\, \boldsymbol{\pi}_i\, \boldsymbol{\pi}_{\sigma'} = \boldsymbol{\pi}_i\, \boldsymbol{\pi}_{\sigma'} = \boldsymbol{\pi}_\omega \,.$$

Ceci montre que le polynôme $\boldsymbol{\pi}_\omega\, f$ est invariant par toutes les transpositions élémentaires et donc par toutes les permutations. D'après la caractérisation de la proposition 3.7, il est donc quasi-symétrique. □

On a ainsi une nouvelle caractérisation des fonctions quasi-symétriques :

Corollaire 3.24 *Soit f un polynôme. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est quasi-symétrique*

(ii) *$\boldsymbol{\pi}_\sigma\, f = f$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.*

(iii) *$\boldsymbol{\pi}_\omega\, f = f$.*

Le but de ce qui suit est de calculer l'image d'un monôme par le quasi-symétriseur maximal. Nous allons commencer par un cas particulier :

Définition 3.25 *Soit $K = (k_1, \dots, k_p)$ une composition de longueur $p \leq n$. On appelle* monôme dominant associé *à K le monôme*

$$X^K = [x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0] = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_p^{k_p}. \tag{3.35}$$

L'expression suivante est d'un grand intérêt. On en verra une interprétation dans le cadre de la théorie des représentations (chapitre 4).

Théorème 3.26 *Soit K une composition et $m = X^K$ le monôme dominant associé. L'image de m sous l'action du quasi-symétriseur maximal est la fonction quasi-ruban d'indice K :*

$$\boldsymbol{\pi}_\omega X^K = F_K. \tag{3.36}$$

Nous n'allons pas prouver ce théorème tout de suite, car le théorème 3.31 donne un énoncé plus fort.

Dans le cas où m n'est pas un monôme dominant, on peut donner une expression de l'image d'un monôme par le symétriseur maximal. On a ainsi la récurrence suivante appelée règle de redressement :

Proposition 3.27 (Redressement des fonctions quasi-rubans) *Soit $m = [k_1, \dots, k_p, k_{p+1}, \dots, k_n]$ un monôme tel que $k_p = 0$. Alors*

$$\boldsymbol{\pi}_\omega m = \begin{cases} -\sum\limits_{\substack{u+v=k_{p+1} \\ u\neq 0,\ v\neq 0}} \boldsymbol{\pi}_\omega [k_1, \dots, u, v, \dots, k_n] & \text{si } k_{p+1} > 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.37}$$

Démonstration. On peut terminer un mot réduit pour la permutation maximale ω par n'importe laquelle des transpositions élémentaires. L'opérateur maximal $\boldsymbol{\pi}_\omega$ s'écrit donc $\boldsymbol{\pi}_\sigma\, \boldsymbol{\pi}_p$ pour une certaine permutation σ. On a ainsi

$$\boldsymbol{\pi}_\omega\, \boldsymbol{\pi}_p = \boldsymbol{\pi}_\sigma\, \boldsymbol{\pi}_p^2 = \boldsymbol{\pi}_\sigma\, \boldsymbol{\pi}_p = \boldsymbol{\pi}_\omega\,. \tag{3.38}$$

La formule (3.23) donne l'image de m par $\boldsymbol{\pi}_p$:

$$\boldsymbol{\pi}_p m = -\sum_{\substack{u+v=k_{p+1} \\ u\neq 0,\ v\neq 0}} [k_1, \dots, u, v, \dots, k_n], \tag{3.39}$$

la somme est nulle si $k_{p+1} \leq 1$. D'où la proposition par linéarité de $\boldsymbol{\pi}_\omega$. $\square$

Par une récurrence facile on en déduit :

Proposition 3.28 *Soit $m = [k_1, \ldots, k_p, 0, \ldots, 0]$ un monôme tel que $k_p \neq 0$, les autres k_i pouvant être nuls. Alors*

$$\boldsymbol{\pi}_\omega\, m = (-1)^{C_m} \sum_J F_J \tag{3.40}$$

où C_m est le nombre de parts nulles qui apparaissent avant k_p ; la somme est étendue à toutes les compositions obtenues à partir de m en remplaçant les suites maximales de zéros suivies d'une part non nulle par une composition de cette part. Si une telle composition n'existe pas, c'est-à-dire si le nombre de zéros est supérieur ou égal à la part qui les suit, la somme est nulle.

Par exemple, calculons $\boldsymbol{\pi}_\omega[0,0,5,0,2,4,0]$. Il y a trois zéros avant la dernière part non nulle, on a donc $C_m = 3$. Le 5 est précédé de deux zéros, on va donc remplacer la suite $(0,0,5)$ par une composition de 5 en trois parts. Les choix possibles sont

$$(1,1,3), \quad (1,2,2), \quad (1,3,1), \quad (2,1,2), \quad (2,2,1), \quad (3,1,1).$$

Le 2 est précédé par un seul zéro, on va donc remplacer $(0,2)$ par $(1,1)$. On trouve donc finalement :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}_\omega[0,0,5,0,2,4,0] = -\big(&F_{(1,1,3,1,1,4)} + F_{(1,2,2,1,1,4)} + F_{(1,3,1,1,1,4)} + \\ &F_{(2,1,2,1,1,4)} + F_{(2,2,1,1,1,4)} + F_{(3,1,1,1,1,4)}\big)\end{aligned}$$

De même, $\boldsymbol{\pi}_\omega[0,0,2] = 0$ car il n'est pas possible de casser 2 en trois parts.

3.2.3 Symétriseurs partiels

Dans cette sous section nous présentons une formule explicite pour les symétrisations partielles d'un monôme dominant. En particulier, on en déduira la formule donnée pour la symétrisation totale (théorème 3.26). Cette formule peut également s'interpréter dans le cadre de la théorie des représentations (voir chapitre 4).

Pour pouvoir énoncer la formule, nous avons besoin de quelques définitions combinatoires :

Définition 3.29 *Soit K une composition. Soit m un monôme dont la composition des exposants est I (autrement dit m est de la forme A^I). On dit que m* s'insère dans la composition *K si I est plus fine que K.*

De manière équivalente m s'insère dans K si chaque somme partielle de K est une somme partielle de la pseudo composition (vecteur d'entiers) $[m_1, \dots, m_n]$ associée à m :

$$\text{pour tout } i \leq p, \text{ il existe un } j \leq n \text{ tel que } \sum_{l \leq i} k_l = \sum_{l \leq j} m_l. \tag{3.41}$$

Il est important de voir que m s'insère dans K si et seulement s'il existe un mot quasi-ruban de forme K et d'évaluation m. Remarquons que si un tel mot existe, il est unique. Par exemple, $[1, 0, 2, 0, 2]$ s'insère dans $(3, 2)$. C'est l'évaluation du mot quasi-ruban $acece$. En revanche, il ne s'insère pas dans $(2, 1, 2)$:

$$acece \quad = \quad \begin{array}{cccc} \boxed{a} & \boxed{c} & \boxed{c} & \\ & & \boxed{e} & \boxed{e} \end{array} \quad \text{mais pas} \quad \begin{array}{ccc} \boxed{a} & \boxed{c} & \\ & \boxed{c} & \\ & \boxed{e} & \boxed{e} \end{array}$$

Remarquons enfin que la fonction quasi-ruban F_K est la somme de tous les monômes qui s'insèrent dans K.

Définition 3.30 *On ordonne partiellement les monômes de la manière suivante : le monôme $m = [m_1, \dots, m_n]$ est plus grand que $m' = [m'_1, \dots, m'_n]$ si pour tout $i < n$ on a*

$$\sum_{j \leq i} m_j \geq \sum_{j \leq i} m'_j. \tag{3.42}$$

Ceci définit un ordre partiel sur les monômes noté $m \gg m'$.

Cet ordre partiel étend l'ordre habituel des partitions.

Considérons la restriction de cet ordre à l'ensemble des monômes qui s'insèrent dans K. Le plus grand monôme est $X^K = [x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0]$, le plus petit $[0, \dots, 0, x_1, \dots, x_p]$. La figure 3.2 présente un graphe appelé graphe quasi-cristallin (voir [42]) qui est, entre autres, le diagramme de Hasse de cet ordre. On en verra une autre définition plus loin.

Soient K une composition et $m = [m_1, \dots, m_n]$ un monôme qui s'insère dans K. Soit w_K le mot quasi ruban de forme K et d'évaluation m. Les successeurs d'un monôme $m = [m_1, \dots, m_n]$ pour cet ordre sont les monômes de la forme

$$[m_1, \dots, m_i - 1, m_{i+1} + 1, \dots, m_n] \tag{3.43}$$

qui s'isère dans K. Ce sont exactement les évaluations des mots $f_i(w_K)$ quasi-ruban de forme K qui se déduise de w_K en remplaçant la dernière lettre i par $i + 1$.

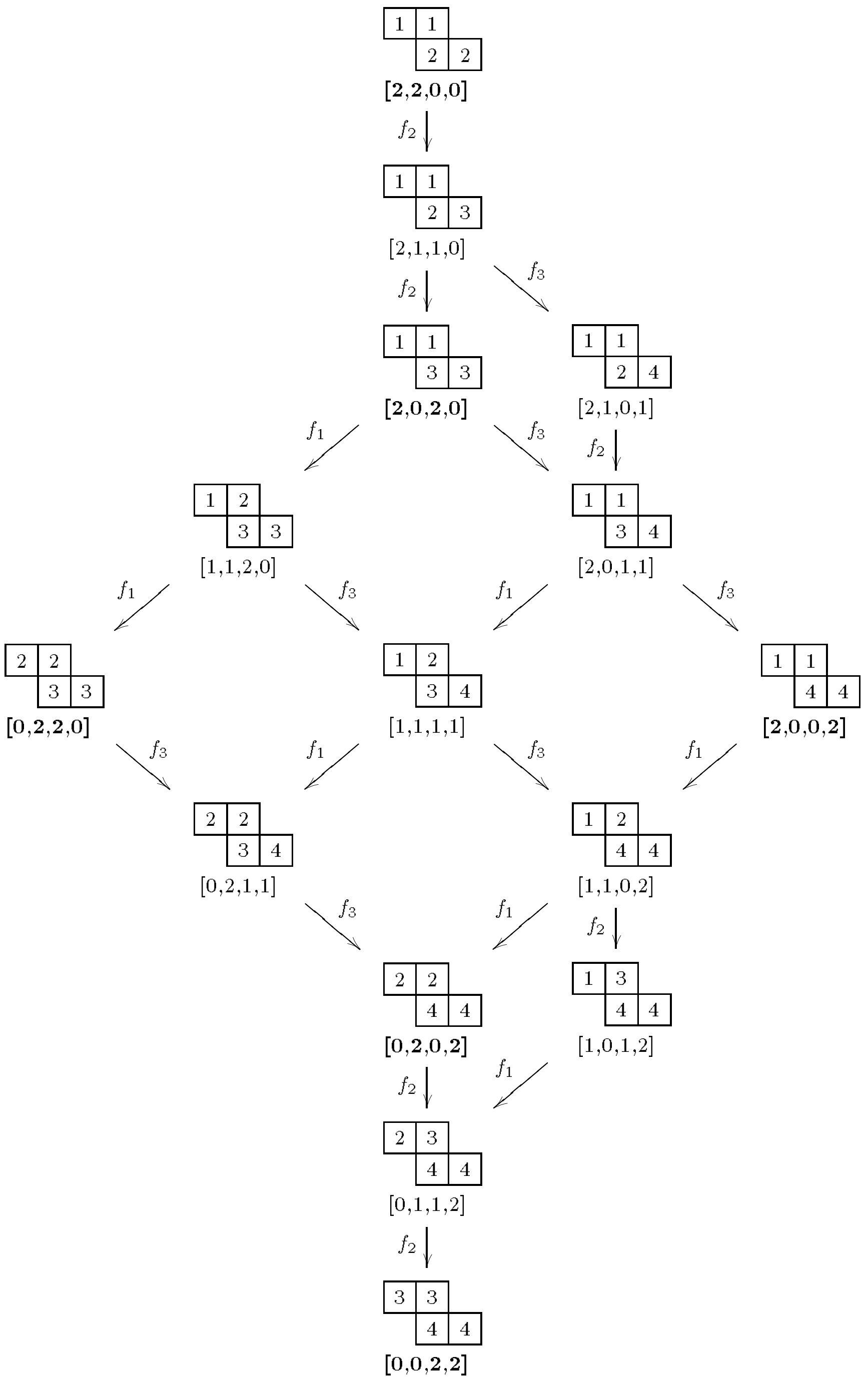


FIG. 3.2 : Graphe quasi-cristallin de $\mathbf{D}_{22}$ pour $\mathcal{U}_0(gl_4)$

Théorème 3.31 *Soit K une composition et $m = X^K = [k_1, \ldots, k_p, 0, \ldots, 0]$ le monôme dominant associé. Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. L'image de m sous l'action du symétriseur partiel $\boldsymbol{\pi}_\sigma$ est donnée par*

$$\boldsymbol{\pi}_\sigma\, m = \sum_{\substack{m' \gg \boldsymbol{\sigma}_\sigma\, m, \\ m' \text{ s'insère dans } K}} m'. \tag{3.44}$$

Par exemple pour $K = (2,2)$ en 4 variables, on a $m = [2,2,0,0]$. Soit alors $\sigma = \sigma_1\,\sigma_3\,\sigma_2$, ce qui donne $\boldsymbol{\sigma}_\sigma\, m = [0,2,0,2]$. La figure 3.2 montre que

$$\boldsymbol{\pi}_\sigma[2,2,0,0] = \left\{ \begin{array}{l} [2,2,0,0] + [2,1,1,0] + [2,0,2,0] + [2,0,1,1] + \\ {[1,1,2,0]} + [2,0,0,2] + [1,1,1,1] + [0,2,2,0] + \\ {[1,1,0,2]} + [0,2,1,1] + [0,2,0,2]. \end{array} \right.$$

Le théorème 3.26 apparaît alors comme le cas particulier où σ est la permutation maximale.

Dans la preuve nous allons avoir besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.32 *Soit K une composition de longueur p et $m = X^K$ le monôme dominant associé. L'image de m par $\boldsymbol{\pi}_\sigma$ ne dépend que de la classe de σ dans le quotient $\mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p})$.*

Démonstration. Il suffit de voir que le monôme m est invariant par toutes permutations de $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}$. Or, si m est invariant par une transposition élémentaire $\boldsymbol{\sigma}_i$, il est invariant par $\boldsymbol{\pi}_i$. D'où la proposition. $\square$

Démonstration du théorème 3.31. La preuve se fait par récurrence sur la longueur de la permutation σ. Pour commencer, si $\sigma = \mathrm{Id}$ la formule est vraie puisque $m = X^K$ est le plus grand monôme qui s'insère dans K. Supposons maintenant la formule vraie pour une permutation σ. Il faut la montrer pour toutes les permutations $\sigma_i\,\sigma$ telles que $\ell(\sigma_i\,\sigma) = 1 + \ell(\sigma)$ (autrement dit i est une montée de σ^{-1}).

Lemme 3.33 *Soit $A = \{1, 2, \ldots, p\}$ pour un $p \leq n$. Supposons que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est telle que $\ell(\sigma_i\,\sigma) = 1 + \ell(\sigma)$. Alors*

$$i + 1 \in \sigma\, A \quad \textit{implique} \quad i \in \sigma\, A. \tag{3.45}$$

Démonstration. Rappelons que

$$\sigma\, A = \{\sigma(j) \mid j \in A\} = \{i \mid \sigma^{-1}(i) \in A\}.$$

Par hypothèse, i est une montée de σ^{-1} et donc $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(i+1)$. Mais si $i+1 \in \sigma A$, c'est donc que $\sigma^{-1}(i+1) \leq p$, d'où $\sigma^{-1}(i) \leq p$. □

Revenons à la démonstration du théorème 3.31. Notons

$$l = [l_1, \ldots, l_n] = \boldsymbol{\sigma}\, m. \tag{3.46}$$

Par définition de l'action quasi-symétrisante,

$$l = (\sigma\{x_1, \ldots, x_p\})^K. \tag{3.47}$$

D'après le lemme précédent, on en déduit que si $l_{i+1} \neq 0$ alors $l_i \neq 0$. Il y a donc seulement trois cas possibles selon que l_i et l_{i+1} soient nuls ou non.

Remarquons que dans les deux cas $l_i = l_{i+1} = 0$ d'une part et $l_i \neq 0$ et $l_{i+1} \neq 0$ d'autre part, la transposition $\boldsymbol{\sigma}_i$ laisse l invariant. Ce qui signifie que

$$\sigma\{x_1, \ldots, x_p\} = \sigma_i\, \sigma\{x_1, \ldots, x_p\}. \tag{3.48}$$

D'après la proposition 3.6 les deux permutations σ_i et $\sigma_i\,\sigma$ appartiennent donc à la même classe modulo $(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p})$. Par conséquent, d'après la proposition 3.32, on trouve que $\boldsymbol{\pi}_i\, m = \boldsymbol{\pi}_i\, \boldsymbol{\pi}_\sigma\, m$, Ce qu'il fallait démontrer. Il reste donc à faire le calcul dans le seul cas $l_i \neq 0$ et $l_{i+1} = 0$.

On suppose donc que $\boldsymbol{\sigma}\, m = l = [l_1, \ldots, l_n]$ avec $l_i \neq 0$ et $l_{i+1} = 0$, et que

$$\boldsymbol{\pi}_\sigma\, m = \sum_{\substack{m' \gg \boldsymbol{\sigma}\, m, \\ m' \text{ s'insère dans } K}} m'. \tag{3.49}$$

Séparons cette somme en deux :

– Si m' est un monôme tel que

$$m'_1 + \cdots + m'_{i-1} + m'_i + m'_{i+1} > l_1 + \cdots + l_i, \tag{3.50}$$

alors le fait que m' s'insère dans K donne que $l_1 + \cdots + l_i$ est une somme partielle de m'. Par conséquent, soit $m'_{i+1} \neq 0$ et alors $\boldsymbol{\sigma}_i\, m'$ est plus grand que l (indépendamment du fait que $m'_i = 0$ ou non), soit $m'_{i+1} = 0$ et alors

$$m'_1 + \cdots + m'_{i-1} \geq l_1 + \cdots + l_i, \tag{3.51}$$

Ce qui montre que

$$[m'_1, \ldots, 0, m'_i, \ldots, m'_n] \gg l. \tag{3.52}$$

Il s'ensuit que $\boldsymbol{\sigma}_i$ stabilise la somme des monômes qui s'insèrent dans K et qui vérifient (3.50). On en déduit que l'action de $\boldsymbol{\pi}_i$ est triviale sur la somme de ces monômes. Remarquons que c'est exactement la somme des monômes m' tels que

$$m' \gg \boldsymbol{\sigma}_i\, l \quad \text{et} \quad m'_1 + \cdots + m'_{i+1} > l_1 + \cdots + l_i \tag{3.53}$$

– Il reste la somme des monômes tels que

$$m'_1 + \cdots + m'_{i-1} + m'_i = l_1 + \cdots + l_i, \quad \text{et} \quad m'_{i+1} = 0. \tag{3.54}$$

Ce sont les seuls monômes m' tels que

$$m' \gg l \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_i\, m' \not\gg l. \tag{3.55}$$

L'action de $\boldsymbol{\pi}_i$ sur ces monômes est d'envoyer

$$[m'_1, \ldots, m'_i, 0, \ldots, m'_n] \tag{3.56}$$

sur la somme

$$\sum_{u+v=m'_i} [m'_1, \ldots, u, v, \ldots, m'_n]. \tag{3.57}$$

De cette manière, on a la somme de tous les monômes q tels que :

$$\begin{aligned} q_1 + \cdots + q_{i-1} + q_i + q_{i+1} &= l_1 + \cdots + l_i \\ \text{et} \quad q_1 + \cdots + q_k &\geq l_1 + \cdots + l_k, \text{ pour } k < i \text{ ou } k > i+1. \end{aligned} \tag{3.58}$$

C'est précisément la somme des monômes q qui vérifient

$$q \gg \boldsymbol{\sigma}_i\, l \quad \text{et} \quad q_1 + \cdots + q_{i+1} = l_1 + \cdots + l_i. \tag{3.59}$$

La somme des deux sortes de monômes précédents (3.50) et (3.59) est exactement la somme de tous les monômes m' tels que $m' \gg \boldsymbol{\sigma}_i\, l$. Ainsi la propriété est vraie pour la permutation $\sigma_i\, \sigma$. La preuve est donc achevée par récurrence. □

3.2.4 Caractéristique

Dans cette sous-section, nous allons étudier la représentation de l'algèbre de Hecke dégénérée par l'action quasi-symétrisante. Il est clair qu'elle n'est pas fidèle car l'égalité

$$T_1\, T_2\, T_1 = T_2\, T_1\, T_2 = 0 \tag{3.60}$$

n'a pas lieu dans l'algèbre de Hecke dégénérée.

De plus, la caractéristique quasi-symétrique de cette action est la même que celle de l'action quasi-symétrisante du groupe symétrique. En effet, on va voir dans la suite qu'elles sont toutes les deux des spécialisations de la même action de l'algèbre de Hecke générique et, d'après [41], la caractéristique reste inchangée par la spécialisation $q = 0$. Ainsi la caractéristique de cette représentation est donnée par

$$\mathrm{ch}_t(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{(1-t)^m} h_{(m,n-m)}. \tag{3.61}$$

Rappelons que cette caractéristique ne donne pas la décomposition de la représentation en irréductibles mais seulement les facteurs de composition du module associé.

Théorème 3.34 *Les opérateurs $\overline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma$ où σ décrit l'ensemble des permutations qui évitent le motif* 321 *forment une base de l'image de $H_n(0)$ dans* $\mathrm{End}(\mathbb{C}[X])$ *par l'action quasi-symétrisante.*

Ce théorème sera montré dans le cas de l'algèbre Hecke générique (voir théorème 3.48). Dans le cas de l'algèbre de Hecke dégénérée on a en fait un résultat plus fort :

Proposition 3.35 *L'ensemble des permutations σ telles que $\overline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma \neq 0$ est exactement l'ensemble des permutations qui évitent* 321.

Démonstration. D'après le théorème précédent il est clair que $\overline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma \neq 0$ quand σ évite 321. De plus, d'après le théorème 3.20, on a l'égalité

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}_2 \overline{\boldsymbol{\pi}}_1 = \overline{\boldsymbol{\pi}}_2 \overline{\boldsymbol{\pi}}_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}_2 = 0.$$

Enfin les permutations qui ont un mot réduit avec le facteur $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ sont exactement les permutations qui possèdent le motif 321. □

Les opérateurs $\overline{\boldsymbol{\pi}}_\sigma$ sont ainsi particulièrement adaptés pour calculer avec l'action quasi-symétrisante.

3.3 Action de l'algèbre de Hecke générique

Dans les sous sections précédentes, nous avons construit deux actions sur l'anneau des polynômes, l'une du groupe symétrique, l'autre de son algèbre de Hecke dégénérée. Le but de cette section est, dans un premier temps, d'étendre ces deux actions à l'algèbre de Hecke générique. Ensuite on utilisera cette action pour obtenir un q-analogue du symétriseur. Cette construction sera utilisée dans la suite pour construire des analogues des fonctions de Hall-Littlewood.

3.3.1 Théorème principal

Rappelons tout d'abord que dans le cas classique, l'algèbre de Hecke générique $H_n(q)$ agit sur les polynômes par la formule [8, 60, 50] :

$$T_i\, f = (q-1)\,\pi_i\, f + \sigma_i\, f. \tag{3.62}$$

Dans notre cas, ceci ne donne pas une action de l'algèbre de Hecke. En fait on va interpoler simplement entre les deux actions précédentes :

Théorème 3.36 *Les opérateurs $\boldsymbol{T}_i$ définis par*

$$\boldsymbol{T}_i = (1-q)\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i + q\,\boldsymbol{\sigma}_i = \overline{\boldsymbol{\pi}}_i + q(\boldsymbol{\sigma}_i - \overline{\boldsymbol{\pi}}_i) \tag{3.63}$$

vérifient les relations de Hecke.

Il est à noter que, dans le cas classique, cette formule donne elle aussi une action de $H_n(q)$. Avant de montrer le théorème, nous allons donner les règles de calcul. Pour simplifier les notations, nous écrivons seulement les formules pour $\boldsymbol{T}_1$. Les actions des autres opérateurs s'écrivent de même.

Proposition 3.37 *Soit i, j deux entiers non nuls. Alors*

$$\boldsymbol{T}_1[0,0] = q[0,0] \qquad et \qquad \boldsymbol{T}_1[i,j] = q[i,j], \tag{3.64}$$

$$\boldsymbol{T}_1[i,0] = (1-q)\sum_{u=1}^{i-1}[i-u,u] + [0,i], \tag{3.65}$$

$$\boldsymbol{T}_1[0,i] = (q-1)\sum_{u=1}^{i-1}[i-u,u] + q[i,0] + (q-1)[0,i]. \tag{3.66}$$

Note 3.38 On conservera la convention de ne pas différencier et de noter en caractères normaux les opérateurs classiques et les éléments abstraits de l'algèbre de Hecke. On notera également en gras leurs analogues quasi-symétrisants.

Note 3.39 Dans le cas classique, les opérateurs de différences divisées commutent avec la multiplication par les polynômes symétriques. Il est donc suffisant de vérifier les identités sur une base de $\mathbb{C}[X]$ vu comme module libre sur l'anneau des fonctions symétriques. Les polynômes de Schubert et de Grothendieck sont particulièrement adaptés à ce calcul [63, 50]. Dans notre cas, les opérateurs quasi-symétrisants ne commutent pas avec le produit. Les fonctions quasi-symétriques n'agissent pas non plus comme des scalaires pour ces opérateurs. Nous n'avons pas trouvé d'analogue des polynômes de Schubert. Nous allons donc montrer le théorème en vérifiant les relations de tresses pour tous les monômes sur trois variables. Remarquons au passage que le module des polynômes sur les fonctions quasi-symétriques n'est pas libre.

Démonstration. A l'aide de l'équation (3.25) et de l'expression (3.28) des opérateurs $\overline{\boldsymbol{\pi}}_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_i$, on trouve :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_i^2 &= (1-q)^2\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i^2 + q(1-q)(\boldsymbol{\sigma}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i + \overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\boldsymbol{\sigma}_i) + q^2\\ &= -(1-q)^2\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i + q(q-1)\,\boldsymbol{\sigma}_i + q\\ &= (q-1)\,\boldsymbol{T}_i + q,\end{aligned}$$

ce qui montre la relation quadratique. Le lemme suivant permet de montrer les relations de tresses pour $\boldsymbol{T}_i$.

Lemme 3.40 *Pour $i < n-2$ on a*

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{\sigma}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\\ +\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\\ +\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r}\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\\ +\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\\ +\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\end{array}\right. \tag{3.67}$$

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{\sigma}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\\ +\,\boldsymbol{\sigma}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i\\ +\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r}\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\\ +\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\\ +\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\end{array}\right. \tag{3.68}$$

En effet, en admettant le lemme, l'expression

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_i\,\boldsymbol{T}_{i+1}\,\boldsymbol{T}_i =&(1-q)^3\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_1 +\\ &q(1-q)^2(\boldsymbol{\sigma}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i + \overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i + \overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i) +\\ &q^2(1-q)(\boldsymbol{\sigma}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i + \boldsymbol{\sigma}_i\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i + \overline{\boldsymbol{\pi}}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i) +\\ &q^3\,\boldsymbol{\sigma}_i\,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\,\boldsymbol{\sigma}_i\,.\end{aligned}$$

apparaît comme étant symétrique en i et $i+1$.

Il reste donc à montrer le lemme. Rappelons que

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_i[m_0, \ldots, m_i, m_{i+1}, \ldots, m_n] = 0$$

sauf si un et un seul des deux entiers m_i et m_{i+1} est non nul. Il est facile de voir que les deux membres des deux équations du lemme sont nuls sur les monômes constants et sur $[i, j, k]$, pourvu que i, j et k soient trois entiers non nuls.

Il reste maintenant à calculer les images des 6 monômes

$$[0, i, j], \quad [i, 0, j], \quad [i, j, 0], \quad [i, 0, 0], \quad [0, i, 0], \quad [0, 0, i].$$

sous l'action des 12 opérateurs qui apparaissent dans le lemme 3.40. Ces calculs se font directement, en appliquant les règles (3.23) et la définition 3.1. Les deux tableaux suivants montrent les résultats :

	$\boldsymbol{\sigma}_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}_2 \overline{\boldsymbol{\pi}}_1$	$\overline{\boldsymbol{\pi}}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \overline{\boldsymbol{\pi}}_1$	$\overline{\boldsymbol{\pi}}_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}_2 \boldsymbol{\sigma}_1$	$\boldsymbol{\sigma}_2 \overline{\boldsymbol{\pi}}_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}_2$	$\overline{\boldsymbol{\pi}}_2 \boldsymbol{\sigma}_1 \overline{\boldsymbol{\pi}}_2$	$\overline{\boldsymbol{\pi}}_2 \overline{\boldsymbol{\pi}}_1 \boldsymbol{\sigma}_2$
$[i, j, 0]$	0	0	$\Sigma_i + [0,i,j]$	$\Sigma_i + [0,i,j]$	0	0
$[i, 0, j]$	0	$-(\Sigma_i + [0,i,j])$	0	$-(\Sigma_i + [0,i,j])$	0	0
$[0, i, j]$	0	$\Sigma_i + [0,i,j]$	$-(\Sigma_i + [0,i,j])$	0	0	0
$[i, 0, 0]$	Σ	Σ'	$-\Sigma'$	0	0	Σ
$[0, i, 0]$	$-\Sigma$	$-\Sigma'$	0	$-\Sigma'$	$-\Sigma$	0
$[0, 0, i]$	0	0	Σ'	Σ'	Σ	$-\Sigma$

	$\boldsymbol{\sigma}_1\,\boldsymbol{\sigma}_2\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_1$	$\boldsymbol{\sigma}_1\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_2\,\boldsymbol{\sigma}_1$	$\overline{\boldsymbol{\pi}}_1\,\boldsymbol{\sigma}_2\,\boldsymbol{\sigma}_1$	$\boldsymbol{\sigma}_2\,\boldsymbol{\sigma}_1\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_2$	$\boldsymbol{\sigma}_2\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_1\,\boldsymbol{\sigma}_2$	$\overline{\boldsymbol{\pi}}_2\,\boldsymbol{\sigma}_1\,\boldsymbol{\sigma}_2$
$[i,j,0]$	0	$\Sigma_j+[0,i,j]$	$\Sigma_i+[0,i,j]$	$\Sigma_j+[0,i,j]$	$\Sigma_i+[0,i,j]$	0
$[i,0,j]$	$\Sigma_i+[i,0,j]$	0	$-(\Sigma_i+[0,i,j])$	$-(\Sigma_j+[0,i,j])$	0	$\Sigma_j+[i,0,j]$
$[0,i,j]$	$-(\Sigma_i+[i,0,j])$	$-(\Sigma_j+[0,i,j])$	0	0	$-(\Sigma_i+[0,i,j])$	$-(\Sigma_j+[i,0,j])$
$[i,0,0]$	$[0,*,*]$	$[*,0,*]$	0	0	$[*,0,*]$	$[0,*,*]$
$[0,i,0]$	$-[0,*,*]$	0	$[*,*,0]$	$[*,*,0]$	0	$-[0,*,*]$
$[0,0,i]$	0	$-[*,0,*]$	$-[*,*,0]$	$-[*,*,0]$	$-[*,0,*]$	0

avec les notations :

$$\Sigma = \sum_{\substack{u+v+w=i\\ w\neq 0}} [u,v,w], \qquad \Sigma' = \sum_{\substack{u+v+w=i\\ v\neq 0,\ w\neq 0}} [u,v,w],$$

$$\Sigma_i = \sum_{\substack{u+v=i\\ u\neq 0,\ v\neq 0}} [u,v,j], \qquad \Sigma_j = \sum_{\substack{u+v=j\\ u\neq 0,\ v\neq 0}} [i,u,v],$$

$$[*,*,0] = \sum_{\substack{u+v=i\\ v\neq 0}} [u,v,0], \quad [*,0,*] = \sum_{\substack{u+v=i\\ v\neq 0}} [u,0,v], \quad [0,*,*] = \sum_{\substack{u+v=i\\ v\neq 0}} [0,u,v].$$

Donnons un exemple : calculons $\boldsymbol{\sigma}_2\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_1\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_2[i,0,j]$. Tout d'abord, on a

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_2[i,0,j] = -\sum_{u+v=j,\ v\neq 0} [i,u,v].$$

Ensuite, sous l'action de $\overline{\boldsymbol{\pi}}_1$, le seul monôme qui ne s'annule pas est $-[i,0,j]$. Ainsi

$$\overline{\boldsymbol{\pi}}_1\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_2[i,0,j] = -\sum_{u+v=i,\ v\neq 0} [u,v,j].$$

Enfin, $\boldsymbol{\sigma}_2$ laisse ceci invariant. La somme est exactement $-\Sigma_i-[0,i,j]$, comme on peut le lire dans le tableau.

Il est possible de vérifier les résultats. Ainsi, entre deux lignes horizontales du tableau, la somme de chaque colonne est nulle. En effet, la somme des monômes de droite est quasi-symétrique. Par exemple

$$\boldsymbol{\sigma}_1\,\boldsymbol{\sigma}_2\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_1([i,j,0]+[i,0,j]+[0,i,j]) = 0 + (\Sigma_i + [i,0,j]) - (\Sigma_i + [i,0,j]) = 0$$

On vérifie que dans chaque ligne, les sommes de la partie droite et de la partie gauche sont égales. C'est exactement l'énoncé du lemme. □

3.3.2 q-Idempotents

Le but de cette sous-section est de définir un q-analogue de l'opérateur de symétrisation $\boldsymbol{\pi}_\omega$. L'action de l'algèbre de Hecke générique nous permet de définir des analogues quasi-symétrisants des éléments de Yang-Baxter (voir section 2.4.1). Nous allons ensuite montrer que les opérateurs ainsi définis laissent les polynômes quasi-symétriques invariants (au scalaires près). L'opérateur maximal va donc constituer un bon candidat pour l'analogue du symétriseur de Littlewood.

Définition 3.41 *On définit les opérateurs élémentaires de q-quasi-symétrisation et de q-anti-quasi-symétrisation par :*

$$\boldsymbol{\Box}_i = \boldsymbol{T}_i + 1 \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{\nabla}_i = \boldsymbol{T}_i - q. \tag{3.69}$$

Ce sont les actions quasi-symétrisantes des éléments de l'algèbre de Hecke donnés par

$$\Box_i = T_i + 1 \quad \text{et} \quad \nabla_i = T_i - q. \tag{3.70}$$

Ainsi toutes les relations vérifiées par les opérateurs classiques sont vérifiées par leur version quasi-symétrisantes. On a donc

$$\boldsymbol{\Box}_i^2 = (q+1)\,\boldsymbol{\Box}_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\nabla}_i^2 = -(q+1)\,\boldsymbol{\nabla}_i\,. \tag{3.71}$$

D'après la construction des opérateurs de symétrisation de Yang-Baxter (voir section 2.4.1), on peut définir pour toute permutation σ deux opérateurs $\boldsymbol{\Box}_\sigma$ et $\boldsymbol{\nabla}_\sigma$.

Définition 3.42 *On appelle q-quasi-symétriseur maximal l'opérateur* $\boldsymbol{\Box}_\omega$.

D'après [18], c'est un q-analogue du quasi-symétriseur maximal :

Théorème 3.43 *Soit ω la permutation maximale de $\mathfrak{S}_n$. On a alors*

$$\square_\omega = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \boldsymbol{T}_\sigma \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\nabla}_\omega = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-q)^{\ell(\omega\sigma)}\, \boldsymbol{T}_\sigma \tag{3.72}$$

Le lemme principal qui permet de transférer les calculs du cas classique à notre cas est l'équivalence suivante :

Lemme 3.44 *Soit f un polynôme. Pour tout i, il y a équivalence entre :*

1. *f est invariant par $\boldsymbol{\sigma}_i$,*
2. *$\boldsymbol{T}_i\, f = qf$,*
3. *$\square_i\, f = (1+q)f$,*
4. *$\boldsymbol{\nabla}_i\, f = 0$.*

Démonstration. Les trois dernières propriétés sont trivialement équivalentes. Les deux premières le sont également car $\boldsymbol{T}_i = \overline{\boldsymbol{\pi}}_i + q(\boldsymbol{\sigma}_i - \overline{\boldsymbol{\pi}}_i)$, et $\overline{\boldsymbol{\pi}}_i\, f = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{\sigma}_i\, f = f$. □

La remarque fondamentale est que l'énoncé correspondant est aussi vrai dans le cas classique. Ainsi, les notions « être symétrique » dans le cas classique et « être quasi-symétrique » dans notre cas, s'expriment de la même manière dans l'algèbre de Hecke. On démontre ainsi le théorème suivant, qui s'énonce de la même manière dans le cas classique (voir théorème 2.36).

Théorème 3.45 *Le q-quasi-symétriseur $\square_\omega$, considéré comme agissant sur les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$ a pour image l'espace des polynômes quasi-symétriques.*

De plus, si l'on prend les coefficients dans $\mathbb{C}(q)$, l'opérateur $\frac{1}{[n]_q!}\,\square_\omega$ est un projecteur sur l'espace des polynômes quasi-symétriques.

Rappelons que la q-factorielle est donnée par $[n]_q! = \prod_{i=1}^{n} [i]_q$.

Démonstration. Dans le cas classique, $\square_\omega$ a pour image les fonctions symétriques. Il vérifie donc $\square_i\,\square_\omega = (1+q)\,\square_\omega$. Cette égalité a lieu non seulement entre opérateurs sur les polynômes, mais aussi dans l'algèbre de Hecke. Dans notre cas, on a donc $\square_i\,\square_\omega = (1+q)\,\square_\omega$. Ce qui d'après le lemme 3.44 montre que f est quasi-symétrique.

L'égalité $\square_\omega\,\square_\omega = [n]_q!\,\square_\omega$ est vraie dans le cas classique et donc dans le nôtre. Ceci termine la démonstration. □

En revanche, l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}_\omega$ est très différent de la version classique :

Théorème 3.46 *Supposons $n > 2$. Alors $\boldsymbol{\nabla}_\omega = 0$.*

Démonstration. Rappelons que ∇_ω se factorise dans l'algèbre de Hecke en

$$\nabla_1(\nabla_2 + \frac{q}{1+q})\,\nabla_1(\nabla_3 + \frac{1+q}{1+q+q^2})(\nabla_2 + \frac{q}{1+q})\dots \tag{3.73}$$

Ainsi, il suffit de faire la preuve dans le cas $n = 3$.

De plus, la relation quadratique pour T_i peut se réécrire

$$(T_i + 1)(T_i - q) = (T_i - q)(T_i + 1) = 0, \tag{3.74}$$

ou, en utilisant les q-symétriseur et q-antisymétriseur :

$$\square_i\,\nabla_i = \nabla_i\,\square_i = 0. \tag{3.75}$$

En développant $\boldsymbol{\square}_i$, on trouve :

$$(\overline{\boldsymbol{\pi}}_i + q(1 + \boldsymbol{\sigma}_i + \overline{\boldsymbol{\pi}}_i))\,\boldsymbol{\nabla}_i = 0. \tag{3.76}$$

On a ainsi montré le lemme suivant :

Lemme 3.47 *Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Alors $\boldsymbol{\sigma}_i\,\boldsymbol{\nabla}_i = -\,\boldsymbol{\nabla}_i$.*

Remarquons, au passage, que cette propriété est aussi vraie dans le cas classique. On sait, d'après les factorisations de Yang-Baxter, que $\boldsymbol{\nabla}_\omega$ peut se factoriser à gauche par chacun de deux opérateurs élémentaires $\boldsymbol{\nabla}_1$ et $\boldsymbol{\nabla}_2$. Ainsi

$$\boldsymbol{\sigma}_1\,\boldsymbol{\nabla}_\omega = \boldsymbol{\sigma}_2\,\boldsymbol{\nabla}_\omega = -\,\boldsymbol{\nabla}_\omega\,. \tag{3.77}$$

Mais on a également :

$$\boldsymbol{\sigma}_1\,\boldsymbol{\sigma}_2\,\boldsymbol{\sigma}_1\,\boldsymbol{\nabla}_\omega = -\,\boldsymbol{\nabla}_\omega\,. \tag{3.78}$$

On peut donc reprendre l'argument du corollaire 3.12 : le seul polynôme qui est multiplié par -1 par les trois transpositions est le polynôme nul. D'où le résultat. □

3.3.3 Caractéristiques

Dans cette sous section, nous donnons la formule des caractères dans le cadre de l'algèbre de Hecke générique. Nous allons énoncer et prouver dans ce cadre le théorème donnant une base de l'image dans les endomorphismes de $\mathbb{C}[X]$. Les preuves sont exactement les mêmes dans le cas du groupe symétrique et de l'algèbre de Hecke dégénérée.

Commençons tout d'abord par remarquer que l'action quasi-symétrisante n'est pas fidèle puisque l'égalité $\boldsymbol{\nabla}_\omega = 0$ n'a pas lieu dans $H_n(q)$. Il est en fait possible de donner une caractérisation complète du noyau :

Théorème 3.48 *L'image de $H_n(q)$ dans* $\mathrm{End}(\mathbb{C}[X])$ *est le quotient de $H_n(q)$ par l'idéal engendré par $(\nabla_{(i,i+2)})$ où $i = 1 \dots n-2$.*

La famille $(\boldsymbol{\nabla}_\sigma)$ où σ parcourt l'ensemble des permutations qui évitent le motif 321 *est une base de l'image de $H_n(q)$ dans* $\mathrm{End}(\mathbb{C}[X])$.

Démonstration. L'égalité $\boldsymbol{\nabla}_{(i,i+2)} = 0$ a déjà été montrée (voir théorème 3.46). Ainsi la famille $(\boldsymbol{\nabla}_\sigma)$, où σ évite le motif 321, engendre l'image.

Soit E l'espace des polynômes en X engendré par les monômes dans lesquels aucune variable n'est au carré. Avec nos notations, ce sont exactement les monômes de la forme A^K où $A \in \mathcal{P}(X)$ et $K = (1, 1, \dots, 1)$. En tant que module sur l'algèbre de Hecke, il est isomorphe au module $V^{\otimes n}$ où $V = \mathbb{C}\xi_0 + \mathbb{C}\xi_1$ est un espace de dimension 2. Or, d'après [5], on sait que la dimension de l'image de $H_n(q)$ dans $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ est le nombre de permutations qui évitent 321. Ainsi la famille annoncée est une base.

La deuxième partie de l'énoncé s'ensuit immédiatement, car l'égalité

$$\boldsymbol{\nabla}_{(i,i+2)} = 0$$

permet d'exprimer toutes les actions sur la base. □

Note 3.49 Contrairement au cas de l'algèbre de Hecke dégénérée, on n'a pas l'égalité $\boldsymbol{\nabla}_\sigma = 0$ si σ possède le motif 321.

Remarquons que le nombre de permutations évitant 321 dans $\mathfrak{S}_n$ est égal au nombre de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Par exemple en 4 variables, l'image de $H_4(q)$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}[X])$ est de dimension 14. On peut prendre pour base de l'image les éléments $(\boldsymbol{\nabla}_\sigma)$ où σ parcourt

$$\begin{array}{ccccccc} 1234, & 1243, & 1324, & 1342, & 1423, & 2134, & 2143, \\ 2314, & 2341, & 2413, & 3124, & 3142, & 3412, & 4123. \end{array}$$

Remarquons que $\boldsymbol{\nabla}_{4231}$ n'est pas dans le noyau (Cette permutation n'a pas de mot réduit qui commence ou finit par le facteur $\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i$).

De manière équivalente on peut donner la caractéristique de Frobenius de cette action de l'algèbre de Hecke :

Proposition 3.50 *La caractéristique de Frobenius de l'action quasi-symétrisante de l'algèbre de Hecke est*

$$\mathrm{ch}_t(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{(1-t)^m} h_{(m,n-m)}. \tag{3.79}$$

Démonstration. Il est connu que la caractéristique de Frobenius d'une action de l'algèbre de Hecke générique est égale à la caractéristique de l'action du groupe symétrique obtenue en posant $q = 1$. Rappelons l'argument :

Soit $V_\lambda(q)$ le q-module de Specht associé à la partition λ. Comme dans le cas du groupe symétrique, la formule des caractères est donnée par (voir [5])

$$\chi_\mu^\lambda(q) = \mathrm{tr}(T_{\omega_\mu}) = \langle s_\lambda, C_\mu(q)\rangle \tag{3.80}$$

où s_λ est la fonction de Schur, ω_μ est la permutation maximale du sous groupe de Young $\mathfrak{S}_\lambda$ et

$$C_\mu(q) = (q-1)^{\ell(\mu)} h_\mu((q-1)X) \tag{3.81}$$

est un q-analogue de l'indicateur de cycle du groupe symétrique. Il est important de voir que la caractéristique s_λ ne dépend pas de q.

Mais si V est un module, sa décomposition en irréductibles est obtenue en décomposant son caractère en

$$\chi_V(q) = \sum_\lambda c_\lambda \chi^\lambda(q). \tag{3.82}$$

Les entiers c_λ ne dépendent pas de q. On peut donc les calculer en spécifiant $q = 1$. Ainsi la caractéristique de l'action quasi-symétrisante de l'algèbre de Hecke générique est égale à la caractéristique de l'action du groupe symétrique donnée dans la proposition 3.9. □

Remarquons que, ainsi qu'il est prouvé dans [19], cette formule est encore valable à $q = 0$.

3.4 Actions locales du groupe symétrique

Le but de ce qui suit est de définir quelques généralisations de l'algèbre des fonctions quasi-symétriques. Nous considérons donc une certaine classe d'actions du groupe symétrique sur l'anneau des polynômes appelées actions locales. Après avoir donné un codage pratique de ces actions, nous nous posons la question suivant : quelles sont les actions locales dont l'ensemble des polynômes invariants est une sous-algèbre de l'algèbre des polynômes. La réponse à cette question fait intervenir une hiérarchie infinie d'algèbres de fonctions partiellements symétriques indicée par les entiers.

Définition 3.51 *On appelle* action locale *de* $\mathfrak{S}_n$ *sur* $\mathbb{K}[X]$ *tout morphisme* $\rho\ :\ \mathfrak{S}_n \longrightarrow \operatorname{End}\mathbb{K}[X]$ *qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) *la transposition élémentaire* σ_i *n'agit que sur les variables* x_i *et* x_{i+1}*, les autres variables jouant le rôle de constantes,*

(ii) *l'action d'une transposition élémentaire se fait uniquement par échange de variables, toutes les transpositions agissant de la même manière, c'est-à-dire que, a et b étant fixés*

$$\sigma_i(x_i^a x_{i+1}^b) = \left\{ \begin{array}{c} x_i^a x_{i+1}^b \\ ou \\ x_i^b x_{i+1}^a \end{array} \right. \quad \textit{indépendamment de } i. \tag{3.83}$$

Par conséquent, l'action de σ_1 sur tous les monômes suffit à déterminer ρ. Pour simplifier les notations nous allons supposer l'alphabet des variables $\{x_1 < \cdots < x_n\}$ totalement ordonné, et noter le monôme $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ par la pseudo-composition $[m_1, m_2, \dots m_n]$.

Exemple 3.52 Soit $m = [m_1, m_2, \dots m_n]$ un monôme. On pose

$$\rho(\sigma_i)(m) = \left\{ \begin{array}{ll} [\dots, m_i, m_{i+1}, \dots] & \text{si } m_i \text{ et } m_{i+1} \text{ sont de même parité,} \\ [\dots, m_{i+1}, m_i, \dots] & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Les conditions (i) et (ii) sont bien vérifiées. Nous allons voir dans la suite que ceci définit une action locale du groupe symétrique sur les polynômes.

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la définition.

Proposition 3.53 *Soit* ρ *une action locale de* $\mathfrak{S}_n$ *sur* $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$*. Alors la restriction de* ρ *à* $\mathfrak{S}_{n-1}$ *est une action locale sur* $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]$*.*

Nous allons donner une autre caractérisation des actions locales.

Définition 3.54 (Relation associée à une application)
Soit ρ *une application de* $\mathfrak{S}_n$ *dans* $\operatorname{End}\mathbb{K}[X]$ *qui vérifie les conditions (i) et (ii) de la définition 3.51. On lui associe alors la relation* $\mathcal{R}_\rho$ *sur les entiers définies par*

$$\textit{Pour tout } (u, v), \quad u\,\mathcal{R}_\rho\, v \quad \textit{si} \quad \sigma_1[u, v] = [u, v]. \tag{3.84}$$

Dans cette définition, on n'a pas supposé que l'application ρ est un morphisme, elle ne définit donc pas forcément une action. Les conditions (i) et (ii) assurent alors que, pour tout i, on a

$$\rho(\sigma_i)(m) = \begin{cases} [\ldots, m_i, m_{i+1}, \ldots] & \text{si } m_i \,\mathcal{R}_\rho\, m_{i+1}, \\ [\ldots, m_{i+1}, m_i, \ldots] & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.85}$$

Réciproquement, si $\mathcal{R}$ est une relation réflexive sur les entiers, l'équation (3.85) définit une application de $\mathfrak{S}_n$ dans $\operatorname{End}\mathbb{K}[X]$ qui vérifie les conditions (i) et (ii).

Proposition 3.55 *Soit ρ une application de $\mathfrak{S}_n$ dans* $\operatorname{End}\mathbb{K}[X]$ *qui vérifie les conditions (i) et (ii) de la définition 3.51. Soit $\mathcal{R}_\rho$ la relation sur les entiers associée. Il y a équivalence entre*

(i) *ρ est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans* $\operatorname{End}\mathbb{K}[X]$,

(ii) *$\mathcal{R}_\rho$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Il est facile de voir que la symétrie de $\mathcal{R}_\rho$ est équivalente au fait que $\sigma_i^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$. Montrons que la relation de tresse implique la transitivité. Soient u, v et w trois entiers tels que $u\,\mathcal{R}_\rho\, v$ et $v\,\mathcal{R}_\rho\, w$. Supposons que u ne soit pas en relation avec w. On a alors

$$\rho(\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_1)[v, u, w] = \rho(\sigma_1\,\sigma_2)[v, w, u] = \rho(\sigma_1)[v, w, u] = [v, w, u].$$

Mais on a aussi :

$$\rho(\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2)[v, u, w] = \rho(\sigma_2\,\sigma_1)[v, w, u] = \rho(\sigma_2)[v, w, u] = [v, u, w].$$

Ce qui est en contradiction avec le fait que ρ soit un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans $\operatorname{End}\mathbb{K}[X]$. D'où (i) implique (ii).

Pour montrer la réciproque, plutôt que de vérifier à la main la relation de tresse, on va généraliser l'argument de la propriété 3.2. Soit donc une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On va donner une autre construction de l'action qui lui est associée. Soit C l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$. Notons $C(i)$ la classe de l'entier i. Soit m un monôme. On peut lui associer d'une part le monôme $C(m)$ sur l'alphabet C défini par

$$[C(m_1), C(m_2), \ldots, C(m_n)], \tag{3.86}$$

et d'autre part, pour toute classe c la suite $E_c(m)$ des m_i qui appartiennent à la classe, dans l'ordre des variables. On obtient alors une famille $(E_c(m))_{c\in C}$, telle que la longueur de $E_c(m)$ est égale au nombre de $C(m_i)$ égaux à c.

Ceci définit clairement une correspondance bijective entre les monômes sur l'alphabet X et les couples

$$([c_1, c_2, \ldots, c_n], (E_c)_{c\in C})$$

telle que la longueur de E_c soit égale au nombre de c_i égaux à c. Le groupe symétrique agit alors naturellement sur les mots $[c_1, c_2, \ldots, c_n]$ par permutation des variables. Si σ est une permutation, on envoie donc le monôme associé à $([c_1, \ldots, c_n], (E_c))$ sur le monôme associé à $(\sigma[c_1, \ldots, c_n], (E_c))$. Ceci définit clairement une action du groupe symétrique sur $\mathbb{K}[X]$. On vérifie sur les transpositions élémentaires que cette action est bien l'action associée à $\mathcal{R}$. D'où la propriété. $\square$

Exemple 3.56 Reprenons l'action de l'exemple précédent. Il y a donc deux classes que l'on notera P pour la classe des entiers pairs et I pour les entiers impairs. Au monôme

$$m = [\ 0,\ 2,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 1,\ 1,\ 2\ ]$$

on va associer le mot

$$C(m) = [\ \mathrm{P},\ \mathrm{P},\ \mathrm{I},\ \mathrm{P},\ \mathrm{I},\ \mathrm{I},\ \mathrm{I},\ \mathrm{I},\ \mathrm{P}\ ]$$

et les deux suites d'entiers

$$E_{\mathrm{P}} = (0, 2, 4, 2) \quad \text{et} \quad E_{\mathrm{I}} = (1, 3, 5, 1, 1).$$

Soit $\sigma = 743652198$ d'où $\sigma^{-1} = 763294158$. On a alors

$$\sigma(C(m)) = [\ \mathrm{I},\ \mathrm{I},\ \mathrm{I},\ \mathrm{P},\ \mathrm{I},\ \mathrm{P},\ \mathrm{P},\ \mathrm{P},\ \mathrm{I}\ ].$$

D'où finalement

$$\rho(\sigma)m = [\ 1,\ 3,\ 5,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 2,\ 1\ ].$$

On se pose maintenant la question de savoir quelles sont les actions locales dont l'ensemble des polynômes invariants est une sous algèbre de l'algèbre des polynômes. Autrement dit, à quelles conditions le produit de deux polynômes invariants est-il toujours un polynôme invariant ?

Définition 3.57 *Soit ρ une action locale du groupe symétrique. On dira qu'un polynôme est ρ-*symétrique*, s'il est invariant par $\rho(\mathfrak{S}_n)$.*

Cette définition a pour conséquence immédiate :

Proposition 3.58 *Soit ρ une action locale de $\mathfrak{S}_n$. Soit $f(x_1,\dots,x_n)$ un polynôme ρ-symétrique. Alors $f(x_1,\dots,x_{n-1},0)$ est μ-symétrique pour la restriction μ de ρ à $\mathfrak{S}_{n-1}$.*

La propriété suivante caractérise les actions ρ dont les polynômes ρ-symétriques forment une algèbre.

Théorème 3.59 *Soit ρ une action locale du groupe symétrique. L'ensemble des polynômes ρ-symétriques est une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si il existe un N entier ou infini tel que*

$$\rho(\sigma_i)(m) = \begin{cases} [\dots, m_i, m_{i+1}, \dots] & \textit{si } m_i \geq N \textit{ et } m_{i+1} \geq N, \\ [\dots, m_{i+1}, m_i, \dots] & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{3.87}$$

Remarquons tout d'abord que l'action triviale correspond au cas $N = 0$, l'action classique au cas N infini et l'action quasi-symétrisante au cas $N = 1$.

Démonstration. Soit ρ une action locale dont l'ensemble des invariants est une sous-algèbre de l'anneau des polynômes. Soit $\mathcal{R}_\rho$ la relation d'équivalence associée. Par la propriété 3.58 pour chercher la forme de ρ on peut se restreindre au cas de deux variables.

Supposons qu'il existe deux entiers $u < v$ tels que $u\,\mathcal{R}_\rho\,v$, c'est à dire que le polynôme $x_1^u x_2^v = [u, v]$ est ρ-symétrique. Le polynôme $x_1 + x_2 = [0, 1] + [1, 0]$ est toujours ρ-symétrique. On en déduit que leur produit $[u+1, v] + [u, v+1]$ l'est aussi. D'où

$$u + 1\,\mathcal{R}_\rho\,v \quad \text{et} \quad u\,\mathcal{R}_\rho\,v + 1.$$

Et par transitivité

$$u\,\mathcal{R}_\rho\,u + 1.$$

De proche en proche, pour tout $w \geq u$, on a donc

$$u\,\mathcal{R}_\rho\,w.$$

Si on appelle N le plus petit entier tel que $N\,\mathcal{R}_\rho\,N + 1$, l'action est bien de la forme donnée dans l'énoncé.

Réciproquement, soit N un entier et ρ l'action associée. On vérifie facilement que le produit de deux polynômes ρ-symétrique est ρ-symétrique. En effet si les exposants ne dépassent pas N, la fonction est symétrique au sens classique, sinon l'hypothèse d'être ρ-symétrique n'est pas restrictive. D'où la propriété. $\square$

On note $\mathbb{K}[x_1,\dots x_n]^N$ l'algèbre des polynômes N-symétriques. On a donc une famille de sous-algèbres de l'algèbre des polynômes indexée par les entiers. Il est clair que les morphismes de restriction $(n > p)$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x_1,\dots x_n]^N &\longrightarrow \mathbb{K}[x_1,\dots x_p]^N \\ f(x_1,\dots,x_n) &\longmapsto f(x_1,\dots,x_p,0,\dots,0) \end{aligned} \tag{3.88}$$

sont compatibles. On peut donc prendre la limite projective du système. La limite est donc une algèbre appelée algèbre des fonctions N-symétriques.

Chapitre 4

Modules de Demazure pour un groupe quantique dégénéré

Résumé

Le but de ce chapitre est de présenter une interprétation des résultats du chapitre précédent. Cette interprétation apparaît dans l'étude des représentations polynomiales de l'algèbre enveloppante quantique dégénérée de Krob et Thibon [41, 42] (voir sous-section 2.5.4). Nous montrons que l'action quasi-symétrisante peut être vue comme l'action du groupe de Weyl sur l'espace des poids pour l'algèbre dégénérée $\mathcal{U}_0(gl_N)$. Les formules de symétrisation de l'algèbre de Hecke dégénérée s'interprètent comme les formules des caractères de Weyl et de Demazure. En particulier, nous décrivons une base des modules de Demazure analogue à celle de [54].

4.1 Graphe quasi-cristallin d'un module irréductible de $\mathcal{U}_0(gl_N)$

Dans [42], en utilisant le fait que l'action de $\mathcal{U}_0(gl_N)$ commute avec l'action de Jimbo de $H_n(0)$ sur les tenseurs et la classification des représentations irréductibles de $H_n(0)$ par Carter [5], Krob et Thibon ont donné une description complète des représentations polynomiales irréductibles de $\mathcal{U}_0(gl_N)$. Ils ont construit des bases de ces modules dans lesquelles les modules ont une structure simple. Ces bases sont les analogues dégénérées des bases cristallines de Kashiwara [34]. La partie triangulaire supérieure de $\mathcal{U}_0(gl_N)$ peut être identifiée avec l'algèbre de Hall du carquois A_{n-1} dont il est possible de construire une base [71].

4.1.1 Définition

On rappelle que comme l'algèbre enveloppante $U(gl_N)$, l'algèbre dégénérée $\mathcal{U}_0(gl_N)$ est engendrée par trois sortes de générateurs appelés générateurs de Chevalley :

- les générateurs montants : $(e_i)_{1\leq i\leq N-1}$,
- les générateurs descendants : $(f_i)_{1\leq i\leq N-1}$,
- les générateurs diagonaux : $(k_i)_{1\leq i\leq N}$.

Nous donnons ici une description combinatoire des modules polynomiaux irréductibles de $\mathcal{U}_0(gl_N)$. Le lecteur se reportera à [41, 42] pour une construction algébrique de ces modules ainsi que pour la preuve du théorème 4.3.

Soit V la représentation fondamentale de $\mathcal{U}_0(gl_N)$. Rappelons qu'un module polynomial est dit de degré n s'il apparaît comme sous module de $V^{\otimes n}$. Il y a 2^{n-1} modules polynomiaux irréductibles de degré n deux à deux non isomorphes. On peut les indicer naturellement par les compositions K de l'entier n. Les bases $(\mathbf{d}_\mathbf{u})$ du module $\mathbf{D}_K$ sont indicées par les mots quasi-rubans de forme K sur l'alphabet $A=\{1,\ldots,N\}$:

$$\mathbf{u} = u_1u_2\ldots u_n \in \mathrm{QR}(K).$$

Décrivons l'action des générateurs de Chevalley sur la base des quasi-rubans. Le générateur diagonal k_i envoie le vecteur $\mathbf{d}_\mathbf{u}$ sur 0 si $\mathbf{u}$ contient la lettre i, et laisse $\mathbf{d}_\mathbf{u}$ inchangé sinon. Soit $\mathbf{u}^+$ (*resp.* $\mathbf{u}^-$) le mot obtenu a partir de $\mathbf{u}$ en remplaçant le dernier i par $i+1$ (*resp.* le dernier $i+1$ par i). Si $\mathbf{u}$ ne contient par i alors $\mathbf{u}^+$ n'est pas défini. On a

$$e_i(\mathbf{d}_\mathbf{u}) = \begin{cases} \mathbf{d}_{\mathbf{u}^-} & \text{si } \mathbf{u}^- \in \mathrm{QR}(K), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.1}$$

et de la même manière

$$f_i(\mathbf{d}_\mathbf{u}) = \begin{cases} \mathbf{d}_{\mathbf{u}^+} & \text{si } \mathbf{u}^+ \in \mathrm{QR}(K), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Exemple 4.1 Dans le module $\mathbf{D}_{(1,2)}$ pour $\mathcal{U}_0(gl_4)$ le vecteur $\mathbf{d}_{212}$ est envoyé sur 0 par f_1 car 222 n'est pas un mot quasi-ruban de forme $(1,2)$. En revanche, f_2 envoie $\mathbf{d}_{212}$ sur $\mathbf{d}_{213}$ (voir figure 4.1).

On a ainsi défini l'action de chacuns des générateurs de Chevalley sur les vecteurs $\mathbf{d}_\mathbf{u}$ de la base du module $\mathbf{D}_K$.

Proposition 4.2 (Krob-Thibon) *Les opérateurs k_i, e_i et f_i définis ci dessus vérifient les relations de commutations de $\mathcal{U}_0(gl_N)$. Autrement dit, ils munissent l'espace vectoriel*

$$\bigoplus_{\mathbf{u}\in \mathrm{QR}(K)} \mathbb{C}\mathbf{d}_{\mathbf{u}}$$

d'une structure de $\mathcal{U}_0(gl_N)$-module.

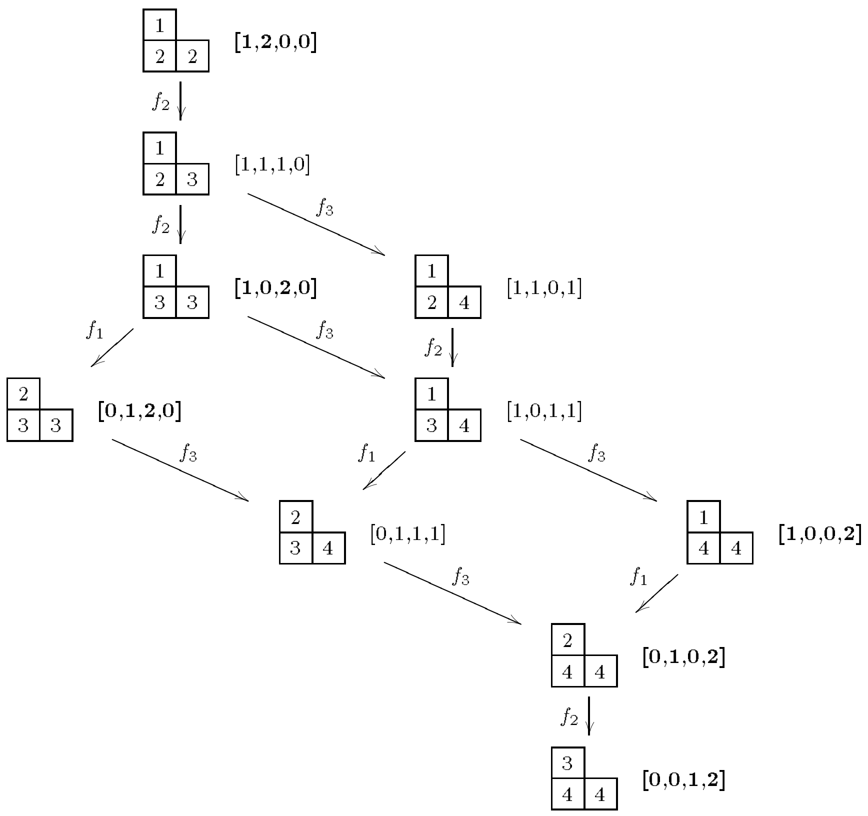


FIG. 4.1 : Graphe quasi-cristallin de $\mathbf{D}_{12}$ pour $\mathcal{U}_0(gl_4)$

La structure de module de $\mathbf{D}_K$ se code par un graphe comme suit : soit $\Gamma_n(K)$ le graphe orienté dont les sommets sont les quasi-rubans de forme K, sur $\{1,\ldots,n\}$, et dont les arêtes sont étiquetées $\mathbf{u} \xrightarrow{f_i} \mathbf{u'}$ et $\mathbf{u} \xleftarrow{e_i} \mathbf{u'}$ si $f_i(\mathbf{d_u}) = \mathbf{d_{u'}}$ ce qui est équivalent à $e_i(\mathbf{d_{u'}}) = \mathbf{d_u}$. Ce graphe est appelé *graphe quasi-cristallin* du module $\mathbf{D}_K$ [42]. C'est en fait un sous graphe d'un graphe cristallin (voir [34]). Remarquons que contrairement aux graphes cristallins qui codent seulement le squelette combinatoire des modules génériques, le graphe quasi-cristallin $\Gamma_n(K)$ contient toute la structure du module $\mathbf{D}_K$.

On a alors le théorème :

Théorème 4.3 (Krob-Thibon [42])
Le $\mathcal{U}_0(gl_N)$-module $\mathbf{D}_K$ est irréductible. Son caractère est la fonction quasi-ruban $F_I(x_1, \ldots, x_n)$.

Les $(\mathbf{D}_K)$ forment une famille complète de $\mathcal{U}_0(gl_N)$-modules polynomiaux irréductibles.

4.1.2 Formule des caractères de Weyl pour $\mathcal{U}_0(gl_N)$

Rappelons que dans le cas classique, le caractère du gl_N-module irréductible $\mathbf{D}_\lambda$ est une fonction de Schur. Bien que la définition originale des fonctions de Schur fasse intervenir le quotient de deux alternants, on peut les définir par une formule de symétrisation [63, 12] : $s_\lambda = \pi_\omega X^\lambda$. Dans notre cas le théorème 3.26 peut donc s'énoncer comme suit :

Théorème 4.4 (Formule des caractères de Weyl pour $\mathcal{U}_0(gl_N)$)
Soit K une composition. Le caractère du module irréductible $\mathbf{D}_K$ est donné par la formule

$$\chi(\mathbf{D}_K) = \boldsymbol{\pi}_\omega X^K = F_K. \tag{4.3}$$

4.1.3 Caractères hypoplaxiques

En fait dans [42], Krob et Thibon ont défini les caractères de $\mathcal{U}_0(gl_N)$ comme les éléments d'un quotient de l'algèbre plaxique appelée algèbre hypoplaxique, plutôt que comme de vraies fonctions quasi-symétriques. L'algèbre hypoplaxique a pour base les mots quasi-rubans. Ils jouent le rôle des mots tableaux dans l'algèbre plaxique.

La proposition 4.7 de la section suivante permet de remonter les actions quasi-symétrisantes sur les polynômes au niveau de l'algèbre hypoplaxique, c'est-à-dire que l'on peut construire des différences divisées hypoplaxiques telles que la fonction quasi-ruban hypoplaxique F_K soit l'image de l'unique mot quasi-ruban de forme et d'évaluation K sous l'action du symétriseur maximal $\boldsymbol{\pi}_\omega$.

Dans le cas classique la formule de symétrisation a été montrée par Demazure dans [12]. Les symétriseurs partiels donnent les caractères des modules de Demazure. La section suivante donne un analogue de cette formule dans notre cas.

4.2 Modules de Demazure pour $\mathcal{U}_0(gl_N)$

Pour énoncer cette formule des caractères, il nous faut tout d'abord dégager une bonne notion de poids pour $\mathcal{U}_0(gl_N)$.

4.2.1 Poids

Reprenons les notations de la sous-section 2.5.4 : $(\xi_i)_{i=1..N}$ est la base canonique de la représentation fondamentale (ρ, V) de $\mathcal{U}_0(gl_N)$ et $E_{i,j}$ la base de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ correspondante, c'est à dire que

$$E_{ij}(\xi_k) = \delta_{jk}\xi_i.$$

Définition 4.5 *On appelle* sous algèbre de Cartan *et on note $\mathcal{U}_0(\mathfrak{h})$ la sous-algèbre engendrée par les k_i.*

La sous algèbre de Cartan agit diagonalement sur tous les modules polynomiaux. Ainsi, si $\xi_{\mathbf{u}} = \xi_{u_1} \otimes \xi_{u_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{u_n}$ est un vecteur de $V^{\otimes n}$, on a

$$k_i(\xi_{u_1} \otimes \xi_{u_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{u_n}) = \begin{cases} \xi_{\mathbf{u}} & \text{si, pour tout } j \text{, on a} \quad u_j \neq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Autrement dit, si $\xi_{\mathbf{u}}$ est un vecteur de poids $P = (p_1, \ldots, p_N)$ pour GL_N, alors

$$k_i(\xi_u) = \begin{cases} \xi_{\mathbf{u}} & \text{si } p_i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Dans notre cas, les dégénérescences font que les seules valeurs propres possibles pour k_i sont 0 et 1.

Définition 4.6 *On appelle* poids *pour $\mathcal{U}_0(gl_N)$ d'un vecteur de $V^{\otimes n}$, son poids sous l'action de GL_N.*

Notons que si on ne regarde que l'action de $\mathcal{U}_0(\mathfrak{h})$, l'analogue dégénéré du poids, c'est-à-dire la forme linéaire h_P^* qui à un élément de $\mathcal{U}_0(\mathfrak{h})$ associe sa valeur propre pour le vecteur $\xi_{\mathbf{u}}$ est donnée par :

$$h_P^*(k_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Ainsi les formes linéaires sur $\mathcal{U}_0(\mathfrak{h})$ sont codées par les parties de $\{1, \ldots, N\}$. Il est donc parfaitement naturel de considérer l'action quasi-symétrisante de $W = \mathfrak{S}_N$ sur x^P comme l'action de groupe de Weyl de $\mathcal{U}_0(gl_N)$.

Revenons aux modules irréductibles $\mathbf{D}_K$. Si K est une composition et $\mathbf{u} = u_1 \ldots u_n$ un mot quasi-ruban de forme K, le poids du vecteur $\mathbf{d}_\mathbf{u}$ de la base quasi-cristalline est l'évaluation $\mathrm{Eval}(\mathbf{u})$ du mot $\mathbf{u}$, c'est-à-dire l'image commutative de $\mathbf{u}$. Autrement dit, si $|\mathbf{u}|_i$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre i dans $\mathbf{u}$, le poids de $\xi_\mathbf{u}$ est le monôme commutatif $x_1^{|\mathbf{u}|_1} \ldots x_N^{|\mathbf{u}|_N}$. Comme précédemment, on l'identifiera avec la pseudo-composition $\big[\,|\mathbf{u}|_1, \ldots, |\mathbf{u}|_N\big]$.

Rappelons qu'un monôme $m = A^I$ s'insère dans K si la composition I est plus fine que K.

Proposition 4.7 *Soit K une composition. Alors,* Eval *définit une correspondance bijective entre les mots quasi-rubans de forme K et les monômes qui s'insèrent dans K.*

Dans le langage des représentations, il existe un vecteur de poids m dans $\mathbf{D}_K$ si et seulement si m s'insère dans K. Dans ce cas, aux scalaires près, ce vecteur est unique. Autrement dit, dans les représentations irréductibles polynomiales, les espaces de poids sont de dimension 1*.*

Cette proposition nous permet de transporter les constructions combinatoires des chapitres précédents des monômes aux vecteurs. Par exemple, l'action du groupe symétrique peut être vue comme une action du groupe de Weyl $W = \mathfrak{S}_N$ sur les vecteurs.

Définition 4.8 *Soient K une composition et $\mathbf{u} = u_1 \ldots u_n$ un mot quasi-ruban de forme K. Soit $m = \big[\,|\mathbf{u}|_1, \ldots, |\mathbf{u}|_N\big]$ le poids du vecteur $\xi_\mathbf{u}$ de $\mathbf{D}_K$. Soit σ un élément du groupe de Weyl W (*i.e.*, une permutation de $\mathfrak{S}_N$). L'image du vecteur $\xi_\mathbf{u}$ sous l'action de σ est le vecteur $\xi_{\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{u}}$ où $\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{u}$ est l'unique mot quasi-ruban de forme K et de poids $\boldsymbol{\sigma}\,m$.*

L'action considérée ici est, bien sûr, l'action quasi-symétrisante.

Par exemple, dans le $\mathcal{U}_0(gl_4)$-module $\mathbf{D}_{(1,2)}$, le vecteur ξ_{313} a pour poids $m = [1, 0, 2, 0]$. L'image de m par la permutation $\sigma = 4123$ est le poids $[0, 1, 0, 2]$. L'image du vecteur ξ_{313} est donc le vecteur ξ_{424} (voir figure 4.1).

L'ordre sur les monômes défini dans (3.2.3) s'interprète en théorie des représentations : soit ξ un vecteur de poids $[P_1, \ldots, P_N]$. L'opérateur montant e_i envoie alors ξ soit sur 0, soit sur un vecteur de poids

$$[P_1, \ldots, P_i + 1, P_{i+1} - 1, \ldots, P_N].$$

Les opérateurs montant e_i augmentent donc le poids. Soit $K = (k_1, \dots, k_p)$. Le plus grand poids du module $\mathbf{D}_K$, au sens de cet ordre, est

$$X^K = [k_1, \dots, k_p, 0, \dots, 0]$$

et son vecteur associé est $\xi_{\mathbf{u}}$, où $\mathbf{u} = 1^{k_1}2^{k_2}\dots N^{k_N}$. Ce vecteur est annulé par tous les opérateurs montants. Par définition, c'est donc bien le vecteur de plus haut poids du module $\mathbf{D}_K$. On le note ξ_K.

Note 4.9 En fait, la proposition ci-dessus montre que cet ordre a une expression simple sur les mots. L'ordre des vecteurs de forme K n'est autre que l'ordre produit sur les mots quasi-rubans, c'est-à-dire que si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont deux mots quasi-rubans de forme K

$$u_1 \dots u_N \gg u'_1 \dots u'_N \qquad \text{ssi} \qquad u_i > u'_i \ \text{ pour tout } \ i \geq N. \tag{4.7}$$

Par conséquent, le graphe quasi-cristallin peut être vu comme le graphe de l'ordre produit restreint à l'ensemble des mots quasi-rubans de forme K.

4.2.2 Formule des caractères de Demazure

Gessel a montré dans [24] que la fonction quasi-ruban F_K est la somme des évaluations de tous les mots de forme K. Ainsi le caractère d'un module irréductible est la série génératrice des dimensions de ses espaces de poids, comme dans le cas classique. On peut montrer que le raffinement de Demazure [12] a un analogue dans notre cas.

Définition 4.10 *Soit $\mathbf{D}_K$ un module irréductible de $\mathcal{U}_0(gl_N)$. On appelle* vecteurs extrémaux *les images du vecteur de plus haut poids ξ_K par les éléments du groupe de Weyl W.*

Ce sont les vecteurs de poids $m = A^K$ pour tout $A \in \mathcal{P}_k(X)$ où k est la longueur de K. Ils apparaissent en caractère gras dans les graphes quasi-cristallins (voir figure 4.1).

Définition 4.11 *On appelle* sous-algèbre de Borel *la sous-algèbre $\mathcal{U}_0(\mathfrak{b}_+)$ engendrée par les générateurs e_i.*

Soit ξ un vecteur extrêmal. Le $\mathcal{U}_0(\mathfrak{b}_+)$-module engendré par ξ est appelé module de Demazure.

Le théorème suivant donne la structure des modules de Demazure [54] (voir aussi [51] pour le type A_n).

Théorème 4.12 (Module de Demazure pour $\mathcal{U}_0(gl_N)$)
Soit $\mathbf{D}_K$ un $\mathcal{U}_0(gl_N)$ module irréductible. Soient $\sigma \in W$ une permutation et $\xi_\sigma = \boldsymbol{\sigma}\, \xi_K$ le vecteur extrêmal associé. Alors,

- *le module de Demazure $\mathcal{U}_0(\mathfrak{b}_+)\, \xi_\sigma$ a pour base les vecteurs $\xi_{\mathbf{u}}$ où $\mathbf{u}$ décrit l'ensemble des mots inférieurs à $\mathbf{u}_\sigma$ pour l'ordre produit,*
- *le caractère du module de Demazure $\mathcal{U}_0(\mathfrak{b}_+)\, \xi_\sigma$ est donné par la formule*

$$\chi\left(\mathcal{U}_0(\mathfrak{b}_+)\, \xi_\sigma\right) = \boldsymbol{\pi}_\sigma\, X^K. \tag{4.8}$$

Démonstration. Soient $m \gg m'$ deux poids qui s'insèrent dans K. Soient ξ et ξ' les vecteurs associés. Il est facile de voir que ξ est dans l'image de ξ' sous l'action de $\mathcal{U}_0(\mathfrak{b}_+)$. Ainsi le module de Demazure est la somme des espaces de poids plus grands que $\boldsymbol{\sigma}\, \xi_K$. Ceci prouve le premier point. Le deuxième est alors une conséquence du théorème 3.31 qui affirme que la série génératrice de ces poids est donnée par l'opérateur $\boldsymbol{\pi}_\sigma$. □

Exemple 4.13 Pour l'algèbre $\mathcal{U}_0(gl_4)$ le module $\mathbf{D}_{(1,2)}$ est de dimension 10 (voir figure 4.1). Sa base quasi-cristalline est indexée par les mots

212, 213, 313, 214, 323, 314, 324, 414, 424, 434,

de poids respectifs

$$\begin{gathered}[1,2,0,0],\ [1,1,1,0],\ [1,0,2,0],\ [1,1,0,1],\ [0,1,2,0],\\ [1,0,1,1],\ [0,1,1,1],\ [1,0,0,2],\ [0,1,0,2],\ [0,0,1,2].\end{gathered}$$

Les poids extrémaux sont les suivants :

$$[1,2,0,0],\ [1,0,2,0],\ [0,1,2,0],\ [1,0,0,2],\ [0,1,0,2],\ [0,0,1,2].$$

Soit $\sigma = 1423$. Le vecteur ξ_σ de poids $[1,0,0,2] = \boldsymbol{\sigma}[1,2,0,0]$ engendre un module de Demazure de dimension 6 dont le caractère est donné par

$$\begin{aligned}\chi\left(\mathcal{U}_0(\mathfrak{b}_+)\xi_\sigma\right) = \boldsymbol{\pi}_\sigma[1,2,0,0] = {} & [1,2,0,0] + [1,1,1,0] + [1,0,2,0] \\ & + [1,1,0,1] + [1,0,1,1] + [1,0,0,2].\end{aligned}$$

4.3 Exemples de graphes quasi-cristalins

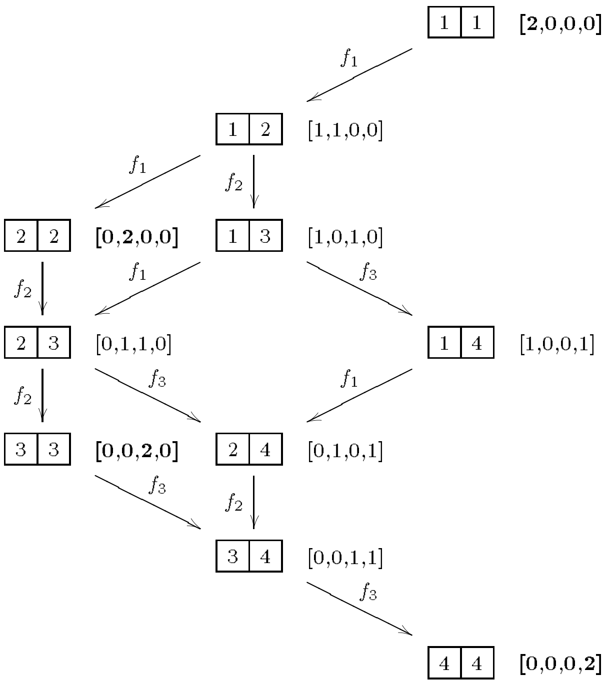


FIG. 4.2 : Graphe quasi-cristalin de $\mathbf{D}_2$ pour $\mathcal{U}_0(gl_4)$

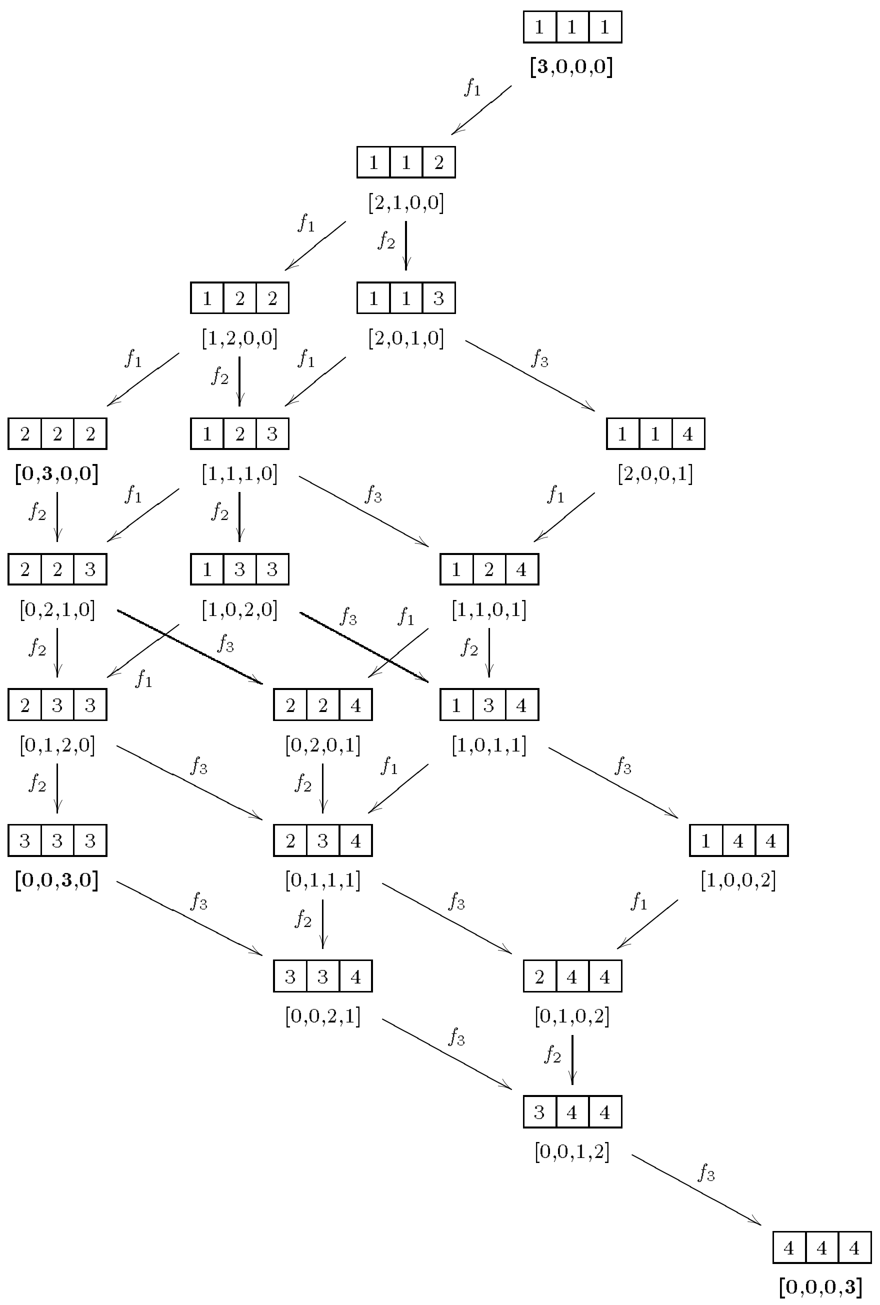


FIG. 4.3 : Graphe quasi-cristalin de $\mathbf{D}_3$ pour $\mathcal{U}_0(gl_4)$

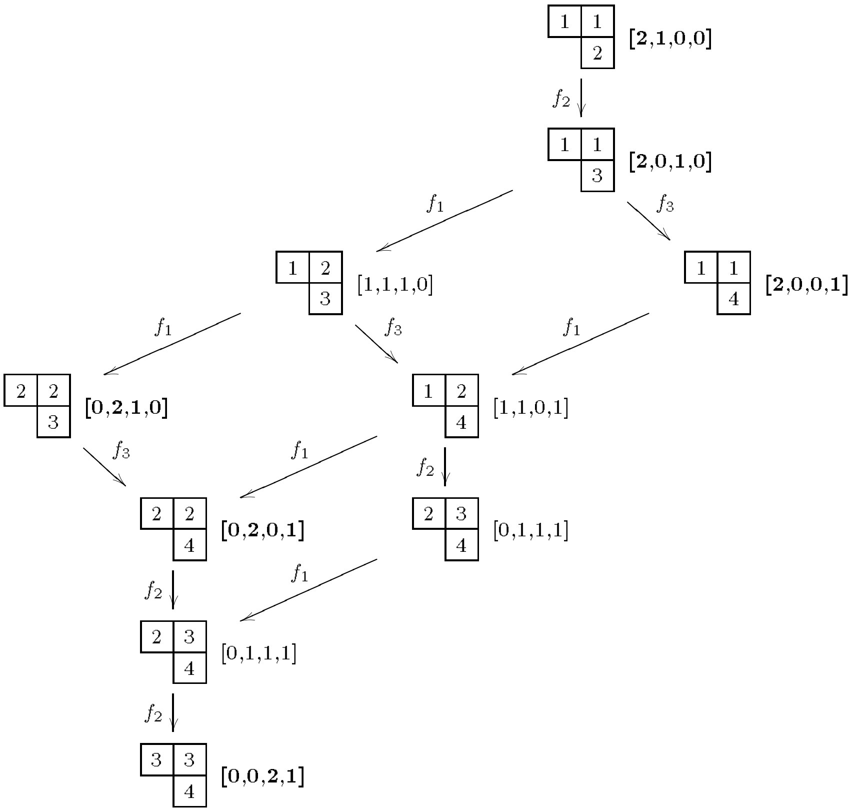


FIG. 4.4 : Graphe quasi-cristalin de $\mathbf{D}_{21}$ pour $\mathcal{U}_0(gl_4)$

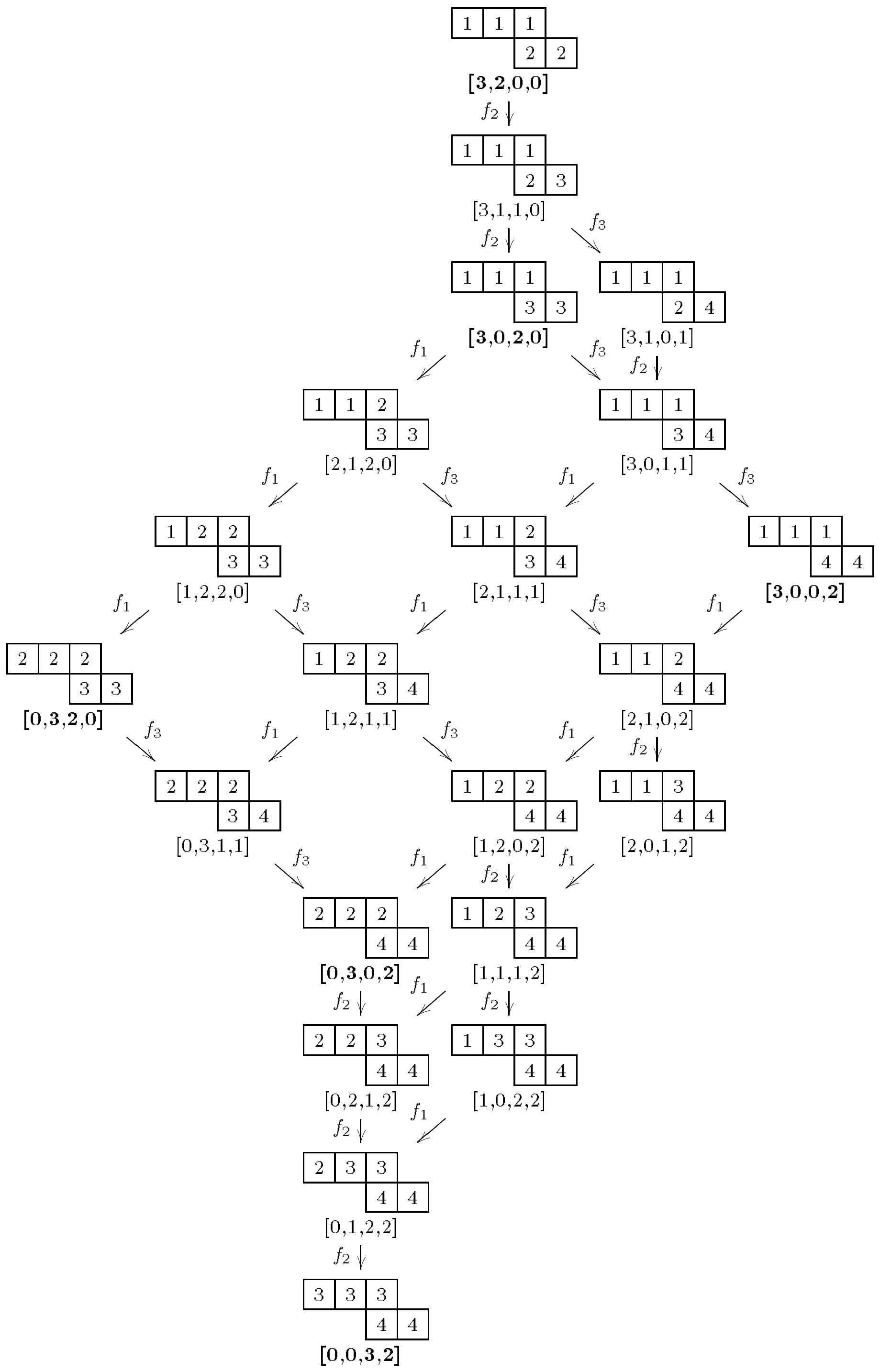


FIG. 4.5 : Graphe quasi-cristalin de $\mathbf{D}_{32}$ pour $\mathcal{U}_0(gl_4)$

Chapitre 5

Analogues quasi-symétriques et non-commutatifs des fonctions de Hall-Littlewood

Résumé

Dans ce chapitre nous utilisons l'action quasi-symétrisante de l'algèbre de Hecke pour définir des analogues des fonctions de Hall-Littlewood. Nous définissons des analogues quasi-symétriques G des fonctions P et par dualité des analogues non-commutatifs H des fonctions Q'. Nous donnons les expressions de ces nouvelles fonctions dans les bases classiques qui généralisent les fonctions de Schur et nous obtenons ainsi les analogues des polynômes de Kostka-Foulkes. Enfin, nous donnons explicitement la règle de multiplication des fonctions H, analogue de la règle de Littlewood-Richardson, ce qui nous conduit à une formule de factorisation aux racines de l'unité.

5.1 Analogues quasi-symétriques des fonctions de Hall-Littlewood

5.1.1 Définition

On a vu sous-section 2.4.2 que le symétriseur de Littlewood se factorisait dans l'algèbre de Hecke et qu'on pouvait ainsi définir les fonctions de Hall-Littlewood par

$$P_\mu(x_1,\ldots,x_n;q^{-1}) = q^{-\binom{n}{2}} \frac{1}{v_\lambda(q^{-1})}\,\square_\omega(x^\mu). \tag{5.1}$$

Par analogie, on définit les analogues quasi-symétriques suivants des fonctions de Hall-Littlewood P_λ :

Définition 5.1 *Soit $K = (k_1, \ldots, k_p)$ une composition et $X^K = x_1^{k_1} \ldots x_p^{k_p}$. On appelle* polynôme de Hall-Littlewood quasi-symétrique *le polynôme G_K défini par*

$$G_K(x_1, \ldots, x_n; q) = \frac{1}{[p]_q! \ [n-p]_q!} \square_\omega(X^K). \tag{5.2}$$

Les polynômes de Hall-Littlewood quasi-symétriques se spécialisent comme suit : $G_K(X; 0)$ est la fonction quasi-ruban F_K et $G_K(X; 1)$ est la fonction quasi-monomiale M_K. Par exemple

$$G_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3; q) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + (1-q) x_1 x_2 x_3.$$

Sur cet exemple, on vérifie que à $q = 0$

$$G_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3; 0) = F_{(2,1)}$$

et à $q = 1$

$$G_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3; 1) = M_{(2,1)}.$$

La propriété suivante élimine les multiplicités en ramenant le calcul aux classes modulo le sous groupe de Young qui stabilise le monôme X^K :

Proposition 5.2 *Soit K une composition de longueur p. Alors*

$$G_K(x_1, \ldots, x_n; q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n/p}} \boldsymbol{T}_\sigma \, X^K. \tag{5.3}$$

Démonstration. Rappelons que $\mathfrak{S}_{n/p}$ est défini comme l'ensemble des permutations σ telles que

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(n). \tag{5.4}$$

Or, toute permutation σ se factorise d'une et une seule manière sous la forme

$$\sigma = \mu\mu' \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathfrak{S}_{n/p} \quad \text{et} \quad \mu' \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}. \tag{5.5}$$

Par conséquent le q-quasi-symétriseur se factorise sous la forme

$$\square_\omega = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n/p}} \boldsymbol{T}_\sigma \right) \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}} \boldsymbol{T}_\sigma \right). \tag{5.6}$$

De plus, puisque K est de longueur p,

$$\text{pour tout} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p} \quad \text{on a} \quad \boldsymbol{T}_\sigma X^K = q^{\ell(\sigma)} X^K.$$

Ceci termine la démonstration puisque $[n]_q!$ est la série génératrice des permutations de $\mathfrak{S}_n$ comptées par leur longueur. $\square$

Corollaire 5.3 *Le polynôme $G_K(x_1, \ldots, x_n; q)$ est un polynôme quasi-symétrique à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$. Plus précisément, l'expression des polynômes de Hall-Littlewood sur la base des quasi-monômes est de la forme*

$$G_K = M_K + \sum_{J \succeq K} a_{J,n}(q) M_J$$

où $a_{J,n}(q)$ est un polynôme en q à coefficients entiers.

Corollaire 5.4 *La famille des fonctions de Hall-Littlewood $(G_K)_{\ell(K) \leq n}$ est une base de l'espace des polynômes quasi-symétriques à coefficients dans $\mathbb{C}(q)$.*

En fait, on va montrer dans la section suivante que (G_K) est encore une base si l'on prend les coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$. La matrice de transition est unitriangulaire supérieure (c'est-à-dire triangulaire avec des 1 sur la diagonale). On donnera une expression explicite des polynômes $a_{J,n}$ dans la preuve du théorème 5.6. La proposition qui suit montre que les polynômes $a_{J,n}$ ne dépende en fait pas de n.

Le coefficient $\frac{1}{[p]_q! \ [n-p]_q!}$ permet d'assurer la compatibilité aux restrictions de l'alphabet :

Proposition 5.5 *Soit K une composition de longueur $p \leq n$. Alors*

$$G_K(x_1, \ldots, x_n, 0; q) = G_K(x_1, \ldots, x_n; q). \tag{5.7}$$

Démonstration. Dans cette démonstration nous allons noter $\square_\omega^{(i)}$ l'opérateur de q-symétrisation associé à la permutation maximale de $\mathfrak{S}_i$. L'énoncé est équivalent à

$$(\square_\omega^{(n+1)} X^K)_{/x_{n+1}=0} = [n-p+1]_q(\square_\omega^{(n)} X^K). \tag{5.8}$$

Nous allons montrer la propriété par récurrence sur n. Nous commençons par le cas $n = p$:

Soit $m = X^K = [k_1, \ldots, k_p, 0]$. On a alors

$$\square_\omega^{(p)} m = [p]_q! m.$$

En utilisant la factorisation (2.99) de $\square_\omega^{(p+1)}$, on trouve

$$\square_\omega^{(p+1)} m = [p]_q!(1 + \boldsymbol{T}_p + \boldsymbol{T}_{p-1}\boldsymbol{T}_p + \cdots + \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2 \ldots \boldsymbol{T}_p)m.$$

Or,
$$\boldsymbol{T}_p m = (1-q)\sum_{v=1}^{k_n}[k_1, \ldots, k_n - v, v] \ + \ q[k_1, \ldots, 0, k_p].$$

Ainsi pour $r \leq p$, on a $(\boldsymbol{T}_r \ldots \boldsymbol{T}_{p-1}\boldsymbol{T}_p m)_{/x_{n+1}=0} = 0$. On a donc finalement montré que

$$\left(\square_\omega^{(p)} m\right)_{/x_{p+1}=0} = \square_\omega^{(p)} m, \tag{5.9}$$

ce qui est le résultat pour $n = p$.

Montrons le maintenant pour tout $n > p$. Posons

$$f' = \square_\omega^{(n)} m \quad \text{et} \quad f = (\square_\omega^{(n+1)} m)_{/x_{n+1}=0}.$$

Avec ces notations, la factorisation de $\square_\omega^{(n+1)}$ s'écrit

$$f = ((1 + \boldsymbol{T}_n + \boldsymbol{T}_{n-1}\boldsymbol{T}_n + \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2 \ldots \boldsymbol{T}_n)f')_{/x_{n+1}=0}. \tag{5.10}$$

Supposons maintenant que g est un monôme de la forme $[g_1, \ldots, g_n, 0]$ où $g_n \neq 0$. Alors, tous les monômes qui apparaissent dans $\overline{\boldsymbol{\pi}}_n g$ ont leur dernière part non nulle. Par conséquent $(\overline{\boldsymbol{\pi}}_n g)_{/x_{n+1}=0} = 0$. Il s'ensuit que

$$(\boldsymbol{T}_n f)_{/x_{n+1}=0} = q\,\sigma_n\left(f'_{/x_n=0}\right) = q\ f'_{/x_n=0},$$

ainsi l'équation (5.10) s'écrit

$$f = f' + q\ (1 + \boldsymbol{T}_{n-1} + \boldsymbol{T}_{n-1}\boldsymbol{T}_{n-2} + \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2 \ldots \boldsymbol{T}_{n-1})\left(f'_{/x_n=0}\right).$$

Si l'on suppose maintenant le résultat vrai pour $n-1$, on en déduit que

$$f'_{/x_n=0} = [n-p]_q\,\square_\omega^{(n-2)} X^K.$$

En rassemblant les deux dernières équations on trouve

$$f = f' + q[n-p]_q\,\square_\omega^{(n-1)} X^K = (1 + q[n-p]_q)f'.$$

De l'addition des q entiers $[n-p+1]_q = 1 + q[n-p]_q$, on déduit la propriété pour $n+1$. La proposition est donc démontrée, par récurrence. $\square$

Il est ainsi possible de prendre la limite quand n tend vers l'infini. Plus précisément, on définit $G_K(x_1, x_2, \ldots)$ comme l'unique fonction quasi-symétriquee telle que pour tout n on ait

$$G_K(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) = G_K(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.11}$$

Comme précédemment, on parle alors de fonctions de Hall-Littlewood quasi-symétriques. La formule de développement des G montre que la famille des fonctions de Hall-Littlewood est une base de l'algèbre des fonctions quasi-symétriques.

5.1.2 Expressions explicites

En fait, il est possible de donner des formules explicites pour les développements des fonctions de Hall-Littlewood sur les bases classiques. La formule la plus simple s'écrit dans la base des quasi-rubans :

Théorème 5.6 *Le développement de G_I dans la base des quasi-rubans est donné par*

$$G_I = \sum_{J \succeq I} (-1)^{\ell(J)-\ell(I)} q^{s(I,J)} F_J \tag{5.12}$$

où $s(I,J) = (k_1 - 1) + 2(k_2 - 1) + \cdots + p(k_p - 1)$, avec $(k_1, \ldots, k_p)$ la composition de raffinnement $\#(J,I)$.

Exemple 5.7 Calculons $G_{(1,1,2,1)}$ sur l'alphabet $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. On part de

$$m = x_1 x_2 x_3^2 x_4 = [1,1,2,1,0].$$

Comme m est symétrique par rapport aux transpositions élémentaires $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, et $\boldsymbol{\sigma}_3$, les opérateurs T_1, T_2, et T_3 multiplient m par q. On en déduit donc que $\square_{\omega'} m = [4]_q! m$ car $[n]_q!$ est la série génératrice des permutations de $\mathfrak{S}_n$ comptées par leur longueur (comme précédemment ω' est la permutation maximale de $\mathfrak{S}_{n-1}$).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_4(m) &= [1,1,2,0,1] \\
\boldsymbol{T}_3 \boldsymbol{T}_4(m) &= [1,1,0,2,1] + (1-q)[1,1,1,1,1] \\
\boldsymbol{T}_2 \boldsymbol{T}_3 \boldsymbol{T}_4(m) &= [1,0,2,1,1] + q(1-q)[1,1,1,1,1] \\
\boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{T}_2 \boldsymbol{T}_3 \boldsymbol{T}_4(m) &= [0,1,1,2,1] + q^2(1-q)[1,1,1,1,1].
\end{aligned}$$

De la factorisation

$$\square_\omega = (1 + \boldsymbol{T}_4 + \boldsymbol{T}_3 \boldsymbol{T}_4 + \boldsymbol{T}_2 \boldsymbol{T}_3 \boldsymbol{T}_4 + \boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{T}_2 \boldsymbol{T}_3 \boldsymbol{T}_4) \square_{\omega'},$$

on déduit

$$\begin{aligned}
&\square_\omega([1,1,2,1,0]) = [4]_q!(\\
&\quad [1,1,2,1,0] + [1,1,2,0,1] + [1,1,0,2,1] + [1,0,1,2,1] + [0,1,1,2,1] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (1-q)(1+q+q^2)[1,1,1,1,1]\big),
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit dans la base des fonctions quasi-monomiales

$$\begin{aligned}\square_\omega([1,1,2,1,0]) &= [4]_q!(M_{(1,1,2,1)} + (1-q^3)M_{(1,1,1,1,1)}) \\ &= [4]_q!(F_{(1,1,2,1)} - q^3 F_{(1,1,1,1,1)}),\end{aligned}$$

Et donc $G_{(1,1,2,1)} = F_{(1,1,2,1)} - q^3 F_{(1,1,1,1,1)}$.

De même, on trouve :

$$\begin{aligned}G_{(3,2)} = F_{(3,2)} - q\,F_{(2,1,2)} - q\,F_{(1,2,2)} + q^2\,F_{(1,1,1,2)} - q^2\,F_{(3,1,1)} + {} \\ q^3\,F_{(2,1,1,1)} + q^3\,F_{(1,2,1,1)} - q^4\,F_{(1,1,1,1,1)}.\end{aligned}$$

Pour simplifier la preuve du théorème nous allons commencer par le lemme suivant :

Lemme 5.8 *Soient $I = (i_1, \ldots, i_r) \succeq J = (j_1, \ldots, j_p)$ deux compositions. Soit $K = \#(I, J) \vDash r$. Le coefficient de $F_{(1^r)}$ dans le développement de G_K est le même que celui de F_I dans G_J. Autrement dit le coefficient de F_I dans le développement de G_J ne dépend que de $\#(I, J)$.*

Démonstration. Appelons ϕ_I l'application qui prend une pseudo composition $m = [m_1, \ldots, m_n]$ de r et qui l'envoie sur $\phi_I(m) = [m'_1, \ldots, m'_n]$ défini par

$$m'_i = \begin{cases} i_{m_1+\cdots+m_{i-1}+1} + \cdots + i_{m_1+\cdots+m_i} & \text{si } m_i \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par exemple, si $I = (1, 2, 5, 4, 1, 2)$, on a

$$\phi_I[1,0,0,2,0,1,2] = [1,0,0,7,0,4,3] \quad \text{et} \quad \phi_I[3,0,0,1,2] = [8,0,0,4,3]$$

Remarquons tout d'abord que $\phi_I([1^r, 0, \ldots, 0]) = X^I$, et que I est plus fine que les compositions des exposants des monômes w qui apparaissent dans $\phi_I(m)$. Par abus de langage, on dira dans la suite de cette démonstration que la composition I est plus fine que le monôme w ou que w est moins fin que I. Fixons un monôme m. Pour tout entier j, on a

$$\boldsymbol{T}_j\,\phi_I(m) = \phi_I(\boldsymbol{T}_j\,m) + \text{ somme de monômes non moins fins que } I.$$

De plus, si l est un monôme qui n'est pas moins fin que I, alors $\boldsymbol{T}_u\,l$ ne contient pas de monômes moins fins que I. On en déduit, de proche en proche, que pour toute permutation σ

$$\boldsymbol{T}_\sigma\,\phi_I(m) = \phi_I(\boldsymbol{T}_\sigma\,m) + \text{ monômes non moins fins que } I.$$

Il s'ensuit finalement que

$$\Box_\omega \, \phi_I(m) = \phi_I(\Box_\omega \, m) + \text{ monômes non moins fins que } I.$$

En revenant des monômes à la base des quasi-rubans, ceci termine la démonstration, puisque F_I est exactement la somme de tous les monômes qui sont plus fins que I. □

Exemple 5.9 Soit $m = [3,0]$. On a

$$\boldsymbol{T}_1 \, m = [0,3] + (1-q)[1,2] + (1-q)[2,1]$$

Soit alors $I = (3,1,2)$, et donc $\phi_I(m) = [6,0]$. Ainsi,

$$\boldsymbol{T}_1 \, \phi_I(m) = [0,6] + (1-q)\left(\sum_{u=1}^{5}[u, 6-u]\right)$$

On vérifie que les seuls monômes du type $[u, 6-u]$ moins fins que I sont $[3,3] = \phi_I([1,2])$ et $[4,2] = \phi_I([2,1])$.

Démonstration du théorème 5.6. Soit $K = (k_1, \dots, k_p)$ une composition de r. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que le coefficient de $[1^r]$ dans G_K est égal à

$$\begin{aligned}(1-q)^{k_1-1}(1-q^2)^{k_2-1}(1-q^3)^{k_3-1}\dots(1-q^p)^{k_p-1} &= \\ (1-q)^{r-p}1^{k_1-1}(1+q)^{k_2-1}(1+q+q^2)^{k_3-1}\dots(1+q+\dots+q^{p-1})^{k_p-1}\end{aligned}$$

On va montrer ceci en deux temps.

Lemme 5.10 *Le coefficient de $[1^{r+1}]$ dans le polynôme $G_{(K,1)}$ est égal à celui de $[1^r]$ dans G_K.*

Lemme 5.11 *Le coefficient de $[1^{r+1}]$ dans $G_{(k_1,\dots,k_p+1)}$ est égal au coefficient de $[1^r]$ dans G_K, multiplié par $(1-q^p) = (1-q)(1+q+\dots q^{p-1})$.*

Ces deux lemmes impliquent clairement le théorème par récurrence. □

Montrons les deux lemmes.

Démonstration du lemme 5.10. D'après la proposition 5.2, on a

$$G_{(K,1)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1/p+1}} \boldsymbol{T}_\sigma \, X^{(K,1)}.$$

Rappelons que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1/p+1}$, l'opérateur $\boldsymbol{T}_\sigma$ a une expression réduite de la forme

$$\begin{array}{c}(\boldsymbol{T}_{\sigma(1)-1}\cdots\boldsymbol{T}_2\,\boldsymbol{T}_1)(\boldsymbol{T}_{\sigma(2)-1}\cdots\boldsymbol{T}_3\,\boldsymbol{T}_2)\ \ldots\ (\boldsymbol{T}_{\sigma(p+1)-1}\cdots\boldsymbol{T}_{p+2}\,\boldsymbol{T}_{p+1})\\ \text{où}\qquad \sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(p)<\sigma(p+1).\end{array}$$

Or, dans les monômes qui apparaissent dans $\boldsymbol{T}_\sigma\,X^K$, la $r+1^{\text{ème}}$ variable a un exposant nul sauf si $\sigma(p+1)=r+1$. Dans ce cas, on a de plus

$$\boldsymbol{T}_r\cdots\boldsymbol{T}_{p+2}\,\boldsymbol{T}_{p+1}\,X^K=[k_1\ldots k_p,0,\ldots,0,1]$$

En laissant à part la dernière variable, il reste juste à calculer l'image de X^K par $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{r/p}}\boldsymbol{T}_\sigma$, qui est bien G_K. Ceci termine la preuve du lemme. □

Démonstration du lemme 5.11. Rappelons que $K\triangleright 1$ désigne la composition $(k_1,\ldots,k_p+1)$. Posons $\hat{K}=(k_1,\ldots,k_{p-1})$. Soit ω la permutation maximale de $\mathfrak{S}_{r+1}$ et ω' la permutation maximale de $\mathfrak{S}_r$.

On cherche à calculer le coefficient de $[1^{r+1}]$ dans

$$\square_\omega[\hat{K},k_p+1,0,\ldots,0].$$

Pour ceci nous allons utiliser la factorisation suivante de l'opérateur $\square_\omega$:

$$\square_\omega=\square_{\omega'}\left(1+\boldsymbol{T}_r+\boldsymbol{T}_r\,\boldsymbol{T}_{r-1}+\cdots+\boldsymbol{T}_r\ldots\boldsymbol{T}_1\right).$$

Calculons donc l'image de $X^{K\triangleright 1}$ par $\boldsymbol{T}_r\ldots\boldsymbol{T}_s$. Il y a deux cas. Si $s>p$, comme tous les exposants de $x^{p+1},\ldots x^{r+1}$ sont nuls dans le monôme $X^{K\triangleright 1}$ l'action des $\boldsymbol{T}_i$ successifs est seulement de le multiplier par q. De plus si $s\le p$, l'action de $\boldsymbol{T}_i$ pour $i<p$ est encore de multiplier par q. Mais comme

$$\boldsymbol{T}_p[\hat{K},k_p+1,0]=[\hat{K},0,k_p+1]+(1-q)\sum_{u+v=k_p+1,\ u\neq 0,\ v\neq 0}[\hat{K},u,v]$$

on trouve l'expression suivante :

$$\boldsymbol{T}_r\ldots\boldsymbol{T}_s[\hat{K},k_p+1,0,\ldots,0]=$$
$$\begin{cases} q^{p-s}\displaystyle\sum_{\substack{u_p+\cdots+u_{r+1}=k_p+1\\ u_{r+1}\neq 0}}(1-q)^{\#(u_p,\ldots,u_r)}[\hat{K},u_p,\ldots,u_{r+1}] & \text{si } s\le p,\\[2ex] q^{r-s}[\hat{K},k_p+1,0,\ldots,0] & \text{sinon,}\end{cases}$$

où $\#(u_p,\ldots,u_r)$ est le nombre de u_i non nuls.

Puisque $\square_{\omega'}$ n'agit pas sur la dernière variable, on va seulement regarder la partie de cette somme formée des monômes tels que $u_{r+1} = 1$. Soit donc S la somme des monômes de

$$(1 + \boldsymbol{T}_r + \boldsymbol{T}_r \boldsymbol{T}_{r-1} + \cdots + \boldsymbol{T}_r \ldots \boldsymbol{T}_1)[\hat{K}, k_P + 1]$$

où l'exposant de la dernière variable est 1. Le résultat des calculs précédents peut s'écrire

$$S = (1 + q + \cdots + q^{p-1}) \sum_{u_p + \cdots + u_r = k_p} (1-q)^{\#(u_p, \ldots, u_r)} [\hat{K}, u_p, \ldots, u_r, 1]$$

Par analogie, on reconnaît la somme

$$S = (1 - q^p)\,(1 + \boldsymbol{T}_p + \boldsymbol{T}_{p+1} \boldsymbol{T}_p + \cdots + \boldsymbol{T}_{r-1} \ldots \boldsymbol{T}_p)\,[K, 0, \ldots, 0, 1]$$

En utilisant la simplification $\square_i \boldsymbol{T}_i = q \square_i$ et la factorisation $\square_{\omega'} = \square_{\sigma'} \square_i$ de l'opérateur maximal (voir proposition 2.35), on trouve que $\square_{\omega'} \boldsymbol{T}_i = q \square_{\omega'}$, pour tout i. Ainsi

$$\square_{\omega'} S = (1 - q^p)(1 + q + \cdots + q^{r-p})\,\square_{\omega'}[K, 0, \ldots, 0, 1]$$

Le coefficient $(1 + q + \cdots + q^{r-p})$ se simplifie avec le facteur de normalisation de $G_{K \triangleright 1}$, ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

Comme conséquence de la preuve on trouve le développement suivant des fonctions de Hall-Littlewood dans la base des fonctions quasi-monomiales :

$$G_I = \sum_{J \succeq I} a_{I,J} M_J \tag{5.13}$$

où $a_{I,J}$ est défini comme suit. Soit $(k_1, \ldots, k_p)$ la composition de raffinement $\#(J, I)$. Alors

$$a_{I,J} = (1-q)^{k_1 - 1}(1-q^2)^{k_2 - 1} \cdots (1-q^p)^{k_p - 1}. \tag{5.14}$$

La matrice de transition est unitriangulaire supérieure. Elle correspond à l'inverse de la matrice des polynômes de Kostka-Foulkes. L'analogue de l'expression $s_\lambda = \sum K_{\lambda\mu}(q) P_\mu$ va être trouvée à l'aide de la base duale, dans l'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives. En particulier on va montrer que les coefficients de ce développement sont des polynômes à coefficients entiers.

5.2 Analogues non-commutatifs des fonctions de Hall-Littlewood

5.2.1 Définition et expression explicite

Dans la section précédente, on a montré que la famille des fonctions de Hall-Littlewood quasi-symétriques est une base de **QSym**. On peut donc maintenant définir les fonctions de Hall-Littlewood non-commutatives par dualité.

Définition 5.12 *On appelle* fonctions de Hall-Littlewood non-commutatives *les éléments de la base duale* (H_K) *de* (G_I)*.*

Ce sont donc des analogues des fonctions Q'. La formule suivante est l'analogue du développement $Q'_\mu = \sum K_{\lambda\mu} s_\lambda$.

Théorème 5.13 *La matrice des* H_J *développés dans la base* (R_I) *est une matrice uni-triangulaire inférieure dont les entrées sont des puissances de* q*. Cette matrice est explicitement donnée par :*

$$H_K(A;q) = \sum_{K \succeq J} q^{t(K,J)} R_J, \tag{5.15}$$

où $t(K,J) = \mathrm{Maj}\big(\#(K,J)\tilde{}\big)$

Avant de montrer le théorème, nous allons donner un moyen plus explicite pour calculer le coefficient $\mathrm{Maj}\big(\#(K,J)\tilde{}\big)$ pour $K \succeq J$:

Supposons que $K = (k_1, \ldots, k_p)$ et $J = (j_1, \ldots, j_q)$. Alors, par définition de l'ordre de raffinement, il existe des entiers $0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_q = p$ tels que

$$J = (k_1 + k_2 + \cdots + k_{u_1}, k_{u_1+1} + \cdots + k_{u_2}, \quad \ldots \quad , k_{u_{q-1}+1} + \cdots + k_p).$$

Remarquons que l'ensemble des descentes de la composition $\#(K,J)$ n'est autre que l'ensemble $U = \{u_1 < u_2 < \cdots < u_{q-1}\}$. Ainsi, l'ensemble des descentes de la composition $\#(K,J)\tilde{}$ est le complémentaire de U dans $\{1, \ldots, p-1\}$. Par définition l'indice majeur d'une composition est la somme de ses descentes. Considérons l'expression de J en fonction des parts de K ci dessus. On la regarde comme une suite d'entiers séparés par des «+» et des virgules «,». Le coefficient $t(K,J)$ est donc la somme des positions des

«+» dans la suite des «+» et «,». Par exemple si $K = (1, 3, 2, 1, 1, 3, 1, 4, 1)$ et $J = (4, 7, 1, 5)$, on écrit

$$\begin{array}{rl} & J = (1{+}3\,,2{+}1{+}1{+}3\,,1\,,4{+}1) \\ \text{positions :} & \quad 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 8 \end{array}$$

Les "+" apparaissent en position $1, 3, 4, 5$ et 8, d'où $t(K, J) = 21$. On vérifie que $\#(K, J)^{\sim} = (2, 4, 1, 2)^{\sim} = (1, 2, 1, 1, 3, 1)$, son indice majeur est donc bien $5 \times 1 + 4 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 1 + 3 = 21$.

Démonstration du théorème 5.13. La base des fonctions de Schur ruban (R_J) est la base duale des fonctions quasi-rubans (F_J). Ainsi le crochet de dualité de G_I et H_K s'écrit

$$\begin{aligned} \langle G_I, H_K \rangle &= \left\langle \sum_{J \succeq I} (-1)^{\ell(J)-\ell(I)} q^{s(I,J)} F_J, \sum_{K \succeq L} q^{t(K,L)} R_L \right\rangle \\ &= \sum_{J \succeq I} \sum_{K \succeq L} (-1)^{\ell(J)-\ell(I)} q^{s(I,J)+t(K,L)} \langle F_J, R_L \rangle \\ &= \sum_{K \succeq J \succeq I} (-1)^{\ell(J)-\ell(I)} q^{s(I,J)+t(K,J)} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Notons

$$z(K, J, I) = (-1)^{\ell(J)-\ell(I)} q^{s(I,J)+t(K,J)}.$$

Il est facile de voir que si $K = I$ la somme (5.16) se réduit à 1. Il suffit donc de montrer que cette dernière somme est nulle dans le cas $K \succ I$.

Supposons maintenant que $I = (i_1, i_2, \ldots, i_s)$. Soit l l'indice de la première part (à partir de la gauche de I) qui est cassée dans K. La composition K s'écrit donc $K = (k_1, k_2, \ldots, k_p)$ avec $i_u = k_u$ pour $i < l$. Soit $J(j_1, j_2, \ldots, j_t)$ une composition de l'intervalle $[K, I]$. On a clairement $j_u = i_u = k_u$ pour $i < l$. De plus, de deux choses l'une,

$$\text{soit} \quad j_l = k_l, \qquad \text{soit} \quad j_l = k_l + k_{l+1} + \cdots + k_{l+v} \tag{5.17}$$

L'intervalle $[K, I] = \{J \mid K \succeq J \succeq I\}$ se scinde en deux sous-ensembles selon que k_l apparaisse seule comme part de J ou qu'elle soit ajoutée avec la part k_{l+1}. Soit alors l'involution $\Psi_{K,I}$ de $[K, I]$ qui échange les deux sous-ensembles précédents comme suit :

$$\Psi_{K,I}(k_1, \ldots, k_{l-1}, j_l, \ldots, j_r) = \begin{cases} (k_1, \ldots, k_{l-1}, k_l + j_{l+1}, \ldots, j_r) & \text{si } j_l = k_l \\ (k_1, \ldots, k_{l-1}, k_l, j_l - k_l, \ldots, j_r) & \text{si } j_l > k_l \end{cases}$$

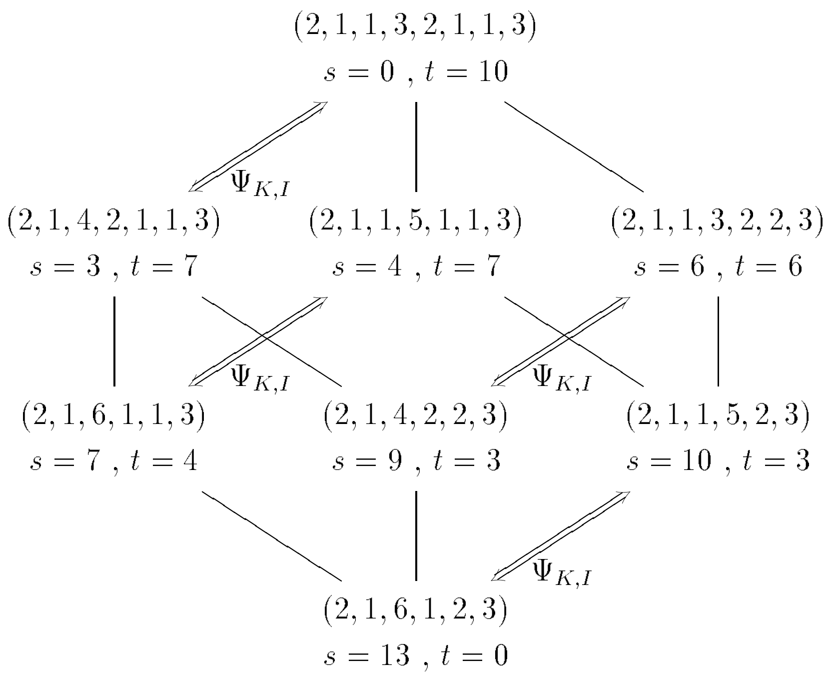


FIG. 5.1 : L'involution $\Psi_{K,I}$.

Par exemple, dans le cas $K = (2,1,1,3,2,1,1,3)$ et $I = (2,1,6,1,2,3)$, on a $l = 3$. La figure 5.1 montre l'action de l'involution Ψ sur le diagramme de Hasse de l'intervalle $[K, I]$.

La composition de raffinement $\#(J, I)$ est alors de la forme $(1^{l-1}, a, \dots)$. Si J est du premier type ($j_l = k_l$), la composition $\#(\Psi_{K,I}(J), I)$ est égale à $(1^{l-1}, a-1, \dots)$. Par conséquent

$$s(I, \Psi_{K,I}(J)) = s(I, J) - q^l.$$

De même on trouve que :

$$t(I, \Psi_{K,I}(J)) = t(I, J) + q^l.$$

Il s'ensuit que

$$z(K, J, I) + z(K, \Psi_{K,I}(J), I) = 0$$

Comme $\Psi_{K,I}$ est une involution, la somme (5.16) s'annule, ce qui achève la démonstration. $\square$

On vérifie sur la figure 5.1 que la somme $s+t$ est bien constante le long des doubles flèches correspondantes à $\Psi_{K,I}$.

On observe que les analogues des polynômes de Kostka-Foulkes se réduisent ici à des monômes. Par exemple $H_{(1^n)} = \sum_K q^{\mathrm{Maj}(K^\sim)} R_K$ où $K^\sim$ est la composition conjuguée de K. Ce résultat montre que les fonctions de Hall-Littlewood non-commutatives peuvent être vues comme une généralisation naturelle de l'idempotent de Klyachko [23] (voir aussi le corollaire 5.19).

Comme autre exemple, on peut calculer : $H_{(3,2,1)} = R_{(3,2,1)} + qR_{(3,3)} + q^2R_{(5,1)} + q^3R_{(6)}$. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 5.14

- *La famille des $(H_I)_I$ est une base de l'espace des fonctions symétriques non-commutatives à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$.*
- *La famille $(G_K)_{\ell(K)\leq n}$ est une base de l'espace des polynômes quasi-symétriques à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$.*
- *La famille $(G_K)_K$ est une base de l'espace des fonctions quasi-symétriques à coefficients dans $\mathbb{Z}[q]$.*

5.2.2 Constantes de structures

Il est donc possible d'exprimer le produit de deux fonctions H_K dans cette même base. Les coefficients ainsi obtenus sont appelés *constantes de structure* de **Sym** dans la base H. On va voir que, après une petite renormalisation, ces constantes sont des polynômes à coefficients positifs.

Théorème 5.15 *Soient I et J deux compositions de longueurs respectives r et s. On a alors*

$$H_I H_J = \sum_{J \succeq K} q^{t(J,K)} \left(c(r, s-p) H_{I \cdot K} + c(r, s-p+1) H_{I \triangleright K} \right) \tag{5.18}$$

où p est la longueur de la composition K et

$$c(r,v) = (1-q^r)(1-q^{r-1}) \ldots (1-q^{r-v+1}) \tag{5.19}$$

avec la convention que $c(r,0)=1$ et $c(r,v)=0$ si $v>i$.

C'est une conséquence de la formule de produit $R_I R_J = R_{I.J} + R_{I \triangleright J}$. Par exemple

$$H_{(3,1,2)}H_{(1,2)} = H_{(3,1,2,1,2)} + (1-q^3)H_{(3,1,3,2)} \\ + q(1-q^3)H_{(3,1,2,3)} + q(1-q^3)(1-q^2)H_{(3,1,5)}.$$

et

$$H_{(1,1,1)}H_{(1,1)} = H_{(1,1,1,1,1)} + (1-q^3)H_{(1,1,2,1)} \\ + q(1-q^3)H_{(1,1,1,2)} + q(1-q^3)(1-q^2)H_{(1,1,3)}.$$

Démonstration. Les deux exemples précédents impliquent les mêmes coefficients. C'est un fait général qui va nous donner le point de départ de la preuve :

On va montrer, au lemme 5.16, que les coefficients dépendent seulement de $\#(J,K)$ et de la longueur de la composition I, J, mais pas des parts de I, J et K. Énonçons ceci plus formellement :

Supposons que $I' = (1^r)$ et $J' = (1^s)$. Soient $U = (u_1, \dots, u_{r+s}) = I \cdot J$ et $L = (l_1, \dots, l_t)$ une composition de $r+s$. A L on associe une composition $\phi_{(I,J)}(L)$ de $|I| + |J|$ obtenue en sommant les l_1 premières parts de U, les l_2 suivantes, et ainsi de suite. Ainsi, $\phi_{(I,J)}(L)$ est donnée par

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{l_1-1}, u_{l_1} + \cdots + u_{l_1+l_2-1}, \cdots, u_{l_1+\dots} + \cdots + u_{r+s}) \quad (5.20)$$

C'est donc une composition de même longueur que L, telle que U soit plus fine que $\phi_{(I,J)}(L)$.

Par exemple, avec les notations précédentes, $I = (3,1,2)$, $J = (1,2)$ et donc $U = (3,1,2,1,2)$. D'où $\phi_{(I,J)}(1,2,2) = (3,3,3)$ et $\phi_{(I,J)}(1,1,2,1) = (3,1,3,2)$.

Il est connu que le produit des fonctions de Schur rubans s'écrit [24]

$$R_U R_V = R_{U \cdot V} + R_{U \triangleright V}. \quad (5.21)$$

Il vérifie l'égalité

$$R_{\phi_{(I,J)}(U)} R_{\phi_{(I,J)}(V)} = R_{\phi_{(I,J)}(U \cdot V)} + R_{\phi_{(I,J)}(U \triangleright V)} \quad (5.22)$$

qui exprime que le produit de deux fonctions rubans est "invariant par ϕ". Alors, par définition, le coefficient de $H_{(1^r)}H_{(1^s)}$ sur R_L est le même que celui de $H_I H_J$ sur $R_{\phi_{(I,J)}(L)}$. De plus, on voit que

$$\#((1^{r+s}), L) = \#(U, \phi_{(I,J)}(L)).$$

Ceci nous permet de revenir à la base des fonctions de Hall-Littlewood. On a donc montré le lemme suivant :

Lemme 5.16

- *Le coefficient du produit* $H_{(1^r)}H_{(1^s)}$ *en* H_L *est le même que celui de* $H_I H_J$ *sur* $H_{\phi_{(I,J)}(L)}$.
- *Le coefficient du produit* $H_I H_J$ *en* H_K, *où* K *n'est pas de la forme* $\phi_{(I,J)}(L)$, *est égal à zéro.*

Ainsi, il suffit de faire le calcul dans le cas $H_{(1^r)}H_{(1^s)}$ pour tout r et s. Soit K une composition. Calculons $H_{1^r \cdot K}$ et $H_{1^r \triangleright K}$. Rappelons que le coefficient $t(I,J)$ est obtenu en ajoutant la position des "+" dans l'écriture des parts de J comme somme des parts de I. Distinguons deux sortes de compositions L moins fines que $1^r \cdot K$:

– Celles pour lesquelles r est une descente. Ce sont les compositions de la forme $J \cdot K'$, où J est une composition de r et $K \succeq K'$. Dans ce cas les positions des "+" avant r sont les mêmes pour L et J et les positions après r dans L sont de la forme $r+s$ où s est la position du "+" correspondant dans K. On a ainsi

$$t\,(1^r \cdot K, J \cdot K') = t(1^r, J) + t(K, K') + (\ell(K) - \ell(K'))r. \tag{5.23}$$

Par exemple, soient $r = 4$ et $K = (2,3,1,4,1)$. Alors la composition $L = (2,1,1,5,1,5)$ est de la forme (J, K'), avec $J = (2,1,1) \models 4$ et $K \succeq K' = (5,1,5)$. On écrit donc

$$\begin{array}{rl} J = & (1{+}1\,,1\,,1\ \ ,\ 2{+}3\,,1\,,4{+}1) \\ \text{positions :} & \ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ \ 4\ \ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8 \end{array}$$

Les positions des "+" sont 1, ce qui correspond à $J = (1+1,1,1)$ et $5,8$ ce qui correspond à $1,4$ quand on écrit $K' = (5,1,5) = (2+3,1,4+1)$. On vérifie que $1+5+8 = 1+(1+5)+(5-3)\cdot 4$.

– Les autres compositions sont de la forme $(J \triangleright K')$, où J est une composition de r et $K \succeq K'$. la seule différence avec le cas précédent est qu'il y a un "+" en $r^{\text{ème}}$ position. Ainsi

$$t\,(1^r \cdot K, J \triangleright K') = t(1^r, J) + t(K, K') + (1 + \ell(K) - \ell(K'))r \tag{5.24}$$

Soient, par exemple $r = 4$ et $K = (2,3,1,4,1)$. Alors la composition $L = (2,1,6,1,5)$ est de la forme $(J \triangleright K')$, avec $J = (2,1,1) \models 4$ et $K \succeq K' = (5,1,5)$. On écrit donc

$$\begin{array}{rl} J = & (1{+}1\,,1\,,1\ +\ 2{+}3\,,1\,,4{+}1) \\ \text{positions :} & \ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ \ 4\ \ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8 \end{array}$$

On vérifie que $1+4+5+8 = 1+(1+5)+(5-3+1)\cdot 4$.

Le résultat de ces calculs est que

$$H_{1^r\cdot K} = \sum_{J\vDash r} q^{t(1^r,J)} \sum_{K\succeq K'} q^{t(K,K')+(\ell(K)-\ell(K'))r} \left(R_{J\cdot K'} + q^r R_{J\triangleright K'}\right). \quad (5.25)$$

De même, on trouve que

$$H_{1^r\triangleright K} = \sum_{J\vDash r} q^{t(1^r,J)} \sum_{K\succeq K'} q^{t(K,K')+(\ell(K)-\ell(K'))(r-1)} \left(R_{J\triangleright K'}\right). \quad (5.26)$$

Or, du développement de H_I et de la règle de produit des R_I, on déduit

$$H_{(1^r)}H_{(1^s)} = \sum_{J\vDash r} q^{t(1^r,J)} \sum_{K'\vDash s} q^{t(1^s,K')} \left(R_{J\cdot K'} + R_{J\triangleright K'}\right). \quad (5.27)$$

On cherche à montrer que

$$H_{(1^r)}H_{(1^s)} = \sum_{K\vDash s} q^{t(1^s,K)}\big(c(r,s-\ell(K))H_{1^r\cdot K} + (1-q^r)c(r-1,s-\ell(K))H_{1^r\triangleright K}\big). \quad (5.28)$$

Ainsi, on a seulement besoin de montrer la formule suivante qui correspond au coefficient de $R_{1^r\cdot K'}$:

$$q^{t(1^s,K')} = \sum_{(1^s)\succeq K\succeq K'} c(r,s-\ell(K))q^{(\ell(K)-\ell(K'))r} q^{t(1^s,K)+t(K,K')} \quad (5.29)$$

Le coefficient de $R_{1^r\triangleright K'}$ suivra facilement, en remplaçant r par $r-1$.

Montrons donc cette propriété par récurrence sur K'. Notons

$$z(1^s,K',K) = c(r,s-\ell(K))q^{(\ell(K)-\ell(K'))r} q^{t(1^s,K)+t(K,K')} \quad (5.30)$$

Si $K'=(1)$, et donc $s=1$, on a $z(1,1,1)=1$. Le résultat est donc vrai. De plus, si la formule est vraie pour K', elle l'est encore pour $K'\cdot 1$, puisque

$$t(U\cdot 1, V\cdot 1)) = t(U,V).$$

Ainsi

$$z(1^{s+1}, K'\cdot 1, K\cdot 1) = z(1^s,K',K) \quad (5.31)$$

Il reste à montrer que la propriété pour K implique la propriété pour la composition $K'\triangleright 1$.

Comme précédemment la somme

$$\sum_{(1^{s+1})\succeq K'\succeq K\triangleright 1} z(1^{s+1}, K', K \triangleright 1) \tag{5.32}$$

se scinde en deux parties selon que $K = L \cdot 1$ pour une $L \vDash s$ ou non ($K = L \triangleright 1$). Prouvons le lemme suivant :

Lemme 5.17 *Soit* $(1^s)\succeq L\succeq K$. *On a alors :*

$$\begin{aligned} z(1^{s+1}, L \cdot 1, K \triangleright 1) &= z(1^s, L, K)q^{r+\ell(L)} \\ z(1^{s+1}, L \triangleright 1, K \triangleright 1) &= z(1^s, L, K)q^s(1 - q^{r-s+\ell(L)}) \end{aligned} \tag{5.33}$$

Dans le premier cas $K = L \cdot 1$, on a $\ell(L) = \ell(K) + 1$, ce qui donne le facteur q^r. L'équation (5.31) et le fait que

$$t(L \cdot 1, K' \triangleright 1) = t(L, K) + \ell(L) \tag{5.34}$$

donnent le résultat énoncé. Dans le second cas, on a un facteur q^s de

$$t(1^{s+1}, L \triangleright 1) = t(1^s, L) + s, \tag{5.35}$$

le facteur $(1 - q^{r-s+\ell(L)})$ vient de $c(r, s + 1 - \ell(L))$. Ceci prouve le lemme.

On conclut donc finalement que

$$\sum_{(1^{s+1})\succeq K'\succeq K\triangleright 1} z(1^{s+1}, K', K \triangleright 1) = q^s \sum_{(1^s)\succeq K'\succeq K} z(1^s, K', K). \tag{5.36}$$

Par hypothèse de récurrence le membre gauche est $q^s q^{t(1^s,K')}$. La relation

$$q^{t(1^{s+1},K'\triangleright 1)} = q^s q^{t(1^s,K')} \tag{5.37}$$

donne l'égalité désirée. La démonstration s'achève par récurrence. □

Comme corollaire, on trouve la propriété suivante :

Corollaire 5.18 *Soit* $H'_K = (1-q)^{\ell(K)} H_K$. *Alors les constantes de structure de* **Sym** *dans la base* H'_K *sont des polynômes en* q *à coefficients entiers positifs.*

En effet, le théorème précédent montre que si I et J sont deux compositions de longueurs r et s, alors

$$H'_I H'_J = \sum_{J\succeq K} q^{t(J,K)} (d(r, s - p)H'_{I\cdot K} + d(r, s - p + 1)H'_{I\triangleright K}) \tag{5.38}$$

où p est la longueur de la composition K et

$$d(r,v) = [r]_q[r-1]_q \dots [r-v+1]_q \tag{5.39}$$

Par exemple

$$\begin{aligned} H'_{(3,1,2)}H'_{(1,2)} =& H'_{(3,1,2,1,2)} + (1+q+q^2)H'_{(3,1,3,2)} \\ &+ q(1+q+q^2)H'_{(3,1,2,3)} + q(1+q+q^2)(1+q)H'_{(3,1,5)}. \end{aligned}$$

Ceci pose la question d'une interprétation en théorie des représentations.

5.2.3 Factorisation aux racines de l'unité

Les fonctions de Hall-Littlewood non-commutatives ont une propriété de factorisation similaire à celle découverte par Lascoux, Leclerc et Thibon [44, 45] (voir aussi [62, 4] ainsi que la sous-section 2.4.2).

Corollaire 5.19 *Soient k un entier et ζ une racine primitive $k^{\text{ème}}$ de l'unité. Soient $J_1, \dots, J_c$ des compositions de longueur k et J_{c+1} une composition de longueur $r < k$. Soit I la concaténation des compositions $J_1 \cdots J_{c+1}$. Alors la fonction $H_I(A;\zeta)$ se factorise de la manière suivante :*

$$H_I(A;\zeta) = H_{J_1}(A;\zeta)H_{J_2}(A;\zeta)\cdots H_{J_{c+1}}(A;\zeta) \tag{5.40}$$

Par exemple, si ζ est une racine $3^{\text{ème}}$ de l'unité,

$$H_{(3,2,4,1,5,3,2,1)}(A;\zeta) = H_{(3,2,4)}(A;\zeta)H_{(1,5,3)}(A;\zeta)H_{(2,1)}(A;\zeta).$$

Démonstration. C'est une conséquence facile du théorème 5.15. En effet, par récurrence sur c, il est suffisant de montrer que si J est une composition de longueur ck et K une composition de n'importe quelle longueur alors $H_J(A;\zeta)H_K(A;\zeta) = H_{J,K}(A;\zeta)$. Or le théorème 5.15 s'écrit

$$H_J(A;\zeta)H_K(A;\zeta) = H_{J\cdot K}(A;\zeta) + (1-\zeta^k)\left(\sum_{L\neq(J\cdot K)} a_J H_L\right). \tag{5.41}$$

puisque $c(k,v)$ est un multiple de $(1-\zeta^k)$ sauf si $v=0$. □

Remarquons que la propriété reste vraie pour les fonctions modifiées H'_K.

5.3 Tables

Nous donnons ici les matrices de transition entre les nouvelles fonctions de Hall-Litllewood et les fonctions de Schur généralisées. Les matrices se lisent comme suit : Le coefficient de la fonctions de Hall-Litllewood G_I (*resp.* H_I) sur la fonction F_J (*resp.* R_J) est à l'intersection de la ligne I et de la colonne J. Un « . » désigne un coefficient nul. Par un entier i on signifie un coefficient q^i avec la convention que les entier suligné désigne des coefficients négatifs. Par exemple sur la ligne 32 on lit $G_{(31)} = F_{(31)} - qF_{(211)} - qF_{(121)} + q^2F_{(1111)}$.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} 3 & 21 & 12 & 111 \end{array} \\ \begin{array}{r} 3 \\ 21 \\ 12 \\ 111 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & \overline{1} & \overline{1} & 2 \\ . & 0 & . & \overline{1} \\ . & . & 0 & \overline{2} \\ . & . & . & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

G_I sur F_J, degré 3.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} 3 & 21 & 12 & 111 \end{array} \\ \begin{array}{r} 3 \\ 21 \\ 12 \\ 111 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . \\ 1 & . & 0 & . \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

H_I sur R_J, degré 3.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccccc} 4 & 31 & 22 & 211 & 13 & 121 & 112 & 1111 \end{array} \\ \begin{array}{r} 4 \\ 31 \\ 22 \\ 211 \\ 13 \\ 121 \\ 112 \\ 1111 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & \overline{1} & \overline{1} & 2 & \overline{1} & 2 & 2 & \overline{3} \\ . & 0 & . & \overline{1} & . & \overline{1} & . & 2 \\ . & . & 0 & \overline{2} & . & . & \overline{1} & 3 \\ . & . & . & 0 & . & . & . & \overline{1} \\ . & . & . & . & 0 & \overline{2} & \overline{2} & 4 \\ . & . & . & . & . & 0 & . & \overline{2} \\ . & . & . & . & . & . & 0 & \overline{3} \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

G_I sur F_J, degré 4.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccccc} 4 & 31 & 22 & 211 & 13 & 121 & 112 & 1111 \end{array} \\ \begin{array}{r} 4 \\ 31 \\ 22 \\ 211 \\ 13 \\ 121 \\ 112 \\ 1111 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & 0 & . & . & . & . & . \\ 3 & 1 & 2 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 0 & . & . & . \\ 3 & 1 & . & . & 2 & 0 & . & . \\ 3 & . & 1 & . & 2 & . & 0 & . \\ 6 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

H_I sur R_J, degré 4.

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{matrix} 5 & 41 & 32 & 311 & 23 & 221 & 212 & 2111 & 14 & 131 & 122 & 1211 & 113 & 1121 & 1112 & 11111 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 5 \\ 41 \\ 32 \\ 311 \\ 23 \\ 221 \\ 212 \\ 2111 \\ 14 \\ 131 \\ 122 \\ 1211 \\ 113 \\ 1121 \\ 1112 \\ 11111 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & \bar{1} & \bar{1} & 2 & \bar{1} & 2 & 2 & \bar{3} & \bar{1} & 2 & 2 & \bar{3} & 2 & \bar{3} & \bar{3} & 4 \\
. & 0 & . & \bar{1} & . & \bar{1} & . & 2 & . & \bar{1} & . & 2 & . & 2 & . & \bar{3} \\
. & . & 0 & \bar{2} & . & . & \bar{1} & 3 & . & . & \bar{1} & 3 & . & . & 2 & \bar{4} \\
. & . & . & 0 & . & . & . & \bar{1} & . & . & . & \bar{1} & . & . & . & 2 \\
. & . & . & . & 0 & \bar{2} & \bar{2} & 4 & . & . & . & . & \bar{1} & 3 & 3 & \bar{5} \\
. & . & . & . & . & 0 & . & \bar{2} & . & . & . & . & . & \bar{1} & . & 3 \\
. & . & . & . & . & . & 0 & \bar{3} & . & . & . & . & . & . & \bar{1} & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . & . & . & . & . & . & \bar{1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \bar{2} & \bar{2} & 4 & \bar{2} & 4 & 4 & \bar{6} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & . & \bar{2} & . & \bar{2} & . & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \bar{3} & . & . & \bar{2} & 5 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . & . & \bar{2} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \bar{3} & \bar{3} & 6 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & . & \bar{3} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & \bar{4} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

G_I sur F_J, degré 5.

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{matrix} 5 & 41 & 32 & 311 & 23 & 221 & 212 & 2111 & 14 & 131 & 122 & 1211 & 113 & 1121 & 1112 & 11111 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 5 \\ 41 \\ 32 \\ 311 \\ 23 \\ 221 \\ 212 \\ 2111 \\ 14 \\ 131 \\ 122 \\ 1211 \\ 113 \\ 1121 \\ 1112 \\ 11111 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
3 & 1 & 2 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
3 & 1 & . & . & 2 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
3 & . & 1 & . & 2 & . & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
6 & 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\
3 & 1 & . & . & . & . & . & . & 2 & 0 & . & . & . & . & . & . \\
3 & . & 1 & . & . & . & . & . & 2 & . & 0 & . & . & . & . & . \\
6 & 3 & 4 & 1 & . & . & . & . & 5 & 2 & 3 & 0 & . & . & . & . \\
3 & . & . & . & 1 & . & . & . & 2 & . & . & . & 0 & . & . & . \\
6 & 3 & . & . & 4 & 1 & . & . & 5 & 2 & . & . & 3 & 0 & . & . \\
6 & . & 3 & . & 4 & . & 1 & . & 5 & . & 2 & . & 3 & . & 0 & . \\
10 & 6 & 7 & 3 & 8 & 4 & 5 & 1 & 9 & 5 & 6 & 2 & 7 & 3 & 4 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

H_I sur R_J, degré 5.

	6	51	42	411	33	321	312	3111	24	231	222	2211	213	2121	2112	21111	15	141	132	1311	123	1221	1212	12111	114	1131	1122	11211	1113	11121	11112	111111
6	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	2	$\bar{1}$	2	2	$\bar{3}$	$\bar{1}$	2	2	$\bar{3}$	2	$\bar{3}$	$\bar{3}$	4	$\bar{1}$	2	2	$\bar{3}$	2	$\bar{3}$	$\bar{3}$	4	2	$\bar{3}$	$\bar{3}$	4	$\bar{3}$	4	4	$\bar{5}$
51	.	0	.	$\bar{1}$	.	$\bar{1}$	.	2	.	$\bar{1}$	.	2	.	2	.	$\bar{3}$	.	$\bar{1}$	.	2	.	2	.	$\bar{3}$	.	2	.	$\bar{3}$	.	$\bar{3}$	.	4
42	.	.	0	$\bar{2}$	.	.	$\bar{1}$	3	.	.	$\bar{1}$	3	.	.	2	$\bar{4}$	.	.	$\bar{1}$	3	.	.	2	$\bar{4}$	.	.	2	$\bar{4}$	.	.	$\bar{3}$	5
411	.	.	.	0	.	.	.	$\bar{1}$	.	.	.	$\bar{1}$	.	.	.	2	.	.	.	$\bar{1}$	.	.	.	2	.	.	.	2	.	.	.	$\bar{3}$
33	.	.	.	.	0	$\bar{2}$	$\bar{2}$	4	.	.	.	.	$\bar{1}$	3	3	$\bar{5}$	.	.	.	.	$\bar{1}$	3	3	$\bar{5}$	.	.	.	.	2	$\bar{4}$	$\bar{4}$	6
321	.	.	.	.	.	0	.	$\bar{2}$	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	.	3	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	.	3	.	.	.	.	.	2	.	$\bar{4}$
312	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{3}$	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	4	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	4	.	.	.	.	.	.	2	$\bar{5}$
3111	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	.	.	.	.	.	.	.	2
24	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{2}$	$\bar{2}$	4	$\bar{2}$	4	4	$\bar{6}$	.	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	3	3	$\bar{5}$	3	$\bar{5}$	$\bar{5}$	7
231	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	$\bar{2}$	.	$\bar{2}$	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	.	3	.	3	.	$\bar{5}$
222	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{3}$	.	.	$\bar{2}$	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	4	.	.	3	$\bar{6}$
2211	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	$\bar{2}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	.	.	.	3
213	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{3}$	$\bar{3}$	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	4	4	$\bar{7}$
2121	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	$\bar{3}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	.	4
2112	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{4}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$	5
21111	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{1}$
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{2}$	$\bar{2}$	4	$\bar{2}$	4	4	$\bar{6}$	$\bar{2}$	4	4	$\bar{6}$	4	$\bar{6}$	$\bar{6}$	8
141	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	$\bar{2}$	.	$\bar{2}$	.	4	.	$\bar{2}$	.	4	.	4	.	$\bar{6}$
132	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{3}$	.	.	$\bar{2}$	5	.	.	$\bar{2}$	5	.	.	4	$\bar{7}$
1311	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	$\bar{2}$	.	.	.	$\bar{2}$	.	.	.	4
123	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{3}$	$\bar{3}$	6	.	.	.	.	$\bar{2}$	5	5	$\bar{8}$
1221	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	$\bar{3}$	.	.	.	.	.	$\bar{2}$	.	5
1212	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{4}$	.	.	.	.	.	.	$\bar{2}$	6
12111	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	$\bar{2}$
114	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{3}$	$\bar{3}$	6	$\bar{3}$	6	6	$\bar{9}$
1131	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	$\bar{3}$	.	$\bar{3}$	.	6
1122	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{4}$	.	.	$\bar{3}$	7
11211	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	$\bar{3}$
1113	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{4}$	$\bar{4}$	8
11121	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	$\bar{4}$
11112	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	$\bar{5}$
111111	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0

FIG. 5.2 : Matrice de changement de base G_I sur F_J en degré 6.

	6	51	42	411	33	321	312	3111	24	231	222	2211	213	2121	2112	21111	15	141	132	1311	123	1221	1212	12111	114	1131	1122	11211	1113	11121	11112	111111
6	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
51	1	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
42	1	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
411	3	1	2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
33	1	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
321	3	1	.	.	2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
312	3	.	1	.	2	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3111	6	3	4	1	5	2	3	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	1	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
231	3	1	.	.	.	.	.	.	2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
222	3	.	1	.	.	.	.	.	2	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2211	6	3	4	1	.	.	.	.	5	2	3	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
213	3	.	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2121	6	3	.	.	4	1	.	.	5	2	.	.	3	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2112	6	.	3	.	4	.	1	.	5	.	2	.	3	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21111	10	6	7	3	8	4	5	1	9	5	6	2	7	3	4	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
141	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
132	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1311	6	3	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	2	3	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
123	3	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1221	6	3	.	.	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	2	.	.	3	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1212	6	.	3	.	4	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	.	2	.	3	.	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12111	10	6	7	3	8	4	5	1	.	.	.	.	.	.	.	.	9	5	6	2	7	3	4	0	.	.	.	.	.	.	.	.
114	3	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	.	.	.	.
1131	6	3	.	.	.	.	.	.	4	1	.	.	.	.	.	.	5	2	.	.	.	.	.	.	3	0	.	.	.	.	.	.
1122	6	.	3	.	.	.	.	.	4	.	1	.	.	.	.	.	5	.	2	.	.	.	.	.	3	.	0	.	.	.	.	.
11211	10	6	7	3	.	.	.	.	8	4	5	1	.	.	.	.	9	5	6	2	.	.	.	.	7	3	4	0	.	.	.	.
1113	6	.	.	.	3	.	.	.	4	.	.	.	1	.	.	.	5	.	.	.	2	.	.	.	3	.	.	.	0	.	.	.
11121	10	6	.	.	7	3	.	.	8	4	.	.	5	1	.	.	9	5	.	.	6	2	.	.	7	3	.	.	4	0	.	.
11112	10	.	6	.	7	.	3	.	8	.	4	.	5	.	1	.	9	.	5	.	6	.	2	.	7	.	3	.	4	.	0	.
111111	15	10	11	6	12	7	8	3	13	8	9	4	10	5	6	1	14	9	10	5	11	6	7	2	12	7	8	3	9	4	5	0

FIG. 5.3 : Matrice de changement de base H_I sur R_J en degré 6.

5.4 Algèbres de Hecke affines et fonctions quasi-symétriques

On a vu dans les chapitres précédents que l'algèbre de Hecke agit sur les polynômes en laissant invariantes les fonctions quasi-symétriques. Cette construction permet de définir des analogues quasi-symétriques des fonctions de Hall-Littlewood. Dans le cas classique, Macdonald a défini des analogues à deux paramètres des fonctions de Schur [62, 61]. Il est apparu que ces fonctions pouvaient en fait être définies à l'aide de l'algèbre de Hecke affine [9, 36]. Dans cette section, on va étendre l'action quasi-symétrisante de l'algèbre de Hecke à l'algèbre de Hecke affine. On va ensuite montrer des similarités et quelques différences entre le cas classique et le cas quasi-symétrique. On va par exemple caractériser une base de **QSym** qui diagonalise l'opérateur de Macdonald M_1. Bien que cette base semble, comme les fonctions de Macdonald classique, diagonaliser tout de centre le l'algèbre de Hecke affine, elle ne semble pas en être le bon analogue quasi-symétrique.

5.4.1 Algèbre de Hecke Affine

En accord avec les notations classiques [62], dans cette section, le paramètre de l'algèbre de Hecke sera noté t au lieu de q. Le paramètre q désignera le niveau de la représentation de l'algèbre de Hecke affine.

Définition 5.20 *L'algèbre de Hecke affine étendue $\widetilde{H}_n(t)$ de type A_{n-1} est la $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ algèbre engendrée par les éléments $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ et Ω avec les relations :*

$$T_i^2 = (t-1)\,T_i + t \qquad \textit{pour } 0 \le i \le n-1, \tag{5.42}$$

$$T_i\,T_j = T_j\,T_i \qquad \textit{pour } |i-j| > 1, \tag{5.43}$$

$$T_i\,T_{i+1}\,T_i = T_{i+1}\,T_i\,T_{i+1} \qquad \textit{pour } 0 \le i \le n, \tag{5.44}$$

$$\Omega\,T_i = T_{i-1}\,\Omega \qquad \textit{pour } 0 \le i \le n, \tag{5.45}$$

Dans les trois dernières équations les indices sont entendus modulo n.

Note 5.21 La notation classique pour les opérateurs de Macdonald est M_i. Pour les différencier des fonctions quasi-monomiales M_I on les notera $\mathcal{M}_i$.

Rappelons que l'algèbre de Hecke $H_n(t)$ agit fidèlement sur les polynômes par la formule [60, 50] :

$$T_i\,f = (t-1)\,\pi_i\,f + \sigma_i\,f. \tag{5.46}$$

L'algèbre de Hecke affine est réalisée comme algèbre d'opérateurs agissant sur les polynômes en étendant l'action de l'algèbre de Hecke par (voir [8]) :

$$\Omega(x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_{n-1}^{m_{n-1}} x_n^{m_n}) = q^{m_1}\ x_1^{m_2} x_2^{m_3} \dots x_{n-1}^{m_n} x_n^{m_1}. \tag{5.47}$$

Le paramètre q est appelé niveau de l'action.

Il est connu que l'algèbre de Hecke affine $\widetilde{H}_n(t)$ admet une sous algèbre commutative isomorphe à l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$ (voir par exemple Lusztig [59]). Dans le cas particulier du type A_n, on peut construire une telle algèbre commutative de la manière suivante : pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, on pose

$$Y_i = T_i\, T_{i+1} \cdots T_{n-1}\, \Omega\, \overline{T}_1\, \overline{T}_2 \dots \overline{T}_{i-1}\,. \tag{5.48}$$

Ces opérateurs sont dus à Cherednik qui les a appelés *q-opérateurs de Dunkl.* Les $Y_1, \dots Y_n$ commutent deux à deux et ils engendrent dans $\widetilde{H}_n(t)$ une sous-algèbre $\mathbb{C}[Y^{\pm 1}] := \mathbb{C}[Y_1^{\pm 1}, \dots Y_n^{\pm 1}]$ isomorphe à l'anneau des polynômes de Laurent en n variables. Il existe de plus un isomorphisme naturel

$$\widetilde{H}_n(t) \simeq \mathbb{C}[Y^{\pm 1}] \otimes H_n(t). \tag{5.49}$$

Le fait essentiel pour la construction des polynômes de Macdonald est que le centre de $\widetilde{H}_n(t)$ est exactement la sous algèbre des polynômes de Laurent en $Y_1, \dots Y_n$ invariante par permutation des Y_i. Ce théorème est dû à Bernstein. Les opérateurs de Macdonald $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ apparaissent comme les fonctions élémentaires des Y_i. Pour toute partition λ, le polynôme de Macdonald P_λ vérifie :

$$\mathcal{M}_r P_\lambda(X) = e_r(q^\lambda t^\rho) P_\lambda(X), \tag{5.50}$$

où l'on note $e_r(q^\lambda t^\rho)$ la r-ème fonction symétrique élémentaire de l'alphabet $q^\lambda t^\rho = (q^{\lambda_1} t^{\rho_1}, \dots, q^{\lambda_n} t^{\rho_n})$ avec $\rho_i = (n - i + 1)/2$. Plus généralement, pour tout polynôme de Laurent $f(Y) \in \mathbb{C}[Y^{\pm 1}]$ invariant par permutation des Y_i, on a

$$f(Y) P_\lambda(X) = f(q^\lambda t^\rho) P_\lambda(X). \tag{5.51}$$

Ainsi, les polynômes de Macdonald sont les vecteurs propres simultanés de toute l'algèbre des fonctions symétriques en les Y_i, et les espaces propres simultanés sont tous de dimension 1.

5.4.2 Action de l'algèbre de Hecke affine et polynômes quasi-symétriques

Nous allons étudier un analogue quasi-symétrique de la construction précédente. Rappelons tout d'abord que l'action quasi-symétrisante de l'algèbre de Hecke est donnée par :

$$\boldsymbol{T}_i = (1-q)\,\overline{\boldsymbol{\pi}}_i + t\,\boldsymbol{\sigma}_i = \overline{\boldsymbol{\pi}}_i + t(\boldsymbol{\sigma}_i - \overline{\boldsymbol{\pi}}_i) \tag{5.52}$$

Le générateur de l'algèbre de Hecke affine étendue Ω agit de la même manière que dans le cas classique :

$$\boldsymbol{\Omega}(x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_{n-1}^{m_{n-1}}x_n^{m_n}) = q^{m_1}\; x_1^{m_2}x_2^{m_3}\dots x_{n-1}^{m_n}x_n^{m_1}. \tag{5.53}$$

ou, avec nos notations :

$$\boldsymbol{\Omega}[m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n] = q^{m_1}[m_2, m_3, \dots, m_n, m_1]. \tag{5.54}$$

De la même manière, on pose

$$\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{T}_1\,\boldsymbol{\Omega}^{-1}\,. \tag{5.55}$$

On voit alors facilement que $\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\,\boldsymbol{T}_n\,\boldsymbol{\Omega}$. De sorte que l'on a les trois relations

$$\boldsymbol{T}_0\,\boldsymbol{T}_1\,\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{T}_1\,\boldsymbol{T}_0\,\boldsymbol{T}_1, \quad \boldsymbol{T}_n\,\boldsymbol{T}_1\,\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{T}_n\,\boldsymbol{T}_0\,\boldsymbol{T}_n, \tag{5.56}$$

$$\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{T}_i = \boldsymbol{T}_{i-1}\,\boldsymbol{\Omega}\,. \tag{5.57}$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème 5.22 *L'application : $T_i \mapsto \boldsymbol{T}_i$ et $\Omega \mapsto \boldsymbol{\Omega}$ définit une action de l'algèbre de Hecke affine étendue $\widetilde{H}_n(t)$ sur $\mathbb{K}[t, t^{-1}, q, q^{-1}][X]$ qui étend l'action quasi-symétrisante de l'algèbre de Hecke $H_n(t)$. On l'appellera encore* action quasi-symétrisante.

Bien évidemment, l'action quasi-symétrisante n'est pas fidèle puisqu'elle n'est déjà pas fidèle en tant qu'action de $H_n(t)$.

Note 5.23 Remarquons déjà quelques différences fondamentales avec l'action classique : à $t = 1$, le q-opérateur de Dunkl classique

$$Y_i = T_i\; T_{i+1} \cdots T_{n-1}\,\Omega\,\overline{T}_1\,\overline{T}_2 \dots \overline{T}_{i-1}\,. \tag{5.58}$$

se réduit à

$$Y_i = \sigma_i\,\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1}\,\Omega\,\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}\,. \tag{5.59}$$

Il coïncide donc avec l'opérateur de q-décalage :

$$\tau_i(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}) = q^{m_i}\;x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}. \tag{5.60}$$

C'est ainsi que l'on peut faire le lien avec l'expression classique des opérateurs de Macdonald en termes de q-décalage.

Ici ce n'est pas du tout le cas : par exemple, si les m_i sont tous non nuls, les transpositions agissent trivialement sur le monôme $[m_1, m_2, \ldots, m_p]$ et ainsi

$$\boldsymbol{Y}_i([m_1, m_2, \ldots, m_n]) = q^{m_1}\;[m_2, \ldots, m_n, m_1]. \tag{5.61}$$

En particulier, l'opérateur de q-décalage n'appartient pas à l'image de $\widetilde{H}_n(1)$.

En revanche, puisque la caractérisation des fonctions quasi-symétriques par l'action de l'algèbre de Hecke est la même que dans celle des fonctions symétriques, le théorème suivant est toujours vrai :

Théorème 5.24 *L'algèbre des fonctions quasi-symétriques est stable sous l'action quasi-symétrisante du centre de l'algèbre de Hecke affine* $\widetilde{H}_n(t)$.

Démonstration. D'après le lemme 3.44, un polynôme est invariant par $\boldsymbol{\sigma}_i$ si et seulement si il vérifie $\boldsymbol{T}_i\,f = qf$. Les polynômes quasi-symétriques sont donc exactement les polynômes f tels que

$$\boldsymbol{T}_i\,f = qf \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n. \tag{5.62}$$

Par conséquent, si f est un polynôme quasi-symétrique, pour tout élément $\mathcal{M}$ du centre de $\widetilde{H}_n(t)$ on a

$$\boldsymbol{T}_i\,\boldsymbol{\mathcal{M}}f = \boldsymbol{\mathcal{M}}\,\boldsymbol{T}_i\,f = q\boldsymbol{\mathcal{M}}f. \tag{5.63}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ désigne comme précédemment l'opérateur quasi-symétrisant associé à $\mathcal{M}$. Ainsi $\boldsymbol{\mathcal{M}}f$ est quasi-symétrique. $\square$

5.4.3 Opérateurs de Macdonald

Pour tenter de définir des fonctions de Macdonald quasi-symétriques, nous allons nous intéresser particulièrement à l'opérateur de Macdonald $\mathcal{M}_1$. Rappelons que cet opérateur est défini par :

$$\mathcal{M}_1 = e_1(Y_1, \ldots, Y_n) = Y_1 + \cdots + Y_n \,. \tag{5.64}$$

où $Y_i = T_i\, T_{i+1} \cdots T_{n-1}\, \Omega\, \overline{T}_1\, \overline{T}_2 \ldots \overline{T}_{i-1}$. Or, si f est une fonction symétrique, $\overline{T}_i\, f = f$. L'action de $\mathcal{M}_1$ sur les fonctions symétriques est donc égale à l'action de l'opérateur :

$$(1 + T_{n-1} + T_{n-2}\, T_{n-1} + \cdots + T_1\, T_2 \ldots T_{n-1})\, \Omega \,. \tag{5.65}$$

Remarquons que si f est symétrique, $\Omega\, f$ est symétrique en $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

D'autre part le q-symétriseur $\square_\omega$ s'écrit

$$\square_\omega = (1 + T_{n-1} + T_{n-2}\, T_{n-1} + \cdots + T_1\, T_2 \ldots T_{n-1})\, \square_{\omega'} \tag{5.66}$$

où $\square_{\omega'}$ est le symétriseur maximal associé à $\mathfrak{S}_{n-1}$ qui multiplie les fonctions symétriques en $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ par $[n-1]_q!$. On a donc l'égalité

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{[n-1]_q!}\, \square_\omega\, \Omega \,. \tag{5.67}$$

Bien sûr, le calcul précédent se fait de la même manière pour les opérateurs quasi-symétrisants. Nous allons donc étudier l'opérateur

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_1 = \frac{1}{[n-1]_q!}\, \square_\omega\, \boldsymbol{\Omega} = (1 + \boldsymbol{T}_{n-1} + \cdots + \boldsymbol{T}_1\, \boldsymbol{T}_2 \ldots \boldsymbol{T}_{n-1})\, \boldsymbol{\Omega} \,. \tag{5.68}$$

Proposition 5.25 *Soit $K = (k_1, \ldots, k_p)$ une composition. En n variables, l'action de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$ sur la fonction quasi-monomiale M_K est de la forme :*

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_1 M_K = [n-p]_t M_K + q^{k_1} t^{(n-p)} [p]_t M_{r(K)} + \sum_I a_I(q,t) M_I \tag{5.69}$$

où $r(K) = (k_2, \ldots, k_p, k_1)$, la somme est étendue aux compositions I strictement plus fines que K et $r(K)$.

Nous allons commencer par le lemme suivant :

Lemme 5.26 *L'image de M_I par $\boldsymbol{\Omega}$ est donnée par*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}\, M_K(x_1,\dots,x_n) &= M_K(x_1,\dots,x_{n-1}) \\ &\quad + q^{k_1}\big(M_{r(K)}(x_1,\dots,x_n) - M_{r(K)}(x_1,\dots,x_{n-1})\big). \qquad (5.70)\end{aligned}$$

Démonstration. Les monômes qui apparaissent dans $M_K(x_1,\dots,x_n)$ sont de deux sortes : ceux dont l'exposant de x_1 est nul donnent par $\boldsymbol{\Omega}$ le polynôme $M_K(x_1,\dots,x_{n-1})$. Si l'exposant de x_1 est non nul, il est forcément égal à k_1. Les monômes dont l'exposant est non nul ont donc pour image par $\boldsymbol{\Omega}$ la partie des monômes de

$$q^{k_1} M_{r(K)}(x_1,\dots,x_n) \qquad (5.71)$$

dont l'exposant de x_n est non nul, c'est exactement la deuxième partie de la somme de l'énoncé. □

Revenons à la preuve de la proposition.

Démonstration. Notons

$$\boldsymbol{D} = 1 + \boldsymbol{T}_{n-1} + \boldsymbol{T}_{n-2}\,\boldsymbol{T}_{n-1} + \cdots + \boldsymbol{T}_1\,\boldsymbol{T}_2 \dots \boldsymbol{T}_{n-1}\,. \qquad (5.72)$$

Il faut maintenant calculer

$$\boldsymbol{D}\, M_K(x_1,\dots,x_{n-1}) \qquad (5.73)$$

En fait, le calcul a déjà été fait dans la preuve de la stabilité des fonctions de Hall-Littlewood lors de l'ajout d'une variable. En effet, d'après 5.5, on a

$$G_K(x_1,\dots,x_n,0;t) = G_K(x_1,\dots,x_n;t). \qquad (5.74)$$

Mais par définition

$$G_K(x_1,\dots,x_n;t) = \frac{1}{[p]_t!\ [n-p]_t!}\,\Box_\omega(X^K). \qquad (5.75)$$

Par conséquent :

$$\boldsymbol{D}\, G_K(x_1,\dots,x_{n-1};t) = [n-p]_t G_K(x_1,\dots,x_n;t) \qquad (5.76)$$

On a montré de plus que

$$G_K = M_K + \sum_{I \succeq K} a_i M_I. \qquad (5.77)$$

On en déduit que

$$\boldsymbol{D}\, M_K(x_1,\dots,x_{n-1}) = [n-p]_t G_K(x_1,\dots,x_n) + \sum_{I \succeq K} a_i M_I. \qquad (5.78)$$

Il reste à voir que $[n]_t - [n-p]_t = t^{(n-p)}[p]_t$. D'où la proposition. □

Par exemple dans la base

$$M_{(4)} \quad M_{(1,3)} \quad M_{(3,1)} \quad M_{(2,2)} \quad M_{(1,1,2)} \quad M_{(1,2,1)} \quad M_{(2,1,1)} \quad M_{(1,1,1,1)}$$

la matrice de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$ est de la forme

$$\begin{pmatrix}
t^3q^4+t^2+t+1 & . & . & . & . & . & . & . \\
* & t+1 & (t^3+t^2)q^3 & . & . & . & . & . \\
* & (t^3+t^2)q & t+1 & . & . & . & . & . \\
* & . & . & (t^3+t^2)q^2+t+1 & . & . & . & . \\
* & * & * & * & 1 & . & (t^3+t^2+t)q^2 & . \\
* & * & * & . & (t^3+t^2+t)q & 1 & . & . \\
* & * & * & . & . & (t^3+t^2+t)q & 1 & . \\
* & * & * & * & * & * & * & (t^3+t^2+t+1)q
\end{pmatrix}$$

FIG. 5.4 : Forme triangulaire par blocs de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$

Le but de ce qui suit est de motiver la conjecture suivante :

Conjecture 5.27 *L'action quasi-symétrisante du centre de $\widetilde{H}_n(t)$ est diagonalisable.*

En particulier nous allons montrer que $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$ est diagonalisable. Pour ceci remarquons que la proposition 5.25 nous donne une forme très particulière pour la matrice de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$ dans la base des fonctions quasi-monomiales (voir figure 5.4). Pour voir cette forme, il faut ranger les compositions dans un ordre particulier. On rassemble les compositions par longueur, et à l'intérieur d'un bloc de compositions de même longueur on rassemble les compositions qui sont les permutées circulaires les unes des autres. Par exemple les compositions de poids 4 sont rangées comme suit :

$$(4) \quad (1,3) \quad (3,1) \quad (2,2) \quad (1,1,2) \quad (1,2,1) \quad (2,1,1) \quad (1,1,1,1).$$

Alors la matrice de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$ est triangulaire par blocs par rapport aux blocs regroupant les compositions de même longueur et à l'intérieur d'un tel bloc elle est diagonale par bloc par rapport aux blocs regroupant les compositions permutées circulaires les unes des autres.

Définition 5.28 *Soit $K = (k_1, \ldots, k_p)$ une composition. Il existe un plus petit entier s tel que $r^s(K) = K$. Il y a alors deux cas :*

– *si $s < p$ alors s divise p et K est de la forme $K = (J)^u$ avec $us = p$.*

– *si $s = p$ alors K n'est pas de la forme précédente, on dit que K est primitive.*

Par exemple, $K = (1,2,1,2) = (1,2)^2$ et $K = (1,2,2)$ est primitive.

Soient $J = (j_1, \ldots, j_s)$ une composition primitive et $K = (J)^u$. La composition K est donc de longueur $p = su$. Il est clair que les compositions

$$r^i(K) \quad \text{pour} \quad i = 1 \ldots s \tag{5.79}$$

sont toutes distinctes. D'après la proposition 5.25, le bloc de la matrice de $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$ correspondant à ces compositions est de la forme :

$$\begin{pmatrix} [n-p]_t & 0 & \cdots & 0 & q^{j_s}t^{(n-p)}[p]_t \\ q^{j_1}t^{(n-p)}[p]_t & [n-p]_t & \ddots & & 0 \\ 0 & q^{j_2}t^{(n-p)}[p]_t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q^{j_{s-1}}t^{(n-p)}[p]_t & [n-p]_t \end{pmatrix} \tag{5.80}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$(X - [n-p]_t)^s - q^{j_1+j_2+\cdots+j_s}(t^{(n-p)}[p]_t)^s. \tag{5.81}$$

Toutes ses racines sont simples. De plus, on voit sur cette expression que les racines ne dépendent que des longueurs s et p et du poids de la composition J. L'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$ a donc, contrairement au cas classique, des valeurs propres multiples.

Cependant si K' est plus longue que K les valeurs propres des matrices correspondantes sont distinctes. De la forme triangulaire de la matrice associée à $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$, on déduit que ce dernier est diagonalisable. Ainsi, à chaque triplet (J, u, z) où J est une composition primitive, u un entier et z une racine du polynôme caractéristique ci-dessus, on peut associer une fonction quasi-symétrique $P_{(J,u,z)}$ qui est valeur propre pour $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$. Les expériences numériques semblent montrer qu'en fait $P_{(J,u,z)}$ est fonction propre pour tout le centre.

Remarquons que l'on ne sait plus indicer canoniquement la base P par les compositions. De plus, à $q = 0$ les polynômes ainsi obtenus ne se spécialisent pas en les polynômes de Hall-Littlewood.

Chapitre 6

Relèvements non-commutatifs des fonctions quasi-symétriques

Ce chapitre est ma contribution à un travail en commun avec Gérard Duchamp et Jean-Yves Thibon. Pour des motivations différentes, nous nous sommes intéressés à des structures de bigèbre similaires sur des sous-algèbres de l'algèbre libre.

Motivation

Le but de ce chapitre est de présenter quelques généralisations des fonctions symétriques et quasi-symétriques. L'idée de départ est la suivante : on définit combinatoirement la fonction de Schur s_λ comme la somme des évaluations des tableaux de forme λ. Leur combinatoire repose essentiellement sur la correspondance de Robinson-Schensted, que l'on peut utiliser pour définir une structure multiplicative sur l'ensemble des tableaux. Cette structure a été nommée monoïde plaxique par Lascoux et Schützenberger. L'algèbre de ce monoïde appelée algèbre plaxique admet donc pour base les tableaux. On peut définir dans cette algèbre des éléments S_λ appelés fonctions de Schur plaxiques comme étant la somme de tous les tableaux de forme λ. La propriété fondamentale est que les fonctions de Schur plaxiques commutent. Elles engendrent par conséquent une sous algèbre commutative isomorphe à l'algèbre des fonctions symétriques $\mathrm{Sym}(x_1, \ldots, x_n)$.

Cette construction admet un analogue dans le cas quasi-symétrique, le rôle de l'algèbre plaxique étant joué par un quotient nommé algèbre hypoplaxique dont une base est formée par les quasi-rubans. Les fonctions quasi-rubans hypoplaxiques engendrent une sous algèbre commutative isomorphe à l'algèbre des fonctions quasi-symétriques.

D'autre part, les fonctions symétriques sont, par définition, invariantes par l'action du groupe symétrique. Il existe un relèvement naturel de cette action au niveau de l'algèbre libre, compatible avec les relations plaxiques. Les fonctions symétriques non commutatives apparaissent comme des polynômes non-commutatifs invariants par cette action.

On a montré précédemment que les fonctions quasi-symétriques sont également invariantes par une action du groupe symétrique. Il apparaît que cette action admet un relèvement naturel dans l'algèbre libre, également compatible avec les relations hypoplaxiques. Les polynômes non commutatifs invariants sous cette action forment une sous algèbre de l'algèbre libre. On va donc construire abstraitement cette algèbre puis en donner quelques bases qui relèvent les bases classiques des fonctions quasi-symétriques.

Nous allons commencer par rappeler quelques éléments de la théorie des algèbres de Hopf.

6.1 Préliminaires

6.1.1 Algèbres de Hopf des polynômes, de concaténation et de mélange

Nous commençons par décrire brièvement la structure d'algèbre de Hopf naturelle des polynômes : on considère $\mathbb{K}[X]$, l'algèbre des polynômes commutatifs en l'alphabet X. Soit δ l'unique morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$, tel que $\delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour toute variable $x \in X$. Par exemple,

$$\delta(x^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i} \quad \text{ou} \quad \delta\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \otimes \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}. \tag{6.1}$$

Soit ϵ la forme linéaire qui envoie un polynôme sur son terme constant. Et finalement, soit α l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini sur la composante homogène de degré d par $\alpha(f) = (-1)^d f$. Il est bien connu que $\mathbb{K}[X]$ muni de sa structure d'algèbre habituelle, du coproduit δ, de la co-unité ϵ et de l'antipode α est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative.

On désigne par X^* l'ensemble des mots sur l'alphabet X, le mot vide étant noté 1. Soit $\mathbb{K}\langle X\rangle$ l'espace vectoriel qui a pour base X^*. Il existe deux structures d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{K}\langle X\rangle$ duales l'une de l'autre : l'algèbre de concaténation et l'algèbre de mélange. Nous rappelons brièvement ces deux structures. On en trouvera une étude détaillée dans le livre de Reutenauer [72].

La concaténation de deux mots u et v, notée $\mathrm{conc}(u, v)$ ou plus simplement uv s'étend par linéarité à $\mathbb{K}\langle X\rangle$, on a ainsi une structure d'algèbre noncommutative appelée algèbre libre ou algèbre de concaténation. Le produit de mélange munit $\mathbb{K}\langle X\rangle$ d'une deuxième structure d'algèbre, commutative celle-ci.

On définit alors sur $\mathbb{K}\langle X\rangle$ les deux coproduits suivants :

$$\delta(w) = \sum_{u,v\in X^*} (w, u\sqcup\!\sqcup v)\; u\otimes v, \tag{6.2}$$

$$\delta'(w) = \sum_{u,v\in X^*} (w, uv)\; u\otimes v, \tag{6.3}$$

où $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ désigne le produit scalaire qui rend la famille des mots orthonormée. Soit ϵ la forme linéaire qui envoie un élément de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ sur sa coordonnée en le mot vide 1. Et finalement, soit $\alpha : \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle X\rangle$ l'endomorphisme qui envoie le mot $w = a_1 \dots a_n$, où les a_i sont des lettres de X, sur son miroir signé $\alpha(w) = (-1)^n a_n \dots a_1$. Alors $(\mathbb{K}\langle X\rangle, \mathrm{conc}, 1, \delta, \epsilon, \alpha)$ et $(\mathbb{K}\langle X\rangle, ш, 1, \delta', \epsilon, \alpha)$ sont deux algèbres de Hopf duales l'une de l'autre.

Note 6.1 On remarquera que ces deux algèbres sont isomorphes respectivement à **Sym** et à **QSym**. Elles en diffèrent seulement par la graduation (voir [66]).

6.1.2 Algèbre tensorielle d'une cogèbre

Soit $\mathcal{H}$ une cogèbre pour le coproduit δ et la co-unité ϵ. Soit $\mathcal{H}^+$ le noyau de la co-unité ϵ. Toutes les cogèbres considérées ici seront de la forme

$$\mathcal{H} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{H}^+.$$

Dans ce cas, ϵ et π sont les projecteurs associés à la somme directe. On rappelle que $m \in \mathcal{H}^+$ est équivalent à $\delta(m) = m\otimes 1 + 1\otimes m + \sum m'\otimes m''$ avec $m', m'' \in \mathcal{H}^+$. La propriété suivante est classique (on pourra par exemple en trouver une preuve dans [3]) :

Proposition 6.2 *Soit $\mathcal{H}$ une cogèbre de co-unité ϵ et de coproduit δ. On peut munir $\mathcal{H}^+ = \ker\epsilon$ d'une structure de cogèbre avec le coproduit $\underline{\delta}$ défini par*

$$\underline{\delta}(m) = \pi^{\otimes 2}\delta(m) = \delta(m) - m\otimes 1 - 1\otimes m. \tag{6.4}$$

De plus, si δ est cocommutatif il en est de même pour $\underline{\delta}$.

On va définir une structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre tensorielle $T(\mathcal{H}^+)$. Tout d'abord, le produit, noté μ, sera par définition le produit tensoriel. Il faut prendre garde au fait que, pour avoir l'unicité aux scalaires près de l'écriture $m = m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_p$, on doit supposer $m_i \in \mathcal{H}^+$. Dans ce cas, pour distinguer le produit de $T(\mathcal{H}^+)$ d'un produit tensoriel entre espaces, on remplacera $m_1 \otimes m_2$ par $m_1{\cdot}m_2$. Par convention, on réservera l'écriture $m = m_1{\cdot}m_2 \cdots m_p$ au cas où $m_i \in \mathcal{H}^+$. On dira que le tenseur est sous *forme normale*.

L'unité de l'algèbre est le tenseur vide qui sera identifié au scalaire 1.

Le coproduit $\mathbf{c}$ est défini comme suit. Supposons que $m = m_1{\cdot}m_2 \cdots m_p$ avec $m_i \in \mathcal{H}^+$. Notons $\delta(m_i) = \sum m_i' \otimes m_i''$. Alors, on pose

$$\mathbf{c}(m) = \sum \mu\left(m_1', m_2', \cdots, m_p'\right) \otimes \mu\left(m_1'', m_2'', \cdots, m_p''\right). \tag{6.5}$$

Par exemple, avec $\mathbb{K}[x,y]$, on a

$$\mathbf{c}(x^2{\cdot}y) = x^2{\cdot}y \otimes 1 + 2x{\cdot}y \otimes x + y \otimes x^2 + x^2 \otimes y + 2x \otimes x{\cdot}y + 1 \otimes x^2{\cdot}y.$$

Il est évident que si δ est cocommutatif alors $\mathbf{c}$ l'est aussi.

La co-unité est la coordonnée sur le tenseur vide :

$$\mathbf{e}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}(m_1{\cdot}m_2 \cdots m_p) = 0 \text{ pour } p > 0 \text{ et } m_i \in \mathcal{H}^+. \tag{6.6}$$

On définit par récurrence $\underline{\delta}^{p+1}(m) = (\underline{\delta}^p \otimes \mathrm{Id}) \circ \underline{\delta}$. Alors $\underline{\delta}^p = \pi^{\otimes p}\delta^p$. Supposons que, pour tout m de $\mathcal{H}^+$, il existe N tel que $\underline{\delta}^N(m) = 0$. On peut alors définir l'antipode $\mathbf{a}$ comme l'unique anti-automorphisme tel que

$$\mathbf{a}(m) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \mu^p \underline{\delta}^p(m) \quad \text{pour} \quad m \in \mathcal{H}^+. \tag{6.7}$$

En effet, sous l'hypothèse précédente la somme est finie. Par exemple :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(x^2{\cdot}x) =& x{\cdot}x^2y - x{\cdot}x^2{\cdot}y - x{\cdot}y{\cdot}x^2 - 2x{\cdot}xy{\cdot}x - 2x{\cdot}x{\cdot}xy + \\ & 2x{\cdot}x{\cdot}x{\cdot}y + 2x{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}x + 2x{\cdot}y{\cdot}x{\cdot}x.\end{aligned}$$

Note 6.3 Sous cette hypothèse, il est possible de définir une filtration sur $\mathcal{H}^+$ par $\mathcal{H}_n^+ = \ker \underline{\delta}^n$. Inversement, si $\mathcal{H}$ est une cogèbre filtrée connexe (*i.e.*, $\mathcal{H}_0 = \mathbb{K}$) alors $\mathcal{H}_n^+ \subset \ker \underline{\delta}^{n+1}$. Toutes les algèbres considérées dans la suite seront graduées et connexes.

Note 6.4 (Tenseurs et graduations) Dans la suite on va donc considérer les produits tensoriels $m_1{\cdot}m_2\cdots m_p$ avec $m_i \in \mathcal{H}^+$. Nous allons étendre naturellement la graduation de $\mathcal{H}$ à $T(\mathcal{H}^+)$ en posant

$$\deg(m_1{\cdot}m_2\cdots m_p) = \deg(m_1) + \deg(m_2) + \cdots + \deg(m_p). \tag{6.8}$$

Cette graduation est différente de la graduation habituelle de $T(V)$ selon laquelle le degré de $m_1{\cdot}m_2\cdots m_p$ est p (les éléments de V sont tous de degré 1). En accord avec les conventions de la combinatoire des mots, dans ce cas on parlera de *longueur* du tenseur que l'on notera

$$\ell(m_1{\cdot}m_2\cdots m_p) = p. \tag{6.9}$$

Théorème 6.5 *Soit $\mathcal{H}$ une cogèbre connexe de coproduit δ et de co-unité ϵ. Soit $\mathcal{H}^+ = \ker\epsilon$. L'algèbre $T(\mathcal{H}^+)$ munie du coproduit* $\mathbf{c}$*, de la co-unité* $\mathbf{e}$ *définie ci-dessus est une bigèbre. De plus, si pour tout m de $\mathcal{H}^+$ il existe un N tel que $\underline{\delta}^N(m) = 0$, l'antipode* $\mathbf{a}$ *défini comme ci-dessus fait de $T(\mathcal{H}^+)$ une algèbre de Hopf.*

Démonstration. Il est facile de voir que $T(\mathcal{H}^+)$ est une bigèbre. Montrons que $\mathbf{a}$ est l'antipode pour $T(\mathcal{H}^+)$. C'est-à-dire que

$$\mu \circ (\mathbf{a} \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathbf{c} = 1 \circ \mathbf{e}. \tag{6.10}$$

Le fait que $\mathbf{a}$ soit un anti-automorphisme implique que $\mathbf{a}(1) = 1$. On va commencer par vérifier l'égalité (6.10) sur les tenseurs de longueur 1. Soit donc $m \in \mathcal{H}^+$. On a alors $\mathbf{c}(m) = m \otimes 1 + 1 \otimes m + \underline{\delta}^2(m)$. La définition de $\mathbf{a}$ nous donne alors

$$(\mathbf{a} \otimes \mathrm{Id})\mathbf{c}(m) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \underline{\delta}^p(m) + 1 \otimes m + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (\underline{\delta}^p \otimes \mathrm{Id})\underline{\delta}^2(m) \tag{6.11}$$

Mais par coassociativité $(\underline{\delta}^p \otimes \mathrm{Id})\underline{\delta}^2 = \underline{\delta}^{p+1}$. Il s'ensuit

$$\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (\underline{\delta}^p \otimes \mathrm{Id})\underline{\delta}^2(m) = \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^{p-1} \underline{\delta}^p(m). \tag{6.12}$$

On en déduit finalement que $\mu(\mathbf{a} \otimes \mathrm{Id})\mathbf{c}(m) = 0$.

On peut maintenant faire le calcul sur tous les tenseurs de longueur quelconque. Supposons donc que $m = m_1 {\cdot} m_2 \cdots m_p$ avec $m_i \in \mathcal{H}^+$. Le coproduit de m s'écrit $\delta(m_i) = \sum m'_i \otimes m''_i$. Alors, par définition de $\mathbf{c}(m)$ et $\mathbf{a}$ on a

$$(\mathbf{a} \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathbf{c}(m) = \sum \mu(\mathbf{a}(m'_p), \cdots, \mathbf{a}(m'_2), \mathbf{a}(m'_1)) \otimes \mu(m''_1, m''_2, \cdots, m''_p) \tag{6.13}$$

En regroupant les termes du centre, par associativité de μ on trouve

$$\mu \circ (\mathbf{a} \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathbf{c}(m) = \sum \mu \left(\mathbf{a}(m'_p), \cdots, \mathbf{a}(m'_2), \mu\left(\sum \mathbf{a}(m'_1), m''_1\right), m''_2, \cdots, m''_p\right) \tag{6.14}$$

Le calcul sur les tenseurs de longueur 1 montre que $\sum \mathbf{e}(m'_1){\cdot} m''_1 = 0$. Par conséquent

$$\mu \circ (\mathbf{a} \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathbf{c}(m_1 {\cdot} m_2 \cdots m_p) = 0, \tag{6.15}$$

ce qui montre l'identité $\mu \circ (\mathbf{a} \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathbf{c} = 1 \circ \mathbf{e}$. On montre de même que $\mu \circ (\mathrm{Id} \otimes \mathbf{a}) \circ \mathbf{c} = 1 \circ \mathbf{e}$. Ainsi $T(\mathcal{H}^+)$ est une algèbre de Hopf. □

6.2 Algèbre quasi-symétrique matricielle

Nous allons définir cette algèbre comme l'algèbre des invariants dans une algèbre libre sous l'action quasi-symétrisante. Pour obtenir une algèbre de Hopf, il est nécessaire de considérer non pas l'algèbre libre sur X, mais l'algèbre libre sur l'alphabet dont les lettres sont les monômes sur X. Ceci revient à se placer dans l'algèbre tensorielle de $\mathbb{K}[X]$.

6.2.1 Algèbre de Hopf des multimots

Dans toute la suite de ce chapitre, l'alphabet X sera supposé totalement ordonné de cardinal n. On va donc s'intéresser à la construction précédente dans le cas $\mathcal{H} = \mathbb{K}[X]$. L'algèbre tensorielle de l'algèbre des polynômes sans terme constant $T(\mathbb{K}[X]^+)$ sera notée $\mathbb{K}\{X\}$.

Définition 6.6 *On appellera* multimots *les mots sur l'alphabet formé par les monômes sans constantes sur X c'est à dire les produits commutatifs non vides de lettres de X.*

On identifiera le multimot vide avec le scalaire 1. La proposition suivante est une conséquence immédiate de cette définition :

Proposition 6.7 *Les multimots forment une base de $\mathbb{K}\{X\}$.*

On appellera poly-multimots les éléments de $\mathbb{K}\{X\}$ qui sont donc des combinaisons linéaires de multimots.

On codera les multimots par des matrices à coefficients entiers de la manière suivante : les lignes sont indexées de haut en bas par les lettres de X. Par définition, un multimot m est de la forme $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_p$ avec $m_i \in \mathbb{K}[X]^+$. Le coefficient de la ligne a dans la colonne i est la puissance de la variable a dans le monôme m_i. On obtient ainsi une matrice à n lignes et p colonnes, sans colonne identiquement nulle. Une telle matrice sera dite *horizontalement tassée*. Par convention, le multimot vide correspond à la matrice vide $n \times 0$ notée $[\,]$.

Exemple 6.8 Plaçons nous sur l'alphabet $\{a < b < c < d < e\}$. Alors

$$a \cdot ab^3e^5 \cdot a^2d \quad \text{correspond à} \quad \begin{array}{c} \scriptstyle a \\ \scriptstyle b \\ \scriptstyle c \\ \scriptstyle d \\ \scriptstyle e \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avec cette notation les mots ordinaires correspondent aux matrices dont chaque colonne contient un seul 1, tout les autres coefficients étant nuls. Par exemple

$$a \cdot a \cdot b \cdot a \cdot e \cdot d \quad \text{correspond à} \quad \begin{array}{c} \scriptstyle a \\ \scriptstyle b \\ \scriptstyle c \\ \scriptstyle d \\ \scriptstyle e \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le produit des multimots correspond à la concaténation des matrices associées. D'après la construction de l'algèbre tensorielle d'une cogèbre (section 6.1.2), $\mathbb{K}\{X\}$ hérite donc de la structure de cogèbre de $\mathbb{K}[X]$ d'une structure d'algèbre de Hopf graduée, la graduation étant la graduation naturelle telle que le degré de $m_1 \cdots m_p$ soit la somme des degrés des m_i. Il se lit sur les matrices en faisant la somme des coefficients.

Note 6.9 Un multimot de $\mathbb{K}\{X\}$ est donc la concaténation de monômes de $\mathbb{K}[X]^+$, comme par exemple $x \cdot y^2 \cdot xy$. On peut alors coder chaque lettre de cette expression par la bilettre $\binom{i}{a}$ où i est sa position dans le produit tensoriel et a est la lettre elle même. On obtient ainsi un monôme commutatif en les bilettres. Le multimot ci-dessus se code $\binom{1}{x}\binom{2}{y}^2\binom{3}{x}\binom{3}{y}$. On reconnaît ici les bimots de Knuth [38]. L'algèbre considérée ici n'est autre que l'algèbre des bimots avec la généralisation naturelle du produit de concaténation.

Note 6.10 D'autre part, si $m = m_1 \cdots m_p$ est un multimot dont le degré est la composition $I = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$, on peut voir m comme une orbite de X^* sous l'action de $\mathfrak{S}_I = \mathfrak{S}_{i_1} \times \mathfrak{S}_{i_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{i_1}$.

Proposition 6.11

(i) $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *est la sous-algèbre de Hopf de* $\mathbb{K}\{X\}$ *engendrée par les lettres de l'alphabet* X.

(ii) Soit Eval : $\mathbb{K}\{X\} \to \mathbb{K}[X]$ *l'application qui envoie chaque multimot sur son image commutative :*

$$\mathrm{Eval}(1) = 1 \quad et \quad \mathrm{Eval}(m_1 \cdots m_p) = \prod_{i=1}^{p} m_i \tag{6.16}$$

Eval *est un morphisme surjectif d'algèbres de Hopf. C'est encore vrai si l'on considère la restriction de* Eval *a* $\mathbb{K}\langle X\rangle$.

Note 6.12 Dans le cas $X = \{x\}$ l'algèbre $\mathbb{K}\{X\}$ est isomorphe à l'algèbre libre sur $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ ou encore à l'algèbre des fonctions symétriques non-commutatives par le morphisme qui envoie $\frac{x^n}{n!}$ sur la fonction complète S_n.

6.2.2 Algèbre quasi-symétrique matricielle

Nous généralisons aux multimots les notions de support et d'exposant :

Définition 6.13 *Soit m un multimot. L'ensemble des variables qui apparaissent dans m avec un exposant non nul est appelé* support de m. *Il est égal au support de* Eval(m).

Définition 6.14 *Supposons que m soit un multimot de support s. Soit p le cardinal du support de m. On appelle* exposant *de m la matrice de hauteur p, obtenue en supprimant les lignes identiquement nulles dans la matrice associée à m. On dira d'une telle matrice qu'elle est* tassée.

On notera indifféremment le monôme m par $m_1 \cdot m_2 \cdots m_p$ ou s^M. Par exemple,

$$a \cdot ab^3e^5 \cdot a^2d = \{a < b < d < e\}^M \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrices tassées sont en quelque sorte des compositions planes, de la même manière que les partitions se généralisent en partitions planes.

Par analogie avec les fonctions quasi-symétriques :

Définition 6.15 *Soit X un alphabet totalement ordonné de cardinal n. On appelle algèbre quasi-symétrique matricielle et on note* $\mathbf{MQSym}^{(n)}$ *la sous algèbre de $\mathbb{K}\{X\}$ formée par les combinaisons linéaires de multimots telle que, pour toute matrice tassée M, le coefficient de A^M soit indépendant de $A \in \mathcal{P}_k(X)$, où k est la hauteur de la matrice M.*

Cela revient à dire que les multimots correspondants aux matrices B de hauteur n obtenues en insérant des lignes de 0 dans A ont même coefficient.

Note 6.16 (action quasi-symétrisante)
Comme dans le cas des polynômes quasi-symétriques on peut recoder cette définition au moyen d'une action du groupe symétrique :

$$\boldsymbol{\sigma}(A^M) = (\sigma\, A)^M \tag{6.17}$$

Il est facile de voir que $\mathbf{MQSym}^{(n)}$ est bien l'ensemble des invariants par cette action. On a de plus la propriété suivante qui montre que c'est un relèvement de l'action quasi-symétrisante : pour toute permutation σ, les diagrammes suivants commutent,

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{K}[X] & \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_\sigma} & \mathbb{K}[X] & \qquad & \mathbb{K}[X] & \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_\sigma} & \mathbb{K}[X] \\
\Big\uparrow{\scriptstyle *^N} & & \Big\uparrow{\scriptstyle *^N} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta^N} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta^N} \\
\mathbb{K}[X]^{\otimes N} & \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_\sigma} & \mathbb{K}[X]^{\otimes N} & & \mathbb{K}[X]^{\otimes N} & \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_\sigma} & \mathbb{K}[X]^{\otimes N}
\end{array} \tag{6.18}$$

ou $*$ et Δ désignent respectivement les produit et coproduit de l'anneau des polynômes. On remarque que cette propriété n'est pas vraie pour l'action diagonale : $\sigma(m_1 \cdots m_N) = (\boldsymbol{\sigma}\, m_1) \cdots (\boldsymbol{\sigma}\, m_N)$.

Par analogie avec les polynômes quasi-monomiaux, la famille des *quasi-multimots* définie par

$$\mathbf{MS}_M = \sum_{A \in \mathcal{P}_k(X)} A^M, \tag{6.19}$$

indexée par les matrices tassées de hauteur au plus égale à n, est une base de $\mathbf{MQSym}^{(n)}$. L'élément $\mathbf{MS}_M$ est donc la somme des multimots correspondants aux matrices B de hauteur n obtenues en insérant des lignes de 0 dans M.

Exemple 6.17 Plaçons nous sur l'alphabet $\{a < b < c < d\}$. Alors

$$\mathbf{MS}_{\begin{bmatrix} 1&1&2\\0&3&0\\0&0&1 \end{bmatrix}} = \begin{array}{c} a\\b\\c\\d \end{array}\!\begin{bmatrix} 1&1&2\\0&3&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{array}{c} a\\b\\c\\d \end{array}\!\begin{bmatrix} 1&1&2\\0&3&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix} + \begin{array}{c} a\\b\\c\\d \end{array}\!\begin{bmatrix} 1&1&2\\0&0&0\\0&3&0\\0&0&1 \end{bmatrix} + \begin{array}{c} a\\b\\c\\d \end{array}\!\begin{bmatrix} 0&0&0\\1&1&2\\0&3&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$$

Décrivons la structure d'algèbre de $\mathbf{MQSym}^{(n)}$ dans cette base.

Définition 6.18 *Soit P et Q deux matrices tassées de hauteur p et q. On appelle* mélange augmenté des lignes *de P et Q l'ensemble de matrices défini de la manière suivante : Soit r un nombre compris entre $\max(p,q)$ et $p+q$. On insère des lignes de 0 à l'intérieur des matrices p et q de manière à obtenir deux matrices P' et Q' de hauteur r. Soit R la matrice obtenue en collant P' à la droite de Q'. L'ensemble $\Cup(P,Q)$ est alors l'ensemble des matrices R sans lignes nulles obtenues par cette construction. Il est noté $\Cup(P,Q)$.*

Le mélange simple $\sqcup\!\sqcup(P,Q)$ *est l'ensemble des matrices de $\Cup(P,Q)$ qui sont exactement de hauteur $p+q$. C'est à dire que l'on a jamais collé une ligne de P en face d'une ligne de Q.*

Par exemple le mélange augmenté des matrices $\begin{bmatrix} 2&1\\1&0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 3&1\end{bmatrix}$ est l'ensemble des 5 matrices

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&3&1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2&1&0&0\\1&0&3&1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2&1&0&0\\0&0&3&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2&1&3&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&0&3&1\\2&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} \right\}.$$

Le mélange simple est donc l'ensemble

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&3&1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2&1&0&0\\0&0&3&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&0&3&1\\2&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} \right\}.$$

Proposition 6.19 *Soit P et Q deux matrices tassées de hauteur p et q. Le produit de $\mathbf{MS}_M$ par $\mathbf{MS}_Q$ se décompose de la manière suivante :*

$$\mathbf{MS}_P\mathbf{MS}_Q = \sum_{R\in \Cup_n(P,Q)} \mathbf{MS}_R \tag{6.20}$$

où R décrit l'ensemble des matrices de $\Cup(P,Q)$ de hauteur inférieure ou égale à n.

Par exemple :

$$\mathbf{MS}_{\begin{bmatrix} 2&1\\1&0\end{bmatrix}}\mathbf{MS}_{\begin{bmatrix} 3&1\end{bmatrix}} =$$
$$\mathbf{MS}_{\begin{bmatrix} 2&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&3&1\end{bmatrix}} + \mathbf{MS}_{\begin{bmatrix} 2&1&0&0\\1&0&3&1\end{bmatrix}} + \mathbf{MS}_{\begin{bmatrix} 2&1&0&0\\0&0&3&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}} + \mathbf{MS}_{\begin{bmatrix} 2&1&3&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}} + \mathbf{MS}_{\begin{bmatrix} 0&0&3&1\\2&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}}$$

Comme on va le voir, c'est un relèvement du produit des polynômes quasi-symétriques M_I. On verra plus loin une autre base correspondant aux produits de sommes de puissances dans laquelle le produit s'exprime par le mélange simple.

Comme dans le cas classique, les restrictions $\rho_{u>v}$ de $\mathbf{MQSym}^{(u)}$ dans $\mathbf{MQSym}^{(v)}$ définies par

$$\rho_{u>v}(m) = m(x_1, x_2, \ldots, x_v, 0, 0 \ldots, 0) \tag{6.21}$$

sont des surjections compatibles entre elles (*i.e.*, $\rho_{u>w} = \rho_{u>v} \circ \rho_{v>w}$). On peut donc prendre la limite projective dans la catégorie des algèbres graduées et faire tendre n vers l'infini. L'algèbre **MQSym** ainsi obtenue sera appellée algèbre quasi-symétrique matricielle. Ses éléments sont donc les sommes formelles quasi-symétriques, de degré fini, de multimots sur un alphabet infini.

6.2.3 Dualité

On cherche ici à définir un coproduit sur **MQSym**. La technique utilisée est la même que pour les fonctions symétriques ou quasi-symétriques.

Soit $Y = \{y_1 < y_2 < \cdots\}$ un deuxième alphabet. Pour définir le coproduit sur **QSym**, on considère les fonctions quasi-symétriques en l'alphabet $X \sqcup Y$ (somme ordinale de X et de Y : c'est-à-dire l'union de X et de Y où les variables de X sont plus petites que les variables de Y). Soit $f \in \mathbf{QSym}(X)$; le quasi-symétrisé de f sur l'alphabet $X \sqcup Y$ s'écrit

$$f = \sum_i f^{(i)}(X) g^{(i)}(Y) \tag{6.22}$$

où i décrit un ensemble fini. On définit alors un coproduit Δ sur **QSym** par

$$\Delta(f) = \sum_i f^{(i)} \otimes g^{(i)}. \tag{6.23}$$

On vérifie que $\Delta(f)$ ne dépend pas de l'expression (6.22) du quasi-symétrisé choisie.

Par analogie on pose :

Définition 6.20 *Soit $X \subset Y$ deux alphabets ordonnés. On appelle quasi-symétrisé de $f \in \mathbf{MQSym}(X)$ l'image de f par le morphisme d'algèbres qui envoie $\mathbf{MS}_A(X)$ sur $\mathbf{MS}_A(Y)$.*

Le fait que ce soit un morphisme d'algèbres injectif résulte de la règle de produit des multimonômes $\mathbf{MS}_A$.

On définit alors de même sur **MQSym** un coproduit Δ. Toute fonction $f(X) = f_1 \cdot f_2 \cdots f_N \in \mathbf{MQSym}(X)$ s'étend de manière unique à une fonction de $f(X \sqcup Y) \in \mathbf{MQSym}(X \sqcup Y)$:

$$f(X \sqcup Y) = \sum_i f_1^{(i)}(X) g_1^{(i)}(Y) \cdot f_2^{(i)}(X) g_2^{(i)}(Y) \cdots f_p^{(i)}(X) g_p^{(i)}(Y) \tag{6.24}$$

et on pose alors

$$\Delta(f) = \sum_i \left(f_1^{(i)} \cdot f_2^{(i)} \cdots f_p^{(i)}\right) \bigotimes \left(g_1^{(i)} \cdot g_2^{(i)} \ldots g_p^{(i)}\right). \tag{6.25}$$

Dans la base **MS** le coproduit se calcule de la manière suivante : Soit A une matrice tassée de hauteur k. On coupe horizontalement A en deux à une hauteur $0 \leq i \leq k$. Soit $A^{\underline{i}}$ le tassé horizontal de la partie supérieure et $A_{\overline{k-i}}$ le tassé de la partie inférieure. On a alors :

$$\Delta(\mathbf{MS}_A) = \sum_{0 \leq i \leq k} \mathbf{MS}_{A^{\underline{i}}} \otimes \mathbf{MS}_{A_{\overline{k-i}}}. \tag{6.26}$$

Exemple 6.21 Soit $A = \begin{bmatrix} 1&0&3 \\ 0&2&1 \\ 0&0&3 \\ 1&0&2 \end{bmatrix}$ On a alors :

i	0	1	2	3	4
A_i	$\begin{bmatrix} \hline 1&0&3 \\ 0&2&1 \\ 0&0&3 \\ 1&0&2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&3 \\ \hline 0&2&1 \\ 0&0&3 \\ 1&0&2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&3 \\ 0&2&1 \\ \hline 0&0&3 \\ 1&0&2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&3 \\ 0&2&1 \\ 0&0&3 \\ \hline 1&0&2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&3 \\ 0&2&1 \\ 0&0&3 \\ 1&0&2 \\ \hline \end{bmatrix}$
$A^{\underline{i}}$	$[\,]$	$\begin{bmatrix} 1&3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&3 \\ 0&2&1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&3 \\ 0&2&1 \\ 0&0&3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&3 \\ 0&2&1 \\ 0&0&3 \\ 1&0&2 \end{bmatrix}$
$A_{\overline{k-i}}$	$\begin{bmatrix} 1&0&3 \\ 0&2&1 \\ 0&0&3 \\ 1&0&2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&2&1 \\ 0&0&3 \\ 1&0&2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&3 \\ 1&2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&2 \end{bmatrix}$	$[\,]$

Soit alors $\mathbf{e}$ la forme linéaire qui envoie f sur sa coordonnée sur $1 = [\,]$.

Théorème 6.22 $(\mathbf{MQSym}, \mu, 1, \Delta, \mathbf{e})$ *est une bigèbre graduée autoduale, le crochet de dualité étant donné par*

$$\langle \mathbf{MS}_A, \mathbf{MS}_B \rangle = \delta_{A,{}^tB}, \tag{6.27}$$

où ${}^tB$ *désigne la transposée de la matrice* B *et* δ *le symbole de Kronecker.*

La graduation est celle des multimots. Le multimonôme $\mathbf{MS}_A$ a donc pour degré la somme des coefficients de la matrice A.

Démonstration. Par construction, **MQSym** hérite de $\mathbb{K}\{X\}$ d'une structure d'algèbre graduée. La structure de bigèbre résulte d'arguments classiques, par exemple on montre la coassociativité en remarquant que la somme ordonnée d'alphabets est associative :

$$(X \sqcup Y) \sqcup Z = X \sqcup (Y \sqcup Z). \tag{6.28}$$

Ici X, Y et Z désignent trois alphabets ordonnés de même cardinal.

On vérifie facilement que $\mathbf{e}$ est bien co-unité pour Δ. En effet le calcul de $(1 \otimes \mathbf{e})(\Delta(f))$ consiste à annuler toutes les variables de Y dans la somme (6.24). Il reste donc $f(X)$. On a donc bien une structure de cogèbre. Montrons que les structures d'algèbre et de cogèbre sont compatibles. L'opération qui consiste à quasi-symétriser une fonction $f(X)$ pour obtenir une fonction sur l'alphabet $X \sqcup Y$ est un morphisme de $\mathbf{MQSym}(X)$ dans $\mathbf{MQSym}(X \sqcup Y)$, ce qui s'écrit

$$f(X \sqcup Y) f'(X \sqcup Y) = (f \cdot f')(X \sqcup Y). \tag{6.29}$$

On en déduit donc que $\Delta(f)\Delta(f') = \Delta(ff')$, ou encore $\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ \Delta$. De plus on voit facilement que toutes ces opérations sont graduées.

Le crochet de dualité n'est pas dégénéré. En effet, f est un élément de **MQSym** on peut l'écrire comme combinaison linéaire finie de la forme :

$$f = \sum_A f_A \, \mathbf{MS}_A. \tag{6.30}$$

On a alors

$$f = \sum_A \langle f, \mathbf{MS}_{{}^tA} \rangle \mathbf{MS}_A. \tag{6.31}$$

Donc si $\langle f, \mathbf{MS}_{{}^tA} \rangle = 0$ pour toute matrice tassée A alors f est nulle. Remarquons qu'il existe des vecteurs isotropes pour $\langle\ ,\ \rangle$.

Il reste donc à montrer la dualité, c'est à dire que le coefficient de $\mathbf{MS}_C$ dans $\mathbf{MS}_A \cdot \mathbf{MS}_B$ est le même que le coefficient de $\mathbf{MS}_{{}^tA} \otimes \mathbf{MS}_{{}^tB}$ dans $\Delta(\mathbf{MS}_{{}^tC})$. Remarquons tout d'abord qu'il n'y a jamais de multiplicités. Or, $\mathbf{MS}_C$ apparaît dans $\mathbf{MS}_A \cdot \mathbf{MS}_B$ si on peut obtenir C en insérant des lignes de zéros dans A et B et en collant les deux matrices obtenues. C'est-à-dire si l'on peut couper verticalement $C = (C_1 C_2)$ de telle manière que les tassées verticales de C_1 et C_2 soit respectivement A et B. C'est exactement, après transposition, la règle de coproduit de $\mathbf{MS}_{{}^tC}$. D'où le théorème. $\square$

6.3 Matrices d'entiers et ordres de raffinement

Le plupart des changements de bases de **QSym** s'exprime au moyen de l'ordre de raffinement des compositions. Dans cette section, nous allons définir une construction analogue sur les matrices d'entiers. Au passage on trouvera une expression de la série génératrice des dimensions des composantes homogènes de **MQSym** qui sera utile plus tard.

Les lignes d'une matrice d'entiers seront toujours lues dans l'ordre usuel, c'est-à-dire de haut en bas, de même les colonnes seront lues de gauche à droite.

Définition 6.23 *Soit A une matrice tassée de dimension $p \times q$ formée des lignes $L_1, L_2, \ldots, L_p$. Considérons une entrée x non nulle à l'intersection de la colonne c et de la ligne l. On appelle* pas de raffinement vertical *en x, l'opération consistant à casser la l-ème ligne de la matrice A en deux lignes K et K', les cases apparaissant à droite de x dans A étant placées dans la ligne du haut K , celles apparaissant à gauche dans la ligne du bas K'. L'entrée x elle même est coupée entre les deux lignes. Plus formellement, on obtient ainsi une matrice B formée des lignes $L_1, \ldots L_{l-1}, K, K', L_{l+1}, L_p$, telle que*

(i) *la ligne L_l est égale à $(k_1 + k'_1, k_2 + k'_2, \ldots, k_q + k'_q)$,*

(ii) *$k_i = 0$, pour tout $i > c$,*

(iii) *$k'_i = 0$, pour tout $i < c$.*

(iv) *aucune des deux lignes K et K' n'est nulle.*

On définit de même par transposition les pas de raffinement horizontaux.

Par exemple, les couples

$$\left(\begin{bmatrix} 2&1&0&0\\ 2&0&3&1\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2&1&0&0\\ 2&0&2&\cdot\\ \cdot&\cdot&1&1\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{bmatrix} 2&1&0\\ 2&5&1\\ 1&1&0\\ 2&2&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2&1&\cdot&0\\ 2&2&3&1\\ 1&\cdot&1&0\\ 2&\cdot&2&1 \end{bmatrix}\right)$$

sont des pas de raffinement respectivement vertical et horizontal. On a remplacé les zéros correspondant aux conditions (ii) et (iii) par des points. Dans le premier cas, on a $c = 3$, $l = 2$, $K = (2\ 0\ 2\ 0)$, et $K' = (0\ 0\ 1\ 1)$. En revanche, le couple

$$\left(\begin{bmatrix} 2&1&0&0\\ 3&0&3&1\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2&1&0&0\\ 2&0&2&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}\right)$$

n'est pas un pas de raffinement horizontal, il n'y a pas de c vérifiant les conditions (ii) et (iii).

On définit trois ordres de raffinement sur les matrices :

Définition 6.24 *La matrice A sera dite* verticalement plus fine, (*resp.* horizontalement plus fine, plus fine) *que B si on peut passer de B à A par des pas de raffinement vertical (resp. horizontal, vertical ou horizontal). On notera alors $A \succcurlyeq_{\text{Vert}} B$, (resp. $A \succcurlyeq_{\text{Hor}} B$, $A \succcurlyeq B$).*

Proposition 6.25 *Les relations $\succcurlyeq_{\text{Vert}}$, $\succcurlyeq_{\text{Hor}}$ et $\succcurlyeq$ sont des relations d'ordre partiel sur l'ensemble des matrices tassées.*

Si A est une matrice tassée on note $\Sigma_{\text{Lig}}(A)$ la composition obtenue en faisant la somme des lignes de A. De même $\Sigma_{\text{Col}}(A)$ désignera la somme des colonnes de A.

La proposition précédente est une conséquence facile du lemme suivant :

Lemme 6.26 *Soit A et B deux matrices tassées.*

Alors $A \succcurlyeq_{\text{Vert}} B$ implique $\Sigma_{\text{Lig}}(A) \succeq \Sigma_{\text{Lig}}(B)$. De plus, il y a égalité entre $\Sigma_{\text{Lig}}(A)$ et $\Sigma_{\text{Lig}}(B)$ si et seulement si $A = B$.

Démonstration. On vérifie facilement l'implication sur les pas élémentaires. Or $\succeq$ est une relation d'ordre sur les compositions. Donc, s'il y a égalité entre $\Sigma_{\text{Lig}}(A)$ et $\Sigma_{\text{Lig}}(B)$ il y a nécessairement égalité à chaque pas de raffinement quand on passe de A à B, ce qui n'est pas possible. Il n'y a donc aucun pas, et les matrices A et B sont égales. □

Bien sûr, par transposition on a un lemme analogue pour la relation $\succcurlyeq_{\text{Hor}}$ et la somme ligne Σ_{Col}. On montre de même que $A \succcurlyeq B$ implique $\Sigma_{\text{Lig}}(A) \succeq \Sigma_{\text{Lig}}(B)$ et $\Sigma_{\text{Col}}(A) \succeq \Sigma_{\text{Col}}(B)$. L'égalité entre les deux couples de compositions implique l'égalité entre les matrices. La figure 6.3 montre le diagramme de Hasse de $\succcurlyeq$.

Le but de ce qui suit est de montrer le théorème suivant :

Théorème 6.27 *Il y a une bijection entre*

- *l'ensemble des matrices tassées de somme totale n.*
- *l'ensemble des triplets (σ, I, J) où σ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et I, J sont deux compositions de n telles que*

$$I \succeq \text{Des}(\sigma^{-1}) \quad et \quad J \succeq \text{Des}(\sigma). \tag{6.32}$$

Définition 6.28 *Soit A une matrice tassée. Il existe une unique matrice de permutation S comparable avec A pour la relation $\succcurlyeq$. La permutation associée à cette matrice sera appelée standardisée de A. Elle sera notée* Std(A).

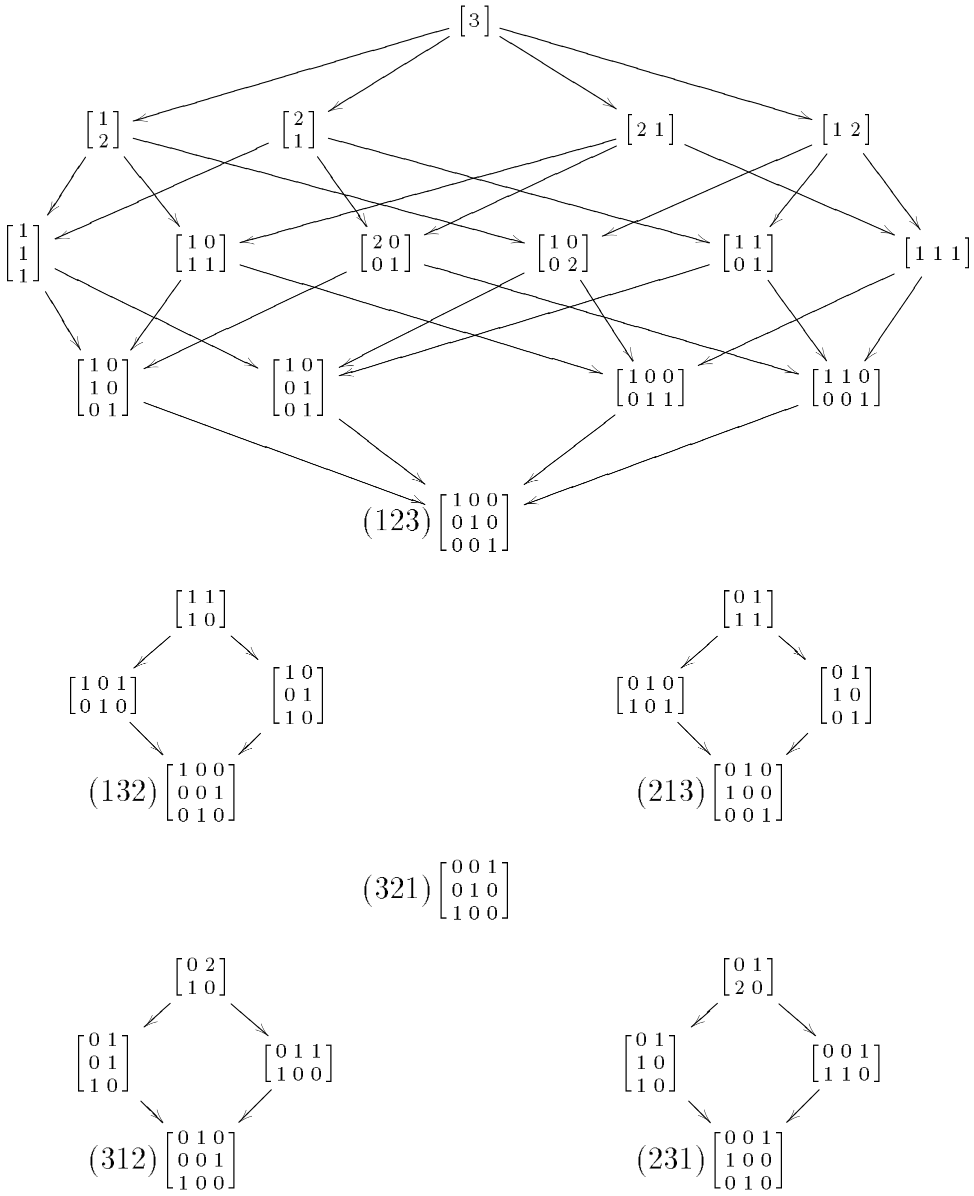


FIG. 6.1 : Diagramme de Hasse de $\succcurlyeq$ sur les matrices de degré 3.

Démonstration. Considérons une matrice A. Pour que l'on ne puisse pas raffiner A, il faut qu'il y ait exactement un 1 et un seul par ligne et par colonne. Les éléments maximaux pour $\succcurlyeq$ sont donc exactement les matrices de permutations. D'où l'existence.

L'unicité résulte du lemme suivant qui se vérifie facilement en considerant les deux directions de raffinement possibles :

Lemme 6.29 *Soient A, et $B \neq B'$ trois matrices tassées telles que (A, B) et (A, B') soient des pas de raffinement. Alors il existe une matrice tassée C telle que (B, C) et (B', C) sont des pas de raffinement.*

On dit que le système de réécriture associé au raffinement est fortement confluent. La matrice C ainsi obtenue est unique, mais on n'en a pas besoin dans la suite de la preuve.

Supposons donc que A soit une matrice comparable à deux matrices de permutations différentes S et S'. Soit alors M une matrice maximale telle que

$$M \succeq A, \qquad S \succeq M \qquad \text{et} \qquad S' \succeq M. \tag{6.33}$$

On peut donc trouver deux suites de raffinement

$$M = M_0, M_1, \ldots, M_u = S \quad \text{et} \quad M = M'_0, M'_1, \ldots, M'_v = S' \tag{6.34}$$

En appliquant le lemme précédent à M, M_1 et M'_1 on trouve une matrice N_1 telle que

$$N_1 \succeq M_1 \quad \text{et} \quad N_1 \succeq M'_1. \tag{6.35}$$

De proche en proche, on construit alors une matrice N_i telle que

$$N_i \succeq M_i \quad \text{et} \quad N_i \succeq M'_1. \tag{6.36}$$

Pour $i = u$, on trouve N_u une matrice plus fine que la matrice de permutation S, ce qui est absurde. On a donc montré l'unicité. □

Sur la figure 6.3, la permutation apparaît à côté de la matrice correspondante. Dans le cas où la matrice A est la matrice d'un mot (c'est à dire qu'il y a exactement un 1 par colonne), cette notion de standardisation coïncide avec la notion habituelle.

La preuve précédente donne un algorithme pour calculer la standardisée d'une matrice donnée A. Il suffit en effet de partir de A et d'appliquer à chaque fois un pas élémentaire, jusqu'à ce que ce ne soit plus possible. Le résultat final est alors une matrice de permutation indépendante des pas élémentaires choisis à chaque étape.

Lemme 6.30 *Soit A une matrice tassée et $\sigma = \mathrm{Std}(A)$. On a alors*

$$\Sigma_{\mathrm{Lig}}(A) \succeq \mathrm{Des}(\sigma^{-1}) \quad \textit{et} \quad \Sigma_{\mathrm{Col}}(A) \succeq \mathrm{Des}(\sigma). \tag{6.37}$$

Démonstration. Montrons la première inégalité. Supposons donc que σ^{-1} soit une permutation ayant une descente en position i. Soit S la matrice associée à σ. Le 1 sur la i-ème ligne de S est donc au dessus et à droite de celui de la $i+1$-ème ligne. Lors des ajouts de lignes et de colonnes par des pas élémentaires, la règle de regroupement des lignes et colonnes interdit qu'il se retrouve sur la même ligne ou la même colonne. Il est donc impossible d'ajouter des lignes au dessus de la i-ème ligne avec des lignes au dessous de la $i+1$-ème ligne. Ceci montre que i est une descente de $\Sigma_{\mathrm{Lig}}(A)$. □

Revenons à la démonstration du théorème :

Démonstration. A chaque matrice tassée A on peut donc associer le triplet $\phi(A) = (\sigma, I, J)$ défini par

$$\sigma = \mathrm{Std}(A), \quad I = \Sigma_{\mathrm{Lig}}(A) \quad \text{et} \quad J = \Sigma_{\mathrm{Col}}(A). \tag{6.38}$$

Réciproquement soit (σ, I, J) un triplet qui vérifie (6.32). Soit S la matrice associée à σ. L'argument du lemme précédent montre que l'on ne fait pas de regroupement interdit en ajoutant les lignes et les colonnes de S pour avoir une matrice A telle que $I = \Sigma_{\mathrm{Lig}}(A)$, $J = \Sigma_{\mathrm{Col}}(A)$. Il existe donc une matrice comparable à S qui vérifie (6.38). Or d'après le lemme 6.26, une telle matrice est unique et ϕ est donc une bijection. Ceci termine la preuve du théorème. □

Notation 6.31 *Soient σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et I, J deux compositions de n telles que $I \succeq \mathrm{Des}(\sigma^{-1})$ et $J \succeq \mathrm{Des}(\sigma)$. On notera* $\mathrm{Mat}(\sigma, I, J)$ *l'unique matrice tassée A telle que*

$$\mathrm{Std}(A) = \sigma, \quad \Sigma_{\mathrm{Lig}}(A) = I \quad \textit{et} \quad \Sigma_{\mathrm{Col}}(A) = J. \tag{6.39}$$

Le théorème 6.27 a pour conséquences les deux corollaires suivants.

Corollaire 6.32 *Soit A et B deux matrices tassées. Alors $A \succcurlyeq B$ si et seulement si*

$$\mathrm{Std}(A) = \mathrm{Std}(B), \quad \Sigma_{\mathrm{Col}}(A) \succeq \Sigma_{\mathrm{Col}} B \quad \textit{et} \quad \Sigma_{\mathrm{Lig}}(A) \succeq \Sigma_{\mathrm{Lig}} B. \tag{6.40}$$

Corollaire 6.33 *Le treillis des matrices dont la standardisée est la permutation σ admet pour plus petit élément la matrice A définie par*

$$A = \mathrm{Mat}(\sigma, \mathrm{Des}(\sigma^{-1}), \mathrm{Des}(\sigma)) \quad \textit{où} \quad \sigma = \mathrm{Std}(A). \tag{6.41}$$

Considérons par exemple la permutation $\sigma = 3156274$. Alors $\sigma^{-1} = 2517346$, d'où $\mathrm{Des}(\sigma) = (1321)$ et $\mathrm{Des}(\sigma^{-1}) = (223)$. Le treillis des matrices de standardisée σ a donc $2^{(7-4+7-3)} = 128$ éléments. Les éléments minimaux et maximaux sont les matrices :

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \\ 0&2&1&0 \end{bmatrix} \tag{6.42}$$

Note 6.34 Soit A une matrice tassée de somme par colonnes I et de somme par lignes J. On peut interpréter A comme une double classe de $\mathfrak{S}_I \backslash \mathfrak{S}_n / \mathfrak{S}_J$. La standardisée de A est alors l'unique permutation de la classe qui n'a pas de descentes autres que celles de J et qui n'a pas de reculs en dehors des descentes de I. C'est donc la permutation la plus courte de cette classe.

Enfin, le corollaire suivant donne une expression des dimensions des composantes homogènes de **MQSym**.

Corollaire 6.35 *La dimension de la composante homogène* $\mathbf{MQSym}_d$ *de degré d de* **MQSym** *est donnée par*

$$\dim(\mathbf{MQSym}_d) = \sum_{|I|=d,|J|=d} 2^{2d-\ell(I)-\ell(J)} \langle r_I, r_J \rangle , \tag{6.43}$$

où r_I désigne la fonction de Schur ruban commutative.

Démonstration. D'après Gessel [24], le nombre de permutations σ telles que

$$\mathrm{Des}(\sigma^{-1}) = I \quad \text{et} \quad \mathrm{Des}(\sigma) = J \tag{6.44}$$

est donné par le produit scalaire des fonctions de Schur rubans $\langle r_I, r_J \rangle$ (Elles sont notées S_I dans son article). Or, si I est une composition de n le nombre de compositions plus fines que I est $2^{n-\ell(I)}$. Ceci montre le corollaire. □

6.4 Changement de bases, quotients et sous algèbres

Le but de ce qui suit est de décrire plus précisément les liens entre **MQSym** et quelques autres algèbres. On va commencer par voir comment remonter à **MQSym** les autres bases usuelles de **Sym** et **QSym**.

6.4.1 MQSym, QSym et Sym

On note $\mathrm{H}(A)$ et $\mathrm{L}(A)$ la hauteur et la largeur d'une matrice tassée. On étend naturellement aux multimots la notion de standardisé. La somme par lignes de la matrice associée à un multimot m, vu comme un monôme sur X, est l'image commutative de ce multimot. On gardera donc la notation $\mathrm{Eval}(m)$.

Des règles de multiplication et de coproduit de $\mathbf{MS}_A$, on déduit :

Proposition 6.36 *L'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{Eval}\ :\ \mathbf{MQSym} &\longrightarrow \mathbf{QSym} \\ \mathbf{MS}_A &\longmapsto M_{\Sigma_{\mathrm{Lig}}(A)} \end{aligned} \tag{6.45}$$

est un morphisme de bigèbres surjectif. Par transposition, l'application

$$\begin{aligned} {}^t\,\mathrm{Eval}\ :\quad \mathbf{Sym} &\longrightarrow \mathbf{MQSym} \\ S^I &\longmapsto \sum_{A,\ \Sigma_{\mathrm{Col}}(A)=I} \mathbf{MS}_A \end{aligned} \tag{6.46}$$

est un morphisme de bigèbres injectif.

QSym apparaît donc comme un quotient de **MQSym** et **Sym** comme une sous-algèbre.

En utilisant l'ordre de raffinement des matrices il est possible de construire de nombreuses bases de **MQSym**, qui relèvent les bases des fonctions quasi-symétriques et des fonctions symétriques non-commutatives. Donnons par exemple la définition d'une base $\{\mathbf{FR}_A\}$ qui relève les bases des fonctions quasi-rubans et Schur rubans : Il est facile de voir que la famille

$$\mathbf{FR}_A = \sum_{B,\ B \succcurlyeq_{\mathrm{Vert}} A,\ A \succcurlyeq_{\mathrm{Hor}} B} (-1)^{\mathrm{L}(A)-\mathrm{L}(B)} \mathbf{MS}_B \tag{6.47}$$

est une base de **MQSym**. En effet, $(-1)^{\ell(I)-\ell(J)}$ est la fonction de Moebius de l'ordre de raffinement des compositions. On a donc

$$\mathbf{MS}_B = \sum_{A,\ A \succcurlyeq_{\mathrm{Vert}} B,\ B \succcurlyeq_{\mathrm{Hor}} A} (-1)^{\mathrm{H}(A)-\mathrm{H}(B)} \mathbf{FR}_A \tag{6.48}$$

ce qui montre que $\mathbf{FR}_A$ est une base. D'après la propriété précédente, on a :

$$\mathrm{Eval}(\mathbf{FR}_A) = F_{\Sigma_{\mathrm{Lig}}(A)} \quad \text{et} \quad {}^t\,\mathrm{Eval}(R_I) = \sum_{A,\ \Sigma_{\mathrm{Col}}(A)=I} \mathbf{FR}_A. \tag{6.49}$$

On verra un autre exemple de changement de base dans la sous-section 6.4.3.

6.4.2 Fonctions quasi-symétriques libres

Il existe d'autres sous-algèbres intéressantes de **MQSym**. En effet, cette dernière est elle-même une sous algèbre de l'algèbre des multimots $\mathbb{K}\{X\}$ qui contient naturellement l'algèbre libre $\mathbb{K}\langle X\rangle$ (algèbre des mots). On peut donc considérer l'ensemble des éléments de l'algèbre libre qui sont quasi-symétriques. Ils forment alors une sous-bigèbre de **MQSym**. On peut la voir comme la sous algèbre de **MQSym** engendrée par les $\mathbf{MS}_A$ où A est une matrice associée à un mot, c'est à dire une matrice dont chaque colonne ne contient que des 0 et un seul 1. Elle admet à son tour une autre sous-algèbre :

Définition 6.37 *Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. On définit dans l'algèbre libre $\mathbb{C}\langle X\rangle$ la* fonction quasi-ruban libre *indexée par σ par :*

$$\mathbb{F}_\sigma = \sum_{\mathrm{Std}(w)=\sigma^{-1}} w. \tag{6.50}$$

C'est à dire avec nos notations :

$$\mathbb{F}_A = \sum_{B,\ B \succcurlyeq_{\mathrm{Vert}} A,\ \Sigma_{\mathrm{Col}}(A)=\Sigma_{\mathrm{Col}}(B)} \mathbf{MS}_B. \tag{6.51}$$

Supposons que α soit une permutation de $\mathfrak{S}_p$ et β une permutation de $\mathfrak{S}_q$. On montre alors en généralisant [24] que :

$$\mathbb{F}_\alpha \mathbb{F}_\beta = \sum_\sigma \mathbb{F}_\sigma \tag{6.52}$$

où σ décrit l'ensemble $\alpha \sqcup\!\sqcup \beta[p]$, c'est à dire l'ensemble des mélanges de la permutation α avec la permutation β, vues comme mots sur l'alphabet $\{p+1,\dots,p+q$. Ceci montre que les fonctions $\mathbb{F}_\sigma$, où σ est une permutation, engendrent une sous algèbre de **MQSym**. On l'appellera algèbre des fonctions quasi-symétriques libres et on la notera **FQSym**.

On peut voir ceci comme une loi d'algèbre sur $\bigoplus \mathbb{K}\mathfrak{S}_N$. Cette loi a déjà été définie par Malvenuto et Reutenauer dans [66] (voir aussi [70]). La loi de la bigèbre duale est

$$\mathbb{F}_\alpha \star \mathbb{F}_\beta = \sum_\sigma \mathbb{F}_\sigma \tag{6.53}$$

où σ^{-1} décrit l'ensemble $\alpha^{-1} \sqcup\!\sqcup \beta^{-1}[p]$. C'est le produit de convolution des permutations vues comme endomorphismes de l'algèbre libre. On en donne une généralisation dans la section 6.5. On a donc la propriété suivante qui relie **FQSym** et **QSym** :

Proposition 6.38 *L'application*

$$\begin{aligned}\mathbf{FQSym} &\longrightarrow \mathbf{QSym}\\ \mathbb{F}_\sigma &\longmapsto F_{C(\sigma)}\end{aligned} \tag{6.54}$$

est un morphisme de bigèbres.

6.4.3 Produit de mélange

Le but de cette sous-section est de montrer que **MQSym** est une algèbre libre et d'en donner une famille de générateurs. On va donc construire une autre base de **MQSym** dont la règle de produit remplace le mélange augmenté par le mélange simple dans le produit des $\mathbf{MS}_A$ (proposition 6.19).

Dans [66], Malvenuto et Reutenauer ont introduit une base de l'algèbre des fonctions quasi-symétriques dont la propriété essentielle est que les éléments de la base duale sont primitifs (*i.e.*, $\delta(P^*) = P^* \otimes 1 + 1 \otimes P^*$ où δ désigne le coproduit dual du produit de **QSym**). Ainsi le produit dans cette base s'exprime par le mélange, ce qui montre que **QSym** est une algèbre de polynômes (algèbre commutative libre).

Cette base de **QSym** notée $\{\phi_I\}$ dans [23], est un analogue quasi-symétrique des produits de sommes de puissances p_λ. La base duale dans **Sym** est notée $\{\Phi^I\}$. On peut les définir par l'une des deux expressions équivalentes suivantes (I et $J = (j_1, \dots j_p)$ désignent deux compositions de n) :

$$\Phi^J = \Phi_{j_1}\Phi_{j_2}\dots\Phi_{j_p} \quad \text{avec} \quad \Phi_j = \sum_{K \vDash j} \frac{(-1)^{\ell(K)-1}}{\ell(K)} S^K, \tag{6.55}$$

$$\phi_I = \sum_{I \succeq K} \frac{1}{(\#(I,K))!} M_K \tag{6.56}$$

où $(\#(I,K))! = \ell(I_1)!\,\ell(I_2)!\dots\ell(I_r)!$ et $I_1 \dots I_r$ sont les compositions telles que $I = I_1 \cdot I_2 \cdots I_r$ et $K = (|I_1|, |I_2|, \dots, |I_r|)$. Remarquons que la première de ces formules peut s'exprimer de manière compacte par la relation entre séries génératrices en t :

$$\sum_{k\geq 1} t^k \Phi_k = \log(1 + \sum_{k \geq 1} S_k t^k). \tag{6.57}$$

Enfin on trouve pour expression de Φ^J :

$$\Phi^J = \sum_{K \succeq J} \frac{(-1)^{\ell(K)-\ell(J)}}{\prod(\#(K,J))} S^K \tag{6.58}$$

où $\prod(\#(K,J))$ désigne le produit des parts de la composition $\#(K,J)$.

Note 6.39 Pour simplifier les écritures, on a multiplié Φ_k par k par rapport aux notations de [23]. La fonction notée ici Φ_k est donc exactement égale à la fonction P_k^* dans [66].

Soit A une matrice tassée de hauteur h et de somme par lignes R. A toute composition $K = (k_1, \ldots, k_p)$ de h on associe la matrice $A\rangle K$ définie comme suit. Soit $L_1, \ldots, L_p$ les lignes de A. La première ligne de $A\rangle K$ est la somme des k_1 premières lignes de A, la deuxième ligne la somme des k_2 suivantes et ainsi de suite. On obtient donc une matrice de hauteur p et dont la somme par lignes S est l'unique composition moins fine que R telle que $K = \#(R, S)$. Par exemple

$$\left.\begin{bmatrix} 1&2&0&2\\ 0&1&2&1\\ 1&2&0&0\\ 0&3&1&5\\ 1&3&1&0 \end{bmatrix}\right\rangle (3,2) = \begin{bmatrix} 2&5&2&3\\ 1&4&2&5 \end{bmatrix}.$$

La somme par lignes de la première matrice est la composition $(5, 4, 3, 9, 5)$, celle de la deuxième est $(12, 14)$.

Définition 6.40 *Soit A une matrice tassée de hauteur h. On pose alors*

$$\phi\mathbf{S}_A = \sum_{K \vDash h} \frac{1}{(K)!} \sum \mathbf{MS}_{A\rangle K} \tag{6.59}$$

Par triangularité, c'est clairement une base de **MQSym**.

Décrivons la base duale. Si $M_1, M_2 \ldots, M_q$ sont des matrices de même hauteur, notons $M_1 M_2 \ldots M_q$ la matrice obtenue en collant les matrices M_i les unes aux autres.

Proposition 6.41 *La base duale de $\{\phi\mathbf{S}_A\}$ est la base $\{\mathbf{M\Phi}_B\}$ définie par*

$$\mathbf{M\Phi}_B = \sum_{M_1, M_2, \ldots, M_q} \frac{(-1)^{\mathrm{L}(M_1)+\mathrm{L}(M_2)+\cdots+\mathrm{L}(M_q)}}{\mathrm{L}(M_1)\,\mathrm{L}(M_2)\ldots\mathrm{L}(M_q)} \mathbf{MS}_{M_1 M_2 \ldots M_q} \tag{6.60}$$

Par construction on a donc la propriété suivante :

Proposition 6.42 *Pour toute matrice tassée A on a :*

$$\mathrm{Eval}(\phi\mathbf{S}_A) = \phi_{\Sigma_{\mathrm{Lig}}(A)} \quad \textit{et} \quad {}^t\,\mathrm{Eval}(\Phi_I) \sum_{A,\ \Sigma_{\mathrm{Col}}(A)=I} \mathbf{M\Phi}_A. \tag{6.61}$$

Cette base à la propriété particulière suivante :

Lemme 6.43 *Soit C une matrice colonne. Alors $\mathbf{M\Phi}_C$ est primitif pour le coproduit de* **MQSym**.

Démonstration. Soit c un entier. D'après [66] la fonction symétrique non-commutative $\Phi_{(c)}$ est primitive. Or, on sait que l'application

$$\begin{aligned} {}^t\operatorname{Eval} \; : \mathbf{Sym} &\longrightarrow \mathbf{MQSym} \\ S^I &\longmapsto \sum_{A,\ \Sigma_{\mathrm{Col}}(A)=I} \mathbf{MS}_A \end{aligned}$$

définit un morphisme de bigèbres. L'image par ce morphisme de la fonction $\Phi_{(c)}$ est la somme $f = \sum_C \mathbf{M\Phi}_C$ pour toutes les colonnes C de somme c. La fonction f est donc primitive à son tour. On voit de plus que $\mathbf{M\Phi}_C$ est la partie des $\mathbf{MS}_A$ apparaissant dans f tels que A soit de somme par lignes C. Or, sur la base $\mathbf{MS}_A$, le coproduit ne fait que casser la somme par lignes en deux. Autrement dit, si $\Delta(f)$ s'écrit $\sum \mathbf{MS}_M \mathbf{MS}_N$, alors $\Delta(\mathbf{M\Phi}_C)$ s'écrit $\sum \mathbf{MS}_M \mathbf{MS}_N$ où n'apparaissent que les matrices M et N dont les sommes par lignes sont les parties inférieure et supérieure de C. Il n'y a que deux cas possibles :

- $\Sigma_{\mathrm{Lig}}(M) = C$ et $\Sigma_{\mathrm{Lig}}(N) = ()$ (*i.e.*, $N = 1$)
- $\Sigma_{\mathrm{Lig}}(M) = ()$ et $\Sigma_{\mathrm{Lig}}(N) = C$ (*i.e.*, $M = 1$).

Ceci termine la preuve. □

Rappelons que $A^{\underline{i}}$ et $A_{\overline{i}}$ désignent respectivement les tassées des matrices obtenues en prenant les i premières lignes de A, respectivement les i dernières lignes. On calcule le coproduit dans la base $\mathbf{M\Phi}_A$ comme suit :

Proposition 6.44 *Soit A une matrice tassée de hauteur k. Alors*

$$\Delta(\mathbf{M\Phi}_A) = \sum_{0 \le i \le k} \mathbf{M\Phi}_{A^{\underline{i}}} \otimes \mathbf{M\Phi}_{A_{\overline{k-i}}}. \tag{6.62}$$

La somme porte sur les i tels que pour toute colonne C de A les coefficients non nuls de C sont soit tous dans les lignes d'indice inférieur ou égal à i soit tous dans les autres lignes. En particulier s'il n'existe pas de tels i entre 1 et $k-1$, l'élément $\mathbf{M\Phi}_A$ est primitif.

Démonstration. Soit $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A. La définition du coproduit $\mathbf{M\Phi}_A$ s'écrit :

$$\mathbf{M\Phi}_A(X \sqcup Y) = \sum C_1'(X) C_1''(Y) \cdot C_2'(X) C_2''(Y) \cdots C_p'(X) C_p''(Y).$$

Pour simplifier les notations on a remplacé $\mathbf{M\Phi}_{C_i}$ par C_i. Or, d'après le lemme précédent, $\sum C_i'(X)C_i''(Y)$ est nulle sauf si $C_i''(X) = 1$ ou $C_i''(X) = 1$. Ceci donne la règle de coproduit annoncée. $\square$

Par exemple, si $A = \begin{bmatrix} 0&1&0&3&1 \\ 0&2&0&2&4 \\ 1&0&1&0&0 \end{bmatrix}$, on trouve :

$$\Delta(\mathbf{M\Phi}_A) = \mathbf{M\Phi}_A \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{M\Phi}_A + \mathbf{M\Phi}_{\begin{bmatrix} 1&3&1 \\ 2&2&4 \end{bmatrix}} \otimes \mathbf{M\Phi}_{[1\ 1]}.$$

On voit que les matrices qui apparaissent ici sont exactement les matrices B et C telles que ${}^tA$ apparaisse dans le mélange $ш({}^tB, {}^tC)$ (voir 6.18). Par dualité, celui ci donne donc la règle de produit des $\phi\mathbf{S}_B$:

Proposition 6.45 *Soit B et C deux matrices tassées. Le produit de $\phi\mathbf{S}_B$ par $\phi\mathbf{S}_C$ se décompose de la manière suivante :*

$$\phi\mathbf{S}_B\phi\mathbf{S}_C = \sum_{A \in ш(P,Q)} \phi\mathbf{S}_A \tag{6.63}$$

Ce calcul, un peu fastidieux, a un certain nombre de conséquences particulièrement remarquables :

Tout d'abord, les matrices qui apparaissent dans le mélange de deux matrices B et C ont pour hauteur et largeur la somme des hauteurs et des largeurs de B et C. Ainsi **MQSym** est une bigèbre triplement graduée.

Une autre conséquence est due à Gérard Duchamp [15] :

Définition 6.46 *Soit A une matrice tassée. On dit que A est* connexe *si A ne peut pas s'écrire de manière non triviale sous forme diagonale par blocs :*

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \tag{6.64}$$

Les blocs ne sont pas forcément carrés.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 6.47 *L'algèbre* **MQSym** *est librement engendrée par la famille $\{\phi\mathbf{S}_A\}$ où A décrit l'ensemble des matrices connexes.*

La preuve est une généralisation des arguments classiques utilisés pour montrer que les mots de Lyndon propres engendrent librement l'algèbre de mélange [72]. On peut voir ce théorème comme une généralisation du résultat de Poirier-Reutenauer dans le cas de **FQSym** [70] : les permutations connexes engendrent librement **FQSym** ainsi que sa duale.

6.5 Convolution

Définition 6.48 *Soit $(\mathcal{H}, 1, \mu, \delta, \epsilon, \alpha)$ une algèbre de Hopf. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathcal{H}$. On appelle convolution de f et g l'endomorphisme $f * g$ défini par*

$$f * g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \delta. \tag{6.65}$$

Ceci munit l'espace $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ d'une structure d'algèbre. Cette algèbre est isomorphe à $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ où $\mathcal{H}^*$ est l'algèbre de Hopf duale de $\mathcal{H}$. Le but de cette section est de décrire les liens qu'il y a entre **MQSym** et l'algèbre de convolution de $\mathcal{H}$.

On rappelle que si $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf graduée, la graduation de $T(\mathcal{H}^+)$ est définie par

$$\deg(m_1 {\cdot} m_2 \cdots m_p) = \deg(m_1) + \deg(m_2) + \cdots + \deg(m_p), \tag{6.66}$$

la graduation habituelle des tenseurs étant appelée longueur :

$$\ell(m_1 {\cdot} m_2 \cdots m_p) = p. \tag{6.67}$$

Dans tout ce qui suit, les endomorphismes considérés seront homogènes. La convolution de deux endomorphismes homogènes de degré p et q est un endomorphisme homogène de degré $p + q$.

Notation 6.49 *On notera* $\mathrm{Convol}(\mathcal{H})$ *l'algèbre de convolution des endomorphismes homogènes de $\mathcal{H}$ et* $\mathrm{End}^n(\mathcal{H})$ *l'espace vectoriel des endomorphismes homogènes de degré n.*

Soit $K = (k_1, \ldots, k_q) \in \mathbb{N}^q$ une pseudo-composition. Définissons

$$\begin{aligned} \delta^{(K)} \ &: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^{\otimes q} \\ &\quad m \longmapsto (\pi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{k_q}) \circ \delta^q(m) \end{aligned} \tag{6.68}$$

où π_d désigne le projecteur sur la composante homogène de degré d. L'application $\delta^{(K)}$ est un morphisme qui prend un élément de $\mathcal{H}$ de degré $|K|$ et l'envoie sur un élément de $\mathcal{H}^{\otimes q}$ de degré $(k_1, \ldots, k_q)$ en annulant tous les éléments de degré différent de $|K|$.

On va associer à toute matrice tassée A de somme n un endomorphisme f_A de la composante homogène de degré n de $T(\mathcal{H}^+)$. Supposons que $A = (a_{i,j})$ soit une matrice tassée $p \times q$ de somme n. La somme par lignes de A est une composition $l = (l_1, \ldots, l_p)$, et la somme par colonnes une composition

$c = (c_1, \ldots, c_q)$. Soient $L_1, \ldots, L_p$ les lignes de A. Soit $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_r$ un tenseur sous forme normale (*i.e.*, $m_i \in \mathcal{H}^+$). On définit alors f_A par

$$f_A(m_1 \cdot m_2 \cdots m_r) = \begin{cases} \mu_q^p(\delta^{L_1}(m_1), \cdots, \delta^{L_p}(m_p)) & \text{si } r = p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{6.69}$$

où $\mu_q^p = (\mu^p)^{\otimes q}$ désigne le produit, composantes par composantes, des p tenseurs $\delta^{L_i}(m_i)$ de longueurs q. On obtient donc un élément de $(\mathcal{H}^+)^{\otimes q}$ de degré $(c_1, \ldots, c_q)$. Remarquons que $f_A(m)$ est nul si m n'est pas de degré $l = (l_1, \ldots, l_p)$. Enfin, on fait la convention que $f_{[]}$ est le projecteur sur l'espace des éléments de degré 0 de $T(\mathcal{H}^+)$ (espace des tenseurs de longueur nulle), qui est identifié aux scalaires de $\mathbb{K}$.

Exemple 6.50 Soit $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Le morphisme f_A associé annule tous les tenseurs qui ne sont pas de degré $(3, 5)$. Soit $m = abc \cdot a^4 b$. On a

$$\begin{aligned} \delta^{(2,0,1)}(abc) &= ab \otimes 0 \otimes c + ac \otimes 0 \otimes b + bc \otimes 0 \otimes a, \\ \delta^{(0,2,3)}(a^4 b) &= \binom{4}{2}(1 \otimes a^2 \otimes a^2 b) + \binom{4}{1}(1 \otimes ab \otimes a^3). \end{aligned}$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} F_A(abc \cdot a^4 b) = 6(& ab \cdot a^2 \cdot a^2 bc + ac \cdot a^2 \cdot a^2 b^2 + bc \cdot a^2 \cdot a^3 b) \\ +4(& ab \cdot ab \cdot a^3 c + ac \cdot ab \cdot a^3 b + bc \cdot ab \cdot a^4). \end{aligned}$$

L'exemple suivant, en quelque sorte générique, est d'une importance cruciale pour la suite.

Exemple 6.51 Reprenons les notations précédentes pour la matrice tassée $A = (a_{i,j})$. Plaçons nous sur

$$\mathbb{K}\{X\} = T(\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^+).$$

A la composition $l = (l_1, \ldots, l_p)$ des sommes des lignes de A nous allons faire correspondre le multimot générique de degré l, qui sera noté $m_{(l)}$. Soient $d_1 = l_1$, $d_2 = l_1 + l_2$, $\ldots$, $d_i = l_1 + \cdots + l_i$, $\ldots$, $d_p = n$ les descentes de l. On pose alors

$$m_{(l)} = \left(\prod_{i=1}^{d_1} x_i\right) \cdot \left(\prod_{i=d_1+1}^{d_2} x_i\right) \cdots \left(\prod_{i=d_{p-1}+1}^{d_p} x_i\right). \tag{6.70}$$

Autrement dit

$$m_{(l)} = x_1 \diamond_1 x_2 \diamond_2 x_3 \diamond_3 \cdots \diamond_{n-1} x_n, \tag{6.71}$$

où $\diamond_i$ désigne la multiplication commutative si i n'est pas une descente de l et la concaténation dans le cas contraire. Pour simplifier les notations, on va poser $X_I = \prod_{i\in I} x_i$ si I est une partie de $\{1\dots n\}$. De plus, D_i désignera l'intervalle entier $\{d_{i-1}+1,\dots,d_1\}$. On a donc

$$m_{(l)} = X_{D_1}\cdot X_{D_2}\cdots X_{D_p}. \tag{6.72}$$

Calculons l'image de $m_{(l)}$ par f_A. Tout d'abord, pour toute pseudo-composition $K=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{N}^q$ de somme s, on a

$$\delta^{(K)}(X_{\{u,\dots,u+s\}}) = \sum_{I_1,\dots,I_q} (X_{I_1}\otimes\cdots\otimes X_{I_q}), \tag{6.73}$$

où la somme est étendue à toutes les partitions $I_1,\dots,I_q$ de l'intervalle entier $\{u,\dots,u+s\}$ telles que $\#(I_1)=k_1,\ \dots,\ \#(I_q)=k_q$. On en déduit donc que

$$f_A(m_{(l)}) = \sum_{(I_{i,j})} \left(X_{\bigcup I_{i,1}}\otimes\cdots\otimes X_{\bigcup I_{i,q}}\right), \tag{6.74}$$

la somme porte sur toutes les matrices $(I_{i,j})$ de parties de $\{1,\dots n\}$ telles que

- pour tout i,j on a $\#(I_{i,j}) = a_{i,j}$,
- pour tout i les ensembles $I_{i,1},\dots,I_{i,q}$, forment une partition de l'intervalle entier $D_i = \{d_{i-1}+1,\dots,d_i\}$.

Par exemple, si l'on considère la matrice $A = \left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&0&2\end{smallmatrix}\right]$, on a $l=(2,3)$. Le vecteur générique $m_{(l)}$ s'écrit alors $x_1x_2{\cdot}x_3x_4x_5$. On a

$$\begin{aligned}
\delta^{(0,1,1)}(x_1x_2) &= 0\otimes x_1\otimes x_2 + 0\otimes x_2\otimes x_1,\\
\delta^{(1,0,2)}(x_3x_4x_5) &= x_3\otimes 0\otimes x_4x_5 + x_4\otimes 0\otimes x_3x_5 + x_5\otimes 0\otimes x_3x_4
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\begin{aligned}
F_A(x_1x_2{\cdot}x_3x_4x_5) = {} & x_3{\cdot}x_1{\cdot}x_2x_4x_5 + x_4{\cdot}x_1{\cdot}x_2x_3x_5 + x_5{\cdot}x_1{\cdot}x_2x_3x_4\\
& + x_3{\cdot}x_2{\cdot}x_1x_4x_5 + x_4{\cdot}x_2{\cdot}x_1x_3x_5 + x_5{\cdot}x_2{\cdot}x_1x_3x_4\,.
\end{aligned}$$

On remarque au passage que ces vecteurs se déduisent les uns des autres par une permutation des indices.

Théorème 6.52 *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf. L'application*

$$\begin{aligned} \mathbf{MQSym} &\longrightarrow \mathrm{Convol}(T(\mathcal{H}^+)) \\ \mathbf{MS}_A &\longmapsto f_A \end{aligned} \tag{6.75}$$

est un morphisme d'algèbres.

Démonstration. Rappelons tout d'abord la définition du coproduit de $T(\mathcal{H}^+)$ (équation 6.5). Soit $m = m_1{\cdot}m_2\cdots m_p$ un tenseur en forme normale. Supposons que $\delta(m_i) = \sum m_i' \otimes m_i''$. Alors par définition

$$\mathbf{c}(m) = \sum \mu\left(m_1', m_2', \cdots, m_p'\right) \otimes \mu\left(m_1'', m_2'', \cdots, m_p''\right). \tag{6.76}$$

On prendra garde au fait que les produits $\mu\left(m_1^{(i)}, \cdots, m_p^{(i)}\right)$ ne sont pas nécessairement en forme normale.

Soit B une matrice non obligatoirement verticalement tassée de hauteur p (c'est à dire que B peut contenir des lignes de zéros). On notera

$$\tilde{f}_B \;:\; \mathcal{H}^p \longrightarrow T(\mathcal{H}^+), \tag{6.77}$$

l'extension de la définition de f_A aux matrices non tassées. Il est important de noter que la source de $\tilde{f}_B$ n'est pas $(\mathcal{H}^+)^{\otimes p}$ mais bien $\mathcal{H}^p$. On a facilement le lemme suivant :

Lemme 6.53 *Soit A une matrice tassée de hauteur h. Soit*

$$m = \mu(m_1, m_2, \ldots, m_p)$$

un tenseur, pas obligatoirement sous forme normale (m_i n'est pas nécessairement dans $\mathcal{H}^+$). Alors

$$f_A(m) = \sum_{B \in (A \updownarrow_p)} \tilde{f}_B(m_1, m_2, \ldots, m_p) \tag{6.78}$$

où B décrit l'ensemble $(A \updownarrow_p)$ des matrices de hauteur p obtenus en insérant des lignes de 0 dans A.

On en déduit alors que pour A et A' deux matrices tassées

$$(f_A \otimes f_{A'}) \circ \mathbf{c}(m) = \sum_{B \in (A \updownarrow_p),\ B' \in (A' \updownarrow_p)} \tilde{f}_B\left(m_1', \ldots, m_p'\right) \otimes \tilde{f}_{B'}\left(m_1'', \ldots, m_p''\right), \tag{6.79}$$

ce qui donne

$$\mu \circ (f_A \otimes f_{A'}) \circ \mathbf{c}(m) = \sum_{B \in (A\updownarrow_p),\ B' \in (A'\updownarrow_p)} \tilde{f}_{BB'}\left(m'_1, \ldots, m'_p, m''_1, \ldots, m''_p\right), \quad (6.80)$$

où BB' est la concaténée des deux matrices B et B'. On reconnaît ici l'ensemble $(C\updownarrow_p)$ des détassées des matrices C telles que $\mathbf{MS}_C$ apparaisse dans le produit $\mathbf{MS}_A\mathbf{MS}_{A'}$. Ceci termine la démonstration. □

Nous allons donner une interprétation intéressante du cas des polynômes en X. Soient U un espace vectoriel de dimension N et $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ une base de U. L'algèbre des polynômes en X s'identifie alors naturellement avec $S(U)$, l'algèbre symétrique de U. La structure d'algèbre de Hopf graduée de $\mathbb{K}[X] = T(\mathbb{K}[X]^+)$ se transporte en une structure sur $T(S^+(U))$. De plus, on vérifie facilement que les définitions du produit, coproduit, unité, co-unité et antipode ainsi que du degré, ne dépendent pas de la base $\{x_1, \ldots, x_N\}$ choisie. Ce qui veut dire que la structure d'algèbre de Hopf graduée ainsi définie est canonique.

Remarquons que le groupe $GL(U)$ agit naturellement sur $T(S^+(U))$. Dans la suite nous allons noter Comm_U^n le commutant de $GL(U)$ dans l'algèbre des endomorphismes homogènes de degré n $\mathrm{End}^n(T(S^+(U)))$.

Définition 6.54 *Soit m un élément de degré n de $T(S^+(U))$. Il existe un plus petit sous espace V de U tel que $m \in T(S^+(V))$. On le note* $\mathrm{Vect}(m)$.

L'existence $\mathrm{Vect}(m)$ ne pose pas de problème, c'est clairement l'intersection de tous les sous espaces V de U tel que m appartienne à $T(S^+(V))$. On va utiliser les deux lemmes suivants :

Lemme 6.55 *Soient U un espace vectoriel de dimension finie et m un élément de degré n de $T(S^+(U))$. Alors*

$$\textit{pour tout } g \in GL(U), \quad \mathrm{Vect}(g(m)) = g(\mathrm{Vect}(m)), \quad (6.81)$$

$$\textit{pour tout } f \in \mathrm{Comm}_U^n, \quad f(m) \in T(S^+(\mathrm{Vect}(m))). \quad (6.82)$$

Démonstration. On a clairement $\mathrm{Vect}(g(m)) \subset g(\mathrm{Vect}(m))$. On en déduit l'autre inclusion en considérant g^{-1}. Pour que f commute avec $GL(V)$ il faut que f commute avec les projecteurs sur $\mathrm{Vect}(m)$. D'où le Lemme. □

Lemme 6.56 *Soient $U \subset V$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f un élément de Comm_V^n. Alors, la restriction f_U de f à $T^n(S^+(U))$ laisse stable $T^n(S^+(U))$ et appartient à Comm_U^n. De plus, tout élément de Comm_U^n peut se prolonger en un élément de Comm_V^n.*

Démonstration. La première partie du lemme est une conséquence facile du lemme précédent : $m \in T^n(S^+(U))$ équivaut à $\mathrm{Vect}(m) \subset U$.

Soit $g \in \mathrm{Comm}_U^n$. On veut construire un élément $f \in \mathrm{Comm}_V^n$ tel que la restriction f_U de f à $T(S^+(U))$ soit égale à g. Soit $m \in T(S^+(U))$. Si $\dim \mathrm{Vect}(m) \leq u$, choisissons un morphisme injectif h_m de $\mathrm{Vect}(m)$ dans U. Il est clair que $h_m(\mathrm{Vect}(m)) = \mathrm{Vect}(h_m(m))$. On peut donc poser

$$f(m) = \begin{cases} h_m^{-1} \circ g \circ h_m(m) & \text{si } \dim(V(m)) \leq u, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.83}$$

Montrons que f répond au problème. Comme g commute avec $GL(U)$, le vecteur $h_m^{-1} \circ g \circ h_m(m)$ ne dépend pas du choix de l'injection h_m. Si $m \in T(S^+(U))$, ce qui équivaut à $Vect(m) \subset U$, on peut prendre pour h_m l'identité. Par conséquent $f_U = g$.

Supposons que m soit un tenseur tel que $\dim(\mathrm{Vect}(m)) \leq u$. Soit alors $k \in GL(V)$. Comme le vecteur $h^{-1} \circ g \circ h(m)$ ne dépend pas du choix de l'injection h, on peut prendre $h = h_{k(m)} \circ k$. On a alors

$$f(m) = k^{-1} \circ h_{k(m)}^{-1} \circ g \circ h_{k(m)} \circ k(m). \tag{6.84}$$

Il s'ensuit que

$$k(f(m)) = h_{k(m)}^{-1} \circ g \circ h_{k(m)}(k(m)) = f(k(m)). \tag{6.85}$$

et l'endomorphisme f ainsi défini commute donc bien avec $GL(V)$. □

On a alors le théorème suivant qui est une extension de la dualité de Schur-Weyl :

Théorème 6.57 *Soit U un espace vectoriel de dimension finie N. Soit ρ le morphisme canonique*

$$\begin{aligned} \rho_U \ : \mathbf{MQSym} &\longrightarrow \mathrm{Convol}(T(S^+(U)) \\ \mathbf{MS}_A &\longmapsto f_A \end{aligned} \tag{6.86}$$

Pour tout entier n, l'image par ρ de la composante homogène de degré n de **MQSym** *est exactement le commutant de $GL(U)$ dans la composante homogène de degré n de $\mathrm{End}(T(S^+(U))$. De plus, ρ_U est injectif sur les composantes $\mathrm{End}^n(T(S^+(U))$ de degré n inférieur à N.*

Démonstration. L'endomorphisme f_A associé à la matrice A est défini à partir des opérations et des projecteurs homogènes de $\mathcal{H} = T(S^+(U))$. Or, toutes ces opérations commutent avec l'action de $GL(U)$. On en déduit que f_A commute avec $GL(U)$.

Soit n un entier. Nous allons tout d'abord supposer que la dimension N de U est supérieure à n et prouver l'injectivité. Ensuite par un calcul de dimension, on en déduira que $\rho_U(\mathbf{MQSym}^n)$ est le commutant de $GL(U)$ dans $\mathrm{End}^n(T(S^+(U))$. Par restriction on conclura alors facilement dans le cas où N est plus petit que n.

Fixons une base $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ de U. Dans l'exemple 6.51, on a calculé l'image du multimot générique $m_{(l)}$ par l'opérateur f_A où A est une matrice tassée de somme par lignes l. Remarquons que ce multimot peut s'exprimer sur X puisque N est plus grand que la somme n de A.

Reprenons les mêmes notations : $d_1, \ldots, d_p$ désigneront les descentes de l et D_i l'intervalle entier $\{d_{i-1}+1, d_i\}$. Supposons que m' soit un multimot de la forme

$$m' = X_{I_1} \cdot X_{I_2} \cdots X_{I_q}. \tag{6.87}$$

où $I_1, \ldots, I_q$ est une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Il existe une matrice A et une seule telle que m' apparaisse dans l'image de $m_{(l)}$ par f_A. C'est la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \#(I_1 \cap D_1) & \cdots & \#(I_q \cap D_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \#(I_1 \cap D_p) & \cdots & \#(I_q \cap D_p) \end{bmatrix}. \tag{6.88}$$

On donc prouvé l'injectivité.

Nous allons maintenant établir que les dimensions de $\mathbf{MQSym}^n$ et du commutant de $GL(U)$ dans $\mathrm{End}^n(T(S^+(U))$ sont égales. On connaît déjà celle de $\mathbf{MQSym}^n$ (voir corollaire 6.35). Pour trouver celle du commutant de $GL(U)$, nous allons calculer le caractère gradué de la représentation de $GL(U)$ sur $T(S^+(U))$. Nous conclurons par le lemme de Schur.

Il est bien connu que le caractère de $S^d(U)$ est la fonction $s_{(d)} = h_d$ (ici $s_{(d)}$ désigne la fonction de Schur ligne qui est égale a la fonction complète).

Le caractère gradué de $S^+(U)$ est donc :

$$\mathrm{ch}_t(S^+(U)) = \sum_{d>0} h_d t^d. \tag{6.89}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{ch}_t(T(S^+(U))) = \sum_I h_I t^{|I|} \tag{6.90}$$

(I est une composition quelconque). Remarquons que h_I ne dépend par de l'ordre de I mais seulement de la partition associée à I. On trouvera l'identité suivante dans [13]. Il en existe un analogue non-commutatif [23] :

$$\sum_I h_I u^{\ell(I)} = \sum_J r_J u^{\ell(J)}(1+u)^{|J|-\ell(J)}. \tag{6.91}$$

En prenant les composantes homogènes de degré d et en posant $x = 1$, on obtient la caractéristique

$$\mathrm{ch}_t(T(S^+(U))) = \sum_J r_J 2^{d-\ell(J)} t^{|J|} \tag{6.92}$$

La multiplicité de la représentation irréductible χ_λ dans la composante homogène de degré n de $T(S^+(U))$ est donc donnée par le produit scalaire

$$\left\langle \sum_{J \vDash n} r_J 2^{n-\ell(J)}, s_\lambda \right\rangle. \tag{6.93}$$

Le lemme de Schur nous dit alors que la dimension du commutant de $GL(U)$ dans la composante de degré n de $T(S^+(U))$ est égale à

$$\sum_{\lambda \vdash n} \sum_{I \vDash n,\ J \vDash n} 2^{2n-\ell(I)-\ell(J)} \langle R_I, s_\lambda \rangle \langle s_\lambda, R_J \rangle. \tag{6.94}$$

La somme est étendue à toutes les partitions λ de longueur au plus égale à la dimension N de U. Donc, si $N \geq n$, les fonctions s_λ apparaissent toutes. De plus, elles forment une base orthonormée de Sym, on en déduit donc que

$$\sum_{\lambda \vdash n} \langle R_I, s_\lambda \rangle \langle s_\lambda, R_J \rangle = \langle R_I, R_J \rangle. \tag{6.95}$$

La dimension du commutant de $GL(U)$ dans $T(S^+(U))$ est donc égale à la dimension de $\mathbf{MQSym}_n$ obtenue dans le corollaire 6.35.

Il reste le cas où U est un espace vectoriel de dimension N inférieure à n. Soit $V = U \oplus W$ de dimension n. D'après le lemme 6.56 tout élément g de Comm_U^n peut se prolonger en un élément f de Comm_V^n. On a montré précédemment que Comm_V^n est égal à $\rho_V(\mathbf{MQSym})$. De plus, il est clair que l'endomorphisme f_A^U associé à la matrice A sur U est la restriction à $T(S^+(U))$ de f_A^V associée à la matrice A sur V. L'endomorphisme f est donc bien dans $\rho_U(\mathbf{MQSym})$. Ceci termine la preuve du théorème. $\square$

Chapitre 7

Le monoïde chinois

Dans ce chapitre, nous présentons la première étude du monoïde chinois. Ce travail a été réalisé durant l'année 1995 avec Julien Cassaigne (IML), Marc Espie (LIAFA), Daniel Krob (LIAFA), Jean-Christophe Novelli (LIAFA). Nous avons présenté une version de conférence de ce travail au congrès international SFCA'96 qui s'est déroulé à Minneapolis (voir [6]). L'article complet, quant à lui, a été accepté pour publication dans la revue *International Journal of Algebra and Computation* (IJAC).

7.1 Introduction

Le monoïde plaxique est d'une importance fondamentale dans l'ensemble de la combinatoire algèbrique contemporaine [49]. Comme il joue un rôle vraiment central dans la théorie, Schützenberger s'est demandé s'il n'existait pas des monoïdes proches du plaxique, la difficulté étant de définir précisément cette notion de proximité. Il se trouve que la série génératrice du monoïde plaxique était bien connue : parmi tous les monoïdes ternaires (relations d'équivalences sur trois lettres), le nombre de classes de celui-ci croît particulièrement lentement. La question de Schützenberger s'est donc ramenée à l'étude des monoïdes ayant même série génératrice que le monoïde plaxique. Rappelons que cette série génératrice est donnée par la formule de Schur-Littlewood :

$$\sum_{I \in \mathbb{N}^n} p_I \, a^I = \frac{1}{\prod\limits_{a \in A} (1-a) \prod\limits_{a<b \in A} (1-ab)} , \tag{7.1}$$

où p_I désigne le nombre de classes plaxiques d'évaluation I.

Duchamp et Krob (voir [17]) ont montré qu'il n'existe que deux autres monoïdes ayant cette série génératrice : il s'agit du monoïde chinois et du monoïde chinois croisé. Il se trouve que ce second monoïde n'est pas compatible avec les morphismes croissants d'alphabet (si on se place sur quatre lettres, on a $dba \equiv abd$ tandis que $cba \not\equiv abc$) ce qui semble indiquer qu'il n'a que peu de propriétés algébriques intéressantes.

En ce qui concerne le monoïde chinois, en revanche, nous avons pu généraliser de nombreuses propriétés du monoïde plaxique, comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre. Une question algébrique reste néanmoins ouverte : le monoïde plaxique a été retrouvé dans un contexte de groupes quantiques et nous espérons voir un jour ressortir de même le monoïde chinois.

Nous allons étudier dans toute la suite le monoïde chinois. Comme celui-ci est un analogue du monoïde plaxique, nous allons naturellement tenter de généraliser à son cas les propriétés classiques du monoïde plaxique (voir [49]). Nous commencerons par montrer que l'involution de Schützenberger, la standardisation et la réduction des intervalles sont compatibles avec la structure du monoïde chinois (section 7.2) puis nous montrerons que les mots "escaliers" forment une section du monoïde chinois grâce à un algorithme d'insertion du type Schensted (section 7.3). Nous étudierons alors tout spécialement le cas standard où nous montrerons tout d'abord que chaque classe standard est d'ordre impair (section 7.4) puis que, contrairement au cas du monoïde plaxique, il existe une grande classe de cardinal nettement plus grand que les autres (section 7.5). Nous étudierons ensuite une généralisation à l'ensemble des classes de la technique vue dans la précédente section, ce qui nous permettra de définir un analogue de la correspondance de Robinson-Schensted puis de compter le nombre de classes ayant un motif donné (section 7.6). Enfin, nous terminerons en étudiant les classes de conjugaison du monoïde chinois puis les classes circulaires de celui-ci (section 7.7).

7.2 Définitions et premières propriétés

7.2.1 Définition

Définition 7.1 ([17]) *Soit $(A, <)$ un alphabet totalement ordonné. On appelle* congruence chinoise *la congruence définie par les relations*

$$cba \equiv cab \equiv bca \qquad \textit{pour tout } a < b < c, \tag{7.2}$$

$$aba \equiv baa\,,\ bba \equiv bab \qquad \textit{pour tout } a < b. \tag{7.3}$$

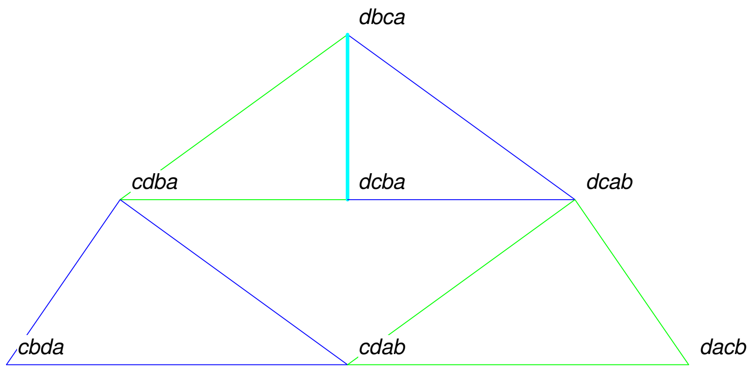
On appelle monoïde chinois $CH(A,<)$ *le quotient du monoïde libre* A^* *par la congruence chinoise.*

Remarque 7.2 On peut réduire les trois congruences décrites précédemment (7.2 et 7.3) à une seule :

$$cba \equiv cab \equiv bca \qquad \text{pour tout } a \leq b \leq c. \tag{7.4}$$

Ainsi, dans toute la suite de ce chapitre, nous utiliserons exclusivement la relation (7.4).

La figure 7.1 montre l'exemple de la classe de congruence de *dcba*.



Le graphe de la classe de congruence de *dcba*. Chaque arête du graphe correspond à une réécriture élémentaire. L'arête plus épaisse entre *dcba* et *dbca* montre que ces deux mots sont équivalents par deux réécritures élémentaires, à savoir *dcb* $\equiv$ *dbc* et *cba* $\equiv$ *bca*.

FIG. 7.1 : La classe de *dcba*

7.2.2 Involution de Schützenberger

Dans cette section, nous démontrons que l'involution de Schützenberger est compatible avec la congruence chinoise.

Rappelons la définition de cette involution : Soit $w = w_1 \dots w_p$ un mot sur l'aphabet fini A de cardinal n. Il existe deux involutions classique sur A^*. La première envoie un mot sur son image miroir :

$$w = w_1 w_2 \dots w_p \longmapsto w_p \dots w_2 w_1.$$

La deuxième envoie la i$^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet A sur la $n+1-i^{\text{ème}}$ lettre. Autrement dit l'ordre des lettres est renversé. Par exemple, l'image miroir du mot *abcbec* est le mot *cebcba* son renversé sur l'alphabet $\{a < b < c < d < e\}$ est le mot *edcdac*. Il est clair que ces deux involutions commutent. On appelle *involution de Schützenberger* la composée de ces deux involutions. L'image du mot w par cette involution est notée $w^{\#}$. Par exemple $abcbec^{\#} = cadcde$.

Le théorème suivant est l'analogue chinois d'un théorème sur le monoïde plaxique [49].

Théorème 7.3 *Soient v et w deux mots. On a*

$$v \equiv w \quad \Longleftrightarrow \quad v^{\#} \equiv w^{\#}.$$

Démonstration. Il suffit de le montrer pour chaque réécriture élémentaire, l'ensemble de la démonstration venant de la transitivité de la relation $\equiv$. Choisissons trois lettres $a \leq b \leq c$ comme dans (7.4). On a

$$\big((cba)^{\#} = cba\big) \quad \equiv \quad \big((cab)^{\#} = bca\big) \quad \equiv \quad \big((bca)^{\#} = cab\big)\,.$$

D'où le theorème $\square$

Par exemple, le mot *dcba* est envoyé sur lui-même par l'involution de Schützenberger, ce qui montre directement que le graphe de la figure 7.1 est symétrique par rapport à la droite verticale passant par *dcba*.

Un autre exemple est donné figure 7.2 où les mots *facbde* et *bcedfa* sont images l'un de l'autre par l'involution.

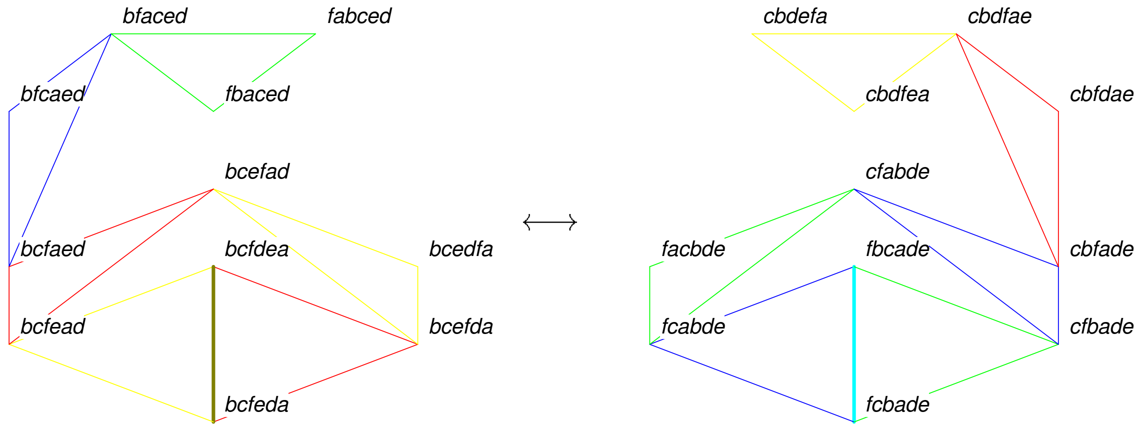


FIG. 7.2 : Deux classes équivalentes par l'involution de Schützenberger : *facbde* et *bcedfa*

7.2.3 Standardisation

Dans cette section, nous démontrons que la standardisation est compatible avec la congruence chinoise.

Théorème 7.4 *Soient v et w deux mots. On a*

$$v \equiv w \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Std}(v) \equiv \mathrm{Std}(w).$$

Démonstration. On vérifie facilement le théorème sur les réécritures élémentaires, d'après la relation (7.4). □

Rappelons que le procédé de standardisation nous permet d'étendre des résultats vrais sur les mots standard à l'ensemble des mots.

7.2.4 Réduction des intervalles

Soit I un intervalle de A, i une lettre de I et considérons le nouvel alphabet $A_I = A \setminus I \cup \{i\}$ ordonné par $<$ restreint à $A \setminus I$ et vérifiant pour tout $\alpha \in A \setminus I$

$$\alpha < i \qquad \text{ssi} \qquad \alpha < \beta \;\text{ pour tout }\; \beta \in I.$$

Définissons alors le morphisme χ_I de A^* dans ${A_I}^*$ en posant

$$\chi_I(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{if } \alpha \notin I \\ i & \text{if } \alpha \in I \end{cases}$$

Autrement dit, χ_I envoie tout mot sur le mot obtenu en remplaçant chaque élément de I par l'unique lettre i.

Théorème 7.5 *Le morphisme de réduction des intervalles est compatible avec la congruence chinoise.*

$$u \equiv v \quad \Rightarrow \quad \chi_I(u) \equiv \chi_I(v) \tag{7.5}$$

Démonstration. Comme précédemment, il suffit de vérifier le théorème sur les réécritures élémentaires :

$$\chi_{\{a,b\}}(cba) \equiv \chi_{\{a,b\}}(cab) \equiv \chi_{\{a,b\}}(bca),$$
$$\chi_{\{b,c\}}(cba) \equiv \chi_{\{b,c\}}(cab) \equiv \chi_{\{b,c\}}(bca).$$

Ces dernières relations se ramènent respectivement à

$$cbb \equiv cbb \equiv bcb \qquad \text{et} \qquad bba \equiv bab \equiv bba,$$

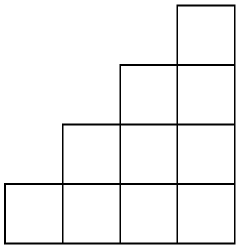
ce qui est trivialement vérifié. □

Cette propriété, qui est une sorte de propriété complémentaire de la standardisation permet aussi d'étendre des résultats vrais sur les mots standard à l'ensemble des mots.

7.3 Une représentation du monoïde chinois

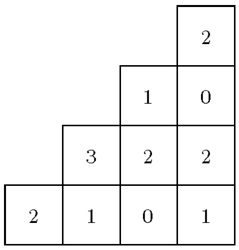
7.3.1 Escaliers chinois

On appelle *p-escalier chinois* le diagramme de Ferrers dont la partition est $(p, p-1, \ldots, 1)$ dessiné de la façon suivante :

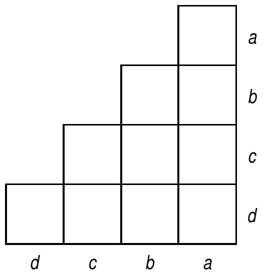


l'exemple étant donné ici pour $p = 4$.

On appelle *escalier chinois partiel* un p-escalier rempli avec des entiers positifs ou nuls[1], par exemple



On indexe les lignes (resp. les colonnes) du diagramme avec un segment initial de A de haut en bas (resp. de droite à gauche), c'est-à-dire,



[1]La plupart du temps, nous ne mettrons pas les zéros pour faciliter la lecture.

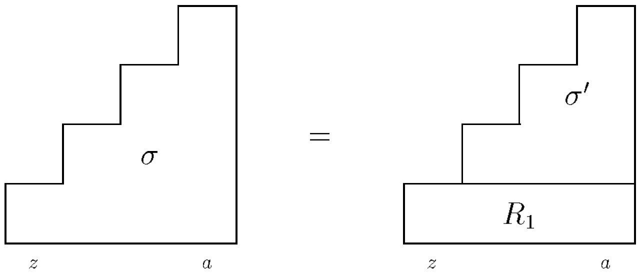
Notation 7.6 *Nous désignerons par $\sigma_{\alpha\beta}$ indifféremment la case de la ligne α et de la colonne β et son contenu. Nous noterons généralement σ_α à la place de $\sigma_{\alpha\alpha}$.*

On appelle *escalier chinois complet* tout n-escalier sur un alphabet de taille n. Dans la suite de ce chapitre, tous les escaliers considérés seront supposés complets sauf mention explicitement contraire.

Remarque 7.7 En toute rigueur, un escalier correspond à un segment initiale de l'alphabet. Cependant, on peut transformer facilement un p-escalier en un $p+1$-escalier en mettant à zéro les bonnes valeurs. Réciproquement, notons z la plus grande lettre d'un p-escalier σ. Si la dernière ligne de σ est vide, σ se réduit à un $p-1$-escalier.

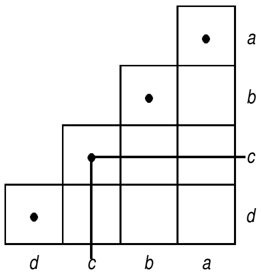
Nous aurons besoin par la suite d'une forme d'induction sur les escaliers. Soit σ un p-escalier sur le segment initial $a, b, \ldots, y$. Soit la ligne R une application de $a, b, \ldots, z$ dans $\mathbb{N}$. On note $\sigma' = (\sigma,\ R)$ le $p+1$-escalier construit à partir de σ en posant $\sigma'_{z\alpha} = R(\alpha)$.

Réciproquement, si σ est un p-escalier avec $p > 0$, soit R_1 la ligne la plus basse de σ et σ' le $p-1$-escalier obtenu en supprimant R_1 de σ. Alors, on a $\sigma = (\sigma',\ R_1)$.



Définition 7.8 *On appelle* équerre *d'une lettre α l'union de la ligne et de la colonne indexée par α.*

Exemple 7.9 L'équerre de c et la première diagonale de l'escalier :



Remarque 7.10 Nous dessinons nos diagrammes de Ferrers d'une manière qui n'est ni la manière française ni la manière anglaise.

Nous avons cependant choisi cette notation pour pouvoir construire l'algorithme d'insertion que nous allons présenter de la même façon que l'algorithme de Schensted classique : les lettres s'insèrent récursivement de la ligne du bas à celle du haut et se déplacent de la droite vers la gauche.

On dit qu'un mot est une *ligne chinoise* de type z si elle a la structure suivante :

$$w = (za)^{n_a} \dots (zy)^{n_y}\,(z)^{n_z}$$

où $a, b, \dots, z$ désigne le segment initial de A finissant par z et où les n_α sont entiers.

Soit σ un escalier chinois. On peut associer à chaque ligne de σ une ligne chinoise d'une manière naturelle : si la z-ième ligne de σ a pour forme

σ_z	σ_{zy}	$\cdots$	σ_{za}
z	y		a

la ligne chinoise associée est simplement le mot $(za)^{\sigma_{za}} \dots (zy)^{\sigma_{zy}}\,(z)^{\sigma_z}$. On dit qu'un mot w est un *mot-escalier chinois* si on peut l'écrire sous la forme $w = l_a\, l_b \cdots l_z$ où les l_α sont les lignes chinoises de types croissants $a, b, \dots, z$.

Définition 7.11 (Lecture ligne) *On dit qu'un mot w est la* forme canonique ligne d'un escalier σ *si w est le mot-escalier chinois obtenu en concaténant toutes les lignes chinoises correspondant aux lignes de σ de la ligne du haut à celle du bas. Nous écrirons alors $w = r(\sigma)$.*

Le mot canonique ligne peut être lu directement à partir de l'escalier correspondant en lisant les lignes de droite à gauche et de celle du haut à celle du bas.

Nous définirons plus tard (voir définition 7.21) la forme canonique colonne d'un escalier chinois comme une notion duale.

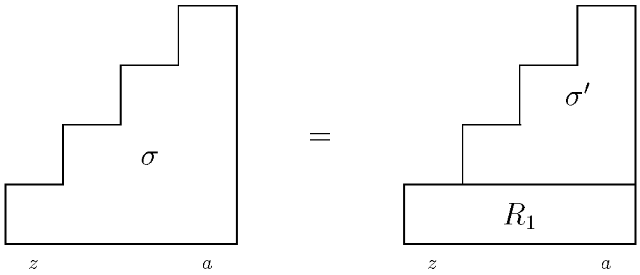
7.3.2 L'algorithme d'insertion

Dans cette section, nous allons décrire un algorithme d'insertion qui est l'analogue de l'algorithme de Schensted dans le cadre du monoíde chinois. Cet algorithme, tout comme l'algorithme de Schensted usuel [49, 74], insère successivement les lettres d'un mot dans un tableau. Ici, le tableau sera un escalier chinois. Nous montrerons ensuite que deux mots donnent le même tableau si et seulement s'ils sont équivalents (section 7.3).

Le principe de cet algorithme consiste à transformer une paire formée d'un escalier chinois σ et d'une lettre α en un nouvel escalier chinois noté $\sigma.\alpha$. À partir de là, on désigne par $\sigma.a_1a_2\cdots a_k$ l'escalier obtenu en insérant successivement a_1, a_2, $\ldots$, a_k dans σ, c'est-à-dire

$$\sigma.(a_1a_2\ldots a_k) = (\cdots((\sigma.a_1).a_2)\cdots).a_k.$$

Algorithme d'insertion.
Cet algorithme décrit un mécanisme récursif qui insère une lettre α dans un escalier chinois partiel σ.
Écrivons $\sigma = (\sigma',\ R_1)$, où R_1 est la ligne la plus basse de σ et z la plus grande lettre de σ.



1. Si $\alpha > z$, l'algorithme termine et rend une erreur.
2. Si $\alpha = z$, alors $\sigma.\alpha = (\sigma',\ R_1')$ où R_1' est obtenue en ajoutant 1 au contenu de la case σ_z de R_1 :

$$\begin{array}{c} R_1 \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \sigma_z & \cdots & \sigma_{za} \\ \hline \end{array} \\ z \qquad\qquad a \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} R_1' \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \sigma_z{+}1 & \cdots & \sigma_{za} \\ \hline \end{array} \\ z \qquad\qquad a \end{array}$$

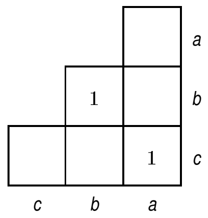
3. Si $\alpha < z$, soit β la plus grande lettre si elle existe dont la case ligne R_1 est non nulle et sinon $\beta = \alpha$. Trois cas sont alors possibles :
   3*a*. Si $\alpha \geq \beta$, alors $\sigma.\alpha = (\sigma'.\alpha,\ R_1)$.
   3*b*. Si $\alpha < \beta < z$, alors $\sigma.\alpha = (\sigma'.\beta,\ R_1')$, où R_1' est obtenue en ajoutant 1 à la case $\sigma_{z\alpha}$ de R_1 et en retirant 1 à la case $\sigma_{z\beta}$:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 \;—\; 0 & \sigma_{z\beta} & \cdots & \sigma_{z\alpha} & \cdots \\ \hline \end{array} \\ z \qquad\quad \beta \qquad\quad \alpha \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} R_1' \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 \;—\; 0 & \sigma_{z\beta}{-}1 & \cdots & \sigma_{z\alpha}{+}1 & \cdots \\ \hline \end{array} \\ z \qquad\quad \beta \qquad\quad \alpha \end{array}$$

   3*c*. Si $\alpha < \beta = z$, alors $\sigma.\alpha = (\sigma',\ R_1')$, où R_1' est obtenu en ajoutant 1 à la case $\sigma_{z\alpha}$ de R_1 et en retirant 1 à la case σ_z :

$$\begin{array}{c} R_1 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sigma_z & \cdots & \sigma_{z\alpha} & \cdots \\ \hline \end{array} \\ z \qquad\quad \alpha \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} R_1' \\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sigma_z{-}1 & \cdots & \sigma_{z\alpha}{+}1 & \cdots \\ \hline \end{array} \\ z \qquad\quad \alpha \end{array}$$

Exemples 7.12 Sur l'alphabet a, b, c, les mots cba, cab, bca correspondent au même escalier



On trouvera figure 7.3 l'insertion du mot cba.

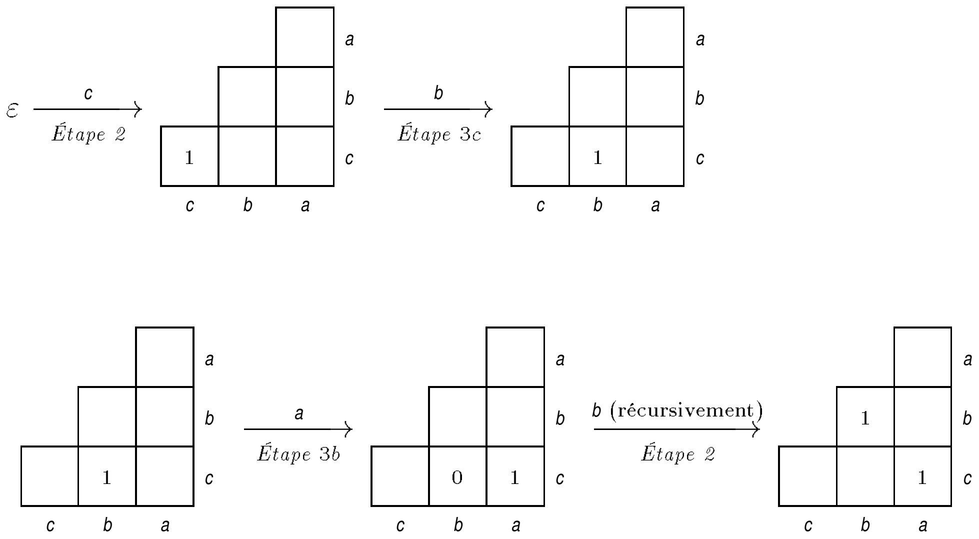
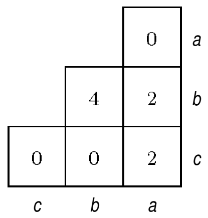


FIG. 7.3 : L'insertion de cba

De même, le lecteur pourra voir que l'insertion du mot $bbabbbcacbaa$ donne l'escalier



Nous allons maintenant montrer quelques propriétés élémentaires de l'algorithme d'insertion. Celles-ci nous permettront de montrer que les mots canoniques lignes forment une section du monoïde chinois.

Définition 7.13 (Suites d'insertions) *Écrivons explicitement toutes les étapes de l'insertion de la lettre $\alpha = \alpha_1$. On a donc une suite décroissante* *d'escaliers partiels :*

$$\begin{aligned}
\sigma.\alpha_1 = & (\sigma'.\alpha_2, R'_1) && \textit{(Étape } s_1\textit{)} = \\
& ((\sigma''.\alpha_3, R'_2), R'_1) && \textit{(Étape } s_2\textit{)} = \\
& (((\sigma^{(3)}.\alpha_4, R'_3), R'_2), R'_1) && \textit{(Étape } s_3\textit{)} = \\
& \qquad \cdots \\
& = ((\cdots(\sigma^{(k-1)}.\alpha_k, R'_{k-1}), \dots), R'_1) && \textit{(Étape } s_{k-1}\textit{)} \\
& = ((\cdots(\sigma^{(k)}, R'_k), \dots), R'_1) && \textit{(Étape } s_k\textit{)}.
\end{aligned}$$

La suite $\alpha_1 \xrightarrow{s_1} (R'_1, \alpha_2) \xrightarrow{s_2} (R'_2, \alpha_3) \cdots (R'_{k-1}, \alpha_k) \xrightarrow{s_k} R'_k$ *décrit précisément l'exécution de l'algorithme. Nous appellerons ces suites, des* suites d'insertion. *Nous utiliserons aussi la notation simplifée* $\alpha_2 \xrightarrow{s_2} \alpha_3$ *lorsque nous nous intéresserons à une seule transition sans nous préoccuper des lignes d'insertion.*

Définissons maintenant les cases exposées des escaliers chinois qui nous serviront à la fois à démontrer le théorème de la section mais aussi à compter le cardinal des classes chinoises et de montrer en particulier que toutes les classes standard ont un cardinal impair.

Définition 7.14 (Cases exposées) *Soit* σ *un escalier. On dit qu'une case de* σ *est une* case exposée *si elle n'est pas nulle et si toutes les cases qui sont à l'ouest ou au sud-ouest le sont (autrement dit, c'est une case* $\sigma_{\alpha\beta}$ *vérifiant* $\sigma_{\alpha\beta} > 0$*, et* $\sigma_{\gamma\delta} = 0$ *pour tous* $\gamma \geq \alpha$ *et* $\delta > \beta$*).*

On appelle lettre exposée *une lettre qui indexe la colonne d'une case exposée.*

Les cases exposées d'un escalier chinois permettent de décrire directement (sans avoir à utiliser la récursivité de l'algorithme d'insertion) l'ensemble des modifications à faire sur un escalier lorsqu'on insère une lettre supplémentaire.

Proposition 7.15 *Soit* σ *un escalier. En appliquant l'algorithme d'insertion, on obtient une suite croissante de lettres de la forme* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ *qui prennent comme valeur l'ensemble des lettres exposées supérieures ou égales à* α_1*. De plus, on change les valeurs des lignes correspondant aux cases exposées en appliquant l'étape (3b). Les autres étapes intermédiaires correspondent à l'étape (3a). Enfin, la dernière étape* $(R'_{k-1}, \alpha_k) \xrightarrow{s_k} R'_k$ *correspond soit à l'application soit de l'étape (2) soit de l'étape (3c). En particulier,* α_k *est la plus grande lettre de la ligne* R'_k*.*

Démonstration. Considérons la suite $\alpha_i \xrightarrow{s_i} \alpha_{i+1}$. L'étape s_i est nécessairement soit le cas (3a) soit le cas (3b). S'il s'agit du cas (3a), alors $\alpha_{i+1} = \alpha_i$. S'il s'agit du cas (3b), alors $\alpha_{i+1} = \beta > \alpha_i$. La lettre β est donc une lettre exposée puisque si tel n'était pas le cas, il existerait une lettre exposée correspondant à une case au sud-ouest de β et on aurait fait l'insertion $\alpha_j \xrightarrow{3b} \gamma$ à une étape j antérieure.

De plus, le cas (1) ne peut jamais advenir lors de l'insertion dans un escalier chinois : d'après les étapes (3a) et (3b), la lettre α_i intervient toujours dans $\sigma^{(i-1)}$.

Si α_i est la plus grande lettre de $\sigma^{(i-1)}$, alors $i = k$ et l'algorithme termine en appliquant soit (2) soit (3b). □

Le lecteur pourra vérifier cette proposition sur les exemples donnés précédemment (exemples 7.12).

7.3.3 Le théorème de la section

Dans cette section, nous allons montrer que les mots canoniques forment une section du monoïde chinois, autrement dit que deux mots donnent le même escalier par l'algorithme d'insertion si et seulement s'il sont équivalents par les relations chinoises.

Commençons par quelques notations et un lemme simple qui montre qu'on pourra se limiter à considérer des mots de même évaluation.

Notation 7.16 *Soit ϵ l'escalier vide. On note $C(\sigma)$ l'ensemble des éléments w de A^* vérifiant $\epsilon.w = \sigma$.*

On note $C(w)$ la classe d'équivalence de w.

Le théorème 7.18, à venir, justifie complètement la similarité des notations.

Lemme 7.17 *Deux éléments de $C(\sigma)$ ont même évaluation.*

Démonstration. Posons

$$|\sigma|_\alpha = \sum_{\alpha>\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \sum_{\beta>\alpha} \sigma_{\beta\alpha} + \sigma_\alpha,$$

autrement dit, la somme de toutes les cases de l'équerre de α. Il est alors évident que $|\sigma.\alpha|_\alpha = |\sigma|_\alpha + 1$, et que $|\sigma.\alpha|_\beta = |\sigma|_\beta$, pour tout $\beta \neq \alpha$. Ainsi, si $\sigma = \epsilon.w$, l'entier $|\sigma|_\alpha$ compte le nombre de α qui ont été insérés dans ϵ, autrement dit le nombre de lettres α dans w, $|w|_\alpha$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat central de cette partie : le théorème de la section.

Théorème 7.18 *Les mots-escaliers chinois forment une section du monoïde chinois. Autrement dit,*

- *Propriété 1 : Deux mots v et w ayant le même résultat par l'algorithme d'insertion sont équivalents modulo les relations chinoises.*
- *Propriété 2 : Deux mots v et w équivalents modulo les relations chinoises ont même résultat par l'algorithme d'insertion.*

Démonstration. Propriété 1 : tout d'abord, nous pouvons supposer que v est le mot canonique.

Lemme 7.19 *Soit σ un escalier et soit $t = r(\sigma)$. Alors σ est exactement l'escalier obtenu en appliquant l'algorithme d'insertion à t.*

Démonstration. Ce lemme est évident car on remplit les lignes de σ de haut en bas en insérant t. □

Pour démontrer la propriété 1, nous allons mimer l'algorithme d'insertion via les réécritures chinoises élémentaires.

Ainsi, soit w un mot quelconque et soit $v = t = r(\sigma)$. On fait la démonstration par récurrence sur le nombre de lettres de w.

Si $|w| = 2$, il n'y a rien à démontrer. Si $|w| \geq 3$, on décompose w sous la forme $w_1\alpha$ où $\alpha \in A$. Par hypothèse de récurrence, la propriété 1 est vraie pour w_1 : si σ_1 est l'escalier obtenu en insérant w_1, le mot ligne canonique $t_1 = r(\sigma_1)$ est équivalent à w_1. Nous allons maintenant "simuler" l'algorithme d'insertion via les réécritures élémentaires, ce qui montrera qu'on peut réécrire $w_1\alpha$ en t. Nous allons raisonner par récurrence sur la taille de l'escalier σ_1.

Soit σ un escalier partiel de σ_1, soit t le mot ligne canonique de σ. Décomposons $\sigma = (\sigma',\ R_1)$ et $t = t'r$ où r est la ligne chinoise correspondant à R_1. Par hypothèse de récurrence, on a : pour tout β inférieur ou égal à la plus grande lettre de σ', le mot canonique t' concaténé avec β est équivalent au mot canonique de $\sigma'.\beta$. Conservons à l'esprit que $r \in (za)^*(zb)^* \dots (zy)^*z^*$ et insérons α dans r :

- Étape 1 : Non applicable.
- Étape 2 : $\sigma.\alpha = (\sigma',\ R_1')$, avec $r' = rz$. Aucune réécriture n'est nécessaire.

- Étape $3a$: En appliquant l'algorithme d'insertion, on obtient le tableau $\sigma.\alpha = (\sigma'.\alpha,\ R_1)$. Comme $\beta \leq \alpha < z$, on a

  $$r \in (za)^*(zb)^* \cdots (zy)^*.$$

  On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence puisque $\alpha < z$. Il ne reste alors plus qu'à vérifier que $r\alpha \equiv \alpha r$. Comme $\alpha \geq \beta$ pour tout $(z\gamma)$ apparaissant dans r, on a $\gamma \leq \beta \leq \alpha$, ce qui montre alors que $(z\gamma)\alpha \equiv \alpha(z\gamma)$: α échange avec toutes les paires de lettres $(z\gamma)$.
- Étape $3b$: En appliquant l'algorithme d'insertion, on obtient de la même façon $\sigma.\alpha = (\sigma'.\beta,\ R_1')$. Comme $\beta < z$, on a

  $$r \in (za)^*(zb)^* \dots (z\beta)^*.$$

  On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence puisque $\beta < z$. Il ne reste alors plus qu'à vérifier que $r\alpha \equiv \beta r'$, où r' est le mot ligne correspondant à R_1'.
  - Comme $\alpha < \beta$, on a $(z\beta)\alpha \equiv \beta(z\alpha)$ et, par suite, $(z\beta)$ est remplacé par $(z\alpha)$.
  - Comme β est défini comme la *plus grande* lettre dont la case est non nulle, on a, pour toute paire $(z\gamma)$ apparaissant dans r, la relation $(z\gamma)\beta \equiv \beta(z\gamma)$: β échange avec toutes les paires de lettres $(z\gamma)$, comme dans le cas (3a).
  - Pour toute paire $(z\gamma)$ apparaissant dans r avec $\gamma > \alpha$, on a

    $$(z\gamma)(z\alpha) \equiv z(z\alpha)\gamma \equiv (z\alpha)(z\gamma),$$

    ce qui montre que $(z\alpha)$ peut se déplacer jusqu'à la position correcte dans r',
- Étape $3c$: Écrivons

  $$r = (za)^*(zb)^* \dots (zy)^* z^k$$

  avec $k > 0$. Comme $\alpha < z$, on a $z^k\alpha \equiv (z\alpha)z^{k-1}$. De même que dans le cas (3b), on montre que la paire $(z\alpha)$ se déplace jusqu'à la position correcte et on conclut alors que $r\alpha \equiv r'$.

Propriété 2 : Nous devons vérifier que l'algorithme d'insertion est compatible avec les congruences chinoises. De même que dans le cas plaxique, il suffit de le montrer pour les réécritures élémentaires. Nous devons donc montrer

$$\sigma.cba = \sigma.bca = \sigma.cab,$$

pour tout $a \leq b \leq c$.

On fait la démonstration par récurrence sur p. L'hypothèse de récurrence est

> *Soit σ un p-escalier de plus grande lettre z et soient a, b, c trois lettres vérifiant $a \leq b \leq c \leq z$. Alors $\sigma.cba = \sigma.cab = \sigma.bca$.*

Si $p = 2$, on peut vérifier facilement que les deux insertions donnent le même résultat. Par exemple,

$$\begin{array}{|c|c|} \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & \sigma_a \\ \hline \sigma_b & \sigma_{ba} \\ \hline \end{array}\,.bba \quad = \quad \begin{array}{|c|c|} \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & \sigma_a \\ \hline \sigma_b{+}1 & \sigma_{ba}{+}1 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|c|} \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & \sigma_a \\ \hline \sigma_b & \sigma_{ba} \\ \hline \end{array}\,.bab.$$

Soit σ un p-escalier de plus grande lettre z. Soient a, b, c trois lettres vérifiant $a \leq b \leq c \leq z$. Supposons que la récurrence est vérifée pour l'ordre $p-1$. Décomposons alors σ par $\sigma = (\sigma',\ R)$ et considérons tous les cas possibles.

1. $c \neq z$. L'hypothèse de récurrence est donc valable pour tout triplet de lettres inférieures ou égales à c.

   1.1. La ligne R ne contient pas de lettre exposée, ou la lettre exposée d de la ligne R vérifie $d \leq a$. Dans ce cas, l'insertion de a, b et c n'interfère pas avec R, c'est-à-dire :

   $$a \xrightarrow{3a} (R, a), \quad b \xrightarrow{3a} (R, b) \quad \text{et} \quad c \xrightarrow{3a} (R, c).$$

   Par hypothèse de récurrence, on a alors $\sigma'.cba = \sigma'.cab = \sigma'.bca$ et, par suite,

   $$\sigma.cba = \sigma.cab = \sigma.bca.$$

   1.2. La lettre exposée de la ligne R est a' avec $a < a' \leq b$. Alors la suite d'insertion de a commence alors par $a \xrightarrow{3b} (R', a')$, tandis que b et c donnent $b \xrightarrow{3a} b$ et $c \xrightarrow{3a} c$. On a donc

   $$\sigma.cba = (\sigma'.cba',\ R'), \quad \sigma.bca = (\sigma'.bca',\ R') \\ \text{et} \quad \sigma.cab = (\sigma'.ca'b,\ R').$$

   On applique alors l'hypothèse de récurrence à σ', a', b et c et on en déduit le résultat. Le diagramme suivant décrit la transformation de la ligne R en la ligne R'.

   $$\begin{array}{|c|c|c|c|c|l} \cline{1-5} 0 \;—\; 0 & \sigma_{za'} & \cdots & \sigma_{za} & \cdots & R \\ \cline{1-5} \multicolumn{6}{c}{} \\ \cline{1-5} 0 \;—\; 0 & \sigma_{za'}-1 & \cdots & \sigma_{za}+1 & \cdots & R' \\ \cline{1-5} \multicolumn{1}{c}{z \quad\; b} & \multicolumn{1}{c}{a'} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{} & \end{array}$$

1.3. La lettre exposée de la ligne R est b' avec $b < b' \leq c$. On a encore dans ce cas $c \xrightarrow{3a} c$, ce qui fait que nous avons uniquement à examiner ce que donnent les insertions de ba et de ab.

Insérons tout d'abord ba dans σ. Le début de la suite d'insertion de b est : $b \xrightarrow{3b} (R_1, b')$. Soit a' la lettre exposée de R_1. On a nécessairement $b' \geq a' \geq b$. L'insertion de a dans le nouveau tableau est donc $a \xrightarrow{3b} (R', a')$.

Insérons ab dans σ. Le début de la suite d'insertion de a est : $a \xrightarrow{3b} (R_2, b')$. Soit d la lettre exposée de R_2. Si $d \geq b$, on a alors $d = a'$ et $b \xrightarrow{3b} (R', a')$. Si $d < b$, on a $b = a'$ et $b \xrightarrow{3b} (R', a')$.

Ainsi $\sigma.cba = \sigma.cab = (\sigma'.cb'a',\ R')$, et $\sigma.bca = (\sigma'.b'ca',\ R')$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à σ', a', b' et c et on en déduit le résultat. Le diagramme suivant décrit la transformation de la ligne R en la ligne R'.

0 — 0	$\sigma_{zb'}$	···	$\sigma_{za'}$	···	σ_{zb}	···	σ_{za}	···	R
0 — 0	$\sigma_{zb'}-1$	···	$\sigma_{za'}-1$	···	$\sigma_{zb}+1$	···	$\sigma_{za}+1$	···	R'
z	b'		a'		b		a		

1.4. La lettre exposée de la ligne R est c' avec $c \leq c'$.

Insérons tout d'abord cba dans σ. Le début de la suite d'insertion de c est : $c \xrightarrow{3b} (R_1, c')$ ou $c \xrightarrow{3c} R_1$. Soit b' la lettre exposée de R_1. On a nécessairement $c' \geq b' \geq c$. On écrit alors le début de la suite d'insertion de b : $b \xrightarrow{3b} (R_2, b')$ ou $b \xrightarrow{3c} R_2$. Soit a' la lettre exposée de R_2. On a nécessairement $b' \geq a' \geq b$. On écrit alors le début de la suite d'insertion de a : $a \xrightarrow{3b} (R', a')$ ou $a \xrightarrow{3c} R'$.

En examinant l'insertion de bca et de cab dans σ assez long mais identique aux cas présentés ci-dessus. Il vient donc finalement

$$\sigma.cba = \sigma.cab = \sigma.bca = (\sigma'.c'b'a',\ R'),$$

et le résultat est démontré.

2. $c = z$. Dans ce cas, l'insertion de c est toujours la même : $c \xrightarrow{2} R_1$, où c est une lettre exposée de R_1.

2.1 La ligne R ne contient pas de lettre exposée ou la lettre exposée d de la ligne R vérifie $d \leq b$. On a alors

$$\sigma.cba = \sigma.cab = \sigma.bca = (\sigma'.b,\ R'),$$

ce qui montre le résultat. Le diagramme suivant décrit la transformation de la ligne R en la ligne R'.

0 — 0	σ_{cb}	$\cdots$	σ_{ca}	$\cdots$	R
0 — 0	σ_{cb}	$\cdots$	$\sigma_{ca}+1$	$\cdots$	R'
c	b		a		

2.2. La lettre exposée de R est b' avec $c \geq b' > b$. On peut avoir $c = b'$ ou $c > b'$, mais cela n'a aucune importance et, dans tous les cas, on a

$$\sigma.cba = \sigma.cab = \sigma.bca = (\sigma'.b',\ R').$$

Le diagramme suivant décrit la transformation de la ligne R en la ligne R'.

— 0	$\sigma_{cb'}$	$\cdots$	σ_{cb}	$\cdots$	σ_{ca}	$\cdots$	R
— 0	$\sigma_{cb'}-1$	$\cdots$	$\sigma_{cb}+1$	$\cdots$	$\sigma_{ca}+1$	$\cdots$	R'
	b'		b		a		

Ceci termine la démonstration de la propriété 2 et, par suite, termine la démonstration du théorème. □

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la propriété 2.

Corollaire 7.20

– *Propriété 3 : Pour tous mots canoniques t et t', la relation $t \equiv t'$ implique $t = t'$.*

Soit w un mot. Soit $\sigma = \epsilon.w$. Le mot canonique de σ est égal au mot canonique d'un élément quelconque de $C(w)$. De plus, ce mot détermine de façon unique σ et, par suite, $C(w)$.

7.3.4 Propriétés duales

On définit le *mot canonique colonne* d'un escalier de même que le mot canonique ligne (voir section 7.11).

On dit qu'un mot w est une *colonne chinoise* de type a si elle est de la forme

$$w = (a)^{n_a} \ldots (ba)^{n_b}\,(za)^{n_z}$$

où $a, b, \ldots, z$ désigne un intervalle final de A commençant avec a et où tous les n_α sont entiers.

Nous définissons de même la colonne chinoise associée à une colonne d'un escalier donné (on lit la colonne de haut en bas).

On dit qu'un mot w est un *mot-escalier colonne* si on peut l'écrire sous la forme

$$w = l'_a\, l'_b \ldots\, l'_z \tag{7.6}$$

où les l'_α sont les colonnes chinoises de types respectifs α.

Définition 7.21 (Lecture colonne) *Le* mot canonique colonne *d'un escalier chinois σ est le mot w obtenu en concaténant toutes les colonnes chinoises correspondantes aux colonnes de σ, de la droite vers la gauche. On écrit alors $w = c(\sigma)$.*

La proposition suivante fait le rapprochement entre la lecture ligne et la lecture colonne d'un escalier.

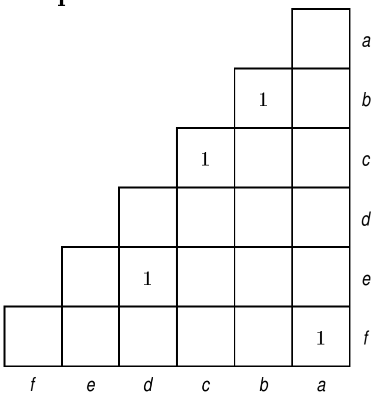
Proposition 7.22 *Pour tout escalier σ, les mots $r(\sigma)$ et $c(\sigma)$ sont équivalents pour la congruence chinoise.*

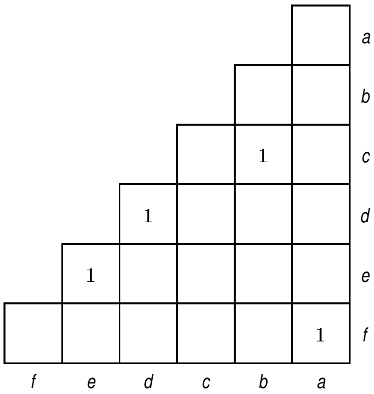
Démonstration. Il est clair qu'on obtient σ en insérant $c(\sigma)$. On en déduit le résultat de la propriété 1. □

Le résultat suivant donne une interprétation géométrique simple de l'involution de Schützenberger sur les escaliers. Définissons la seconde diagonale d'un escalier σ sur l'alphabet $A = \{a, b, \ldots, z\}$ comme la droite joignant les cases σ_{az}, $\sigma_{by}, \ldots$

Proposition 7.23 *Soit σ un escalier. L'involution de Schützenberger agit sur σ par symétrie par rapport à la seconde diagonale de σ.*

Exemple 7.24

$\sigma =$ 

$\longrightarrow \quad \#(\sigma) =$ 

Cet exemple contient les mêmes classes chinoises que l'exemple de la figure 7.2.

7.4 Inversion de l'algorithme d'insertion

Nous avons remarqué que dans le cas des permutations de longueur au plus 5, toutes les classes chinoises avaient un cardinal impair. Pour démontrer cette conjecture, nous nous sommes alors intéressés de plus près à l'algorithme d'insertion et, par suite, nous avons cherché le moyen de "revenir en arrière". Nous présentons ici le résultat de cette recherche.

Dans cette section, nous commençons par définir cet algorithme inverse puis nous en déduisons quelques propriétés du cas standard.

Définition 7.25 (Escalier standard) *Soit σ un escalier. On dit que σ est un* escalier standard *si un mot de $C(\sigma)$ est une permutation. On dit de plus que σ est un* escalier standard complet *si c'est une permutation de toutes les lettres de l'alphabet.*

D'après le lemme 7.17, nous savons que σ est un escalier standard si et seulement si chaque équerre de σ contient au plus un 1, les autres valeurs étant nulles. De même, σ est un escalier standard complet si et seulement si chaque équerre de σ contient exactement un 1.

Dans ce cas, nous pouvons identifier les cases non nulles de l'escalier avec les lettres de l'alphabet. En particulier, nous parlerons de la lettre α dans l'escalier au lieu de «la case non nulle correspondant à α.»

7.4.1 L'inverse de l'algorithme d'insertion

Pour décrire l'ensemble des éléments de $C(\sigma)$, nous avons besoin de trouver tous les escaliers obtenus lors d'une insertion $\epsilon.a_1.\dots.a_k$.

Définition 7.26 (Cases et lettres enlevables)
Soit σ un escalier. On appelle case enlevable *de σ une case non nulle telle que toutes les cases à son sud-ouest sont nulles. On appelle* lettre enlevable *une lettre dont la colonne correspondante contient une case enlevable.*

Remarquons que dans le cas standard, les cases enlevables et les cases exposées (voir définition 7.14) sont les mêmes.

Algorithme inverse de l'algorithme d'insertion.
Soient σ un escalier et $\sigma_{\gamma\delta}$ une case enlevable de σ. L'algorithme définit un ensemble de règles de réécritures $\sigma \xrightarrow[\delta]{} \tau$ comme suit :

- Règle 1 : si δ est sur la diagonale de σ, alors τ est l'escalier obtenu à partir de σ en retranchant 1 à la case enlevable σ_δ.
- Règle 1′ : si δ n'est pas sur la diagonale de σ, alors τ est l'escalier obtenu à partir de σ en soustrayant 1 à la case enlevable $\sigma_{\gamma\delta}$ et en ajoutant 1 à la case diagonale σ_γ.
- Règle $2_{\tilde{\delta}}$: soit $\tilde{\delta}$ une lettre enlevable telle que $\tilde{\delta} > \delta$. En particulier, on a que $\tilde{\delta}$ est plus haut que δ dans σ et, par suite, que la case enlevable $\sigma_{\gamma\delta}$ vérifie $\gamma > \delta$. Soit $\tilde{\sigma}$ l'escalier obtenu à partir de σ en enlevant toutes les lignes sous γ incluse. On choisit alors récursivement $\tilde{\tau}$ par $\tilde{\sigma} \xrightarrow[\tilde{\delta}]{} \tilde{\tau}$ et on construit τ en lui ajoutant par dessous, tout d'abord la ligne obtenue en mettant un 1 dans la case $\sigma_{\gamma\tilde{\delta}}$ et en enlevant 1 à la case $\sigma_{\gamma\delta}$, puis les lignes de σ d'indice strictement supérieur à γ.
  Formellement, $\tilde{\sigma}$ est défini sur $A' = \{\alpha \in A \mid \alpha < \gamma\}$ par $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ pour tous $\alpha < \gamma$ et β.
  De même, $\tau_{\alpha\beta} = \tilde{\tau}_{\alpha\beta}$ pour tous $\alpha < \gamma$ et β ; $\tau_{\gamma\beta} = \sigma_{\gamma\beta}$ pour tous β sauf δ, $\tilde{\delta}$; $\tau_{\gamma\delta} = \sigma_{\gamma\delta} - 1$; $\tau_{\gamma\tilde{\delta}} = 1$; $\tau_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ pour $\alpha = \gamma$ et tous β sauf δ, $\tilde{\delta}$; $\tau_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ et tous $\alpha > \gamma$ et β.
  La figure 7.4 montre un déroulement graphique de l'algorithme.

On définit alors l'ensemble $(\sigma \xrightarrow[\delta]{} .)$ par

$$
\begin{array}{lll}
(\sigma \xrightarrow[\delta]{} .) & = \{\tau \in \Sigma \mid \sigma \xrightarrow[\delta]{} \tau\} & \text{si } \delta \text{ est une case enlevable de } \sigma, \\
(\sigma \xrightarrow[\alpha]{} .) & = \emptyset & \text{si } \alpha \text{ n'est pas une case enlevable de } \sigma.
\end{array}
$$

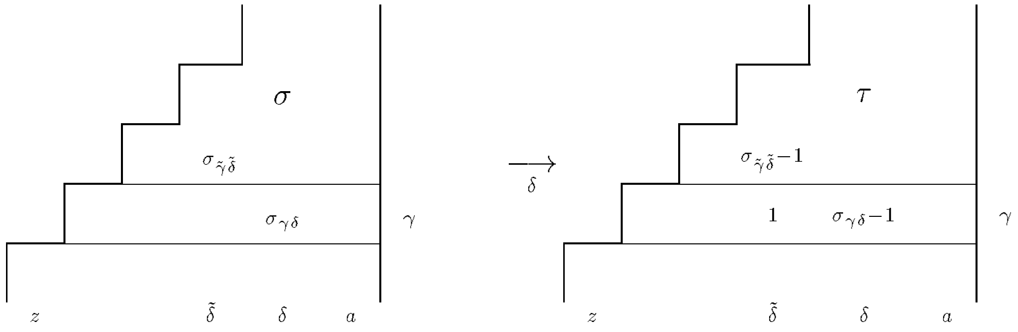


FIG. 7.4 : Fonctionnement de la règle $2_{\tilde\delta}$

Exemple 7.27 Considérons le mot canonique ligne *cbdfega*. Nous montrons figure 7.5 l'ensemble des escaliers obtenus à partir de *cbdfega* en appliquant l'algorithme 7.4.1.

Nous allons maintenant montrer que l'algorithme est correct.

Théorème 7.28 *Soit σ un escalier sur n lettres. Définissons*

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma) &= \{\delta \in A \mid \quad \exists\, \sigma' \in \Sigma',\ \sigma = \sigma'.\delta\}\,,\\ \sigma.\alpha^{-1} &= \{\sigma' \in \Sigma \mid \quad \sigma = \sigma'.\alpha\}\,.\end{aligned}$$

On a alors

- *$\Delta(\sigma)$ est l'ensemble des lettres enlevables,*
- *$\sigma.\alpha^{-1}$ est égal à $(\sigma \xrightarrow[\alpha]{} .)$ pour toute lettre α.*

La démonstration de ce théorème est une conséquence directe des deux prochains lemmes.

Lemme 7.29 $\Delta(\sigma)$ *est l'ensemble des lettres enlevables de σ.*

Démonstration. Si δ est une lettre enlevable, si on applique la règle 1 ou la règle 1' à σ, on obtient un escalier τ qui vérifie automatiquement $\tau.\delta = \sigma$. Réciproquement, soient τ un escalier et α une lettre tels que $\tau.\alpha = \sigma$. Considérons la suite d'insertions de α. À la première case exposée vérifiant $\sigma_{\gamma\beta}$ située à gauche de la colonne de α, l'étape de la suite d'insertions se lit $\alpha \xrightarrow{3b} \beta$ ou $\alpha \xrightarrow{3c} \beta$. Cette étape crée donc une case enlevable dans $\sigma_{\gamma\alpha}$.[2] S'il existe

[2]Dans le cas standard, la case exposée $\sigma_{\gamma\beta} - 1$ disparaît : ceci explique pourquoi les cases exposées et les cases enlevables sont les mêmes dans ce cas.

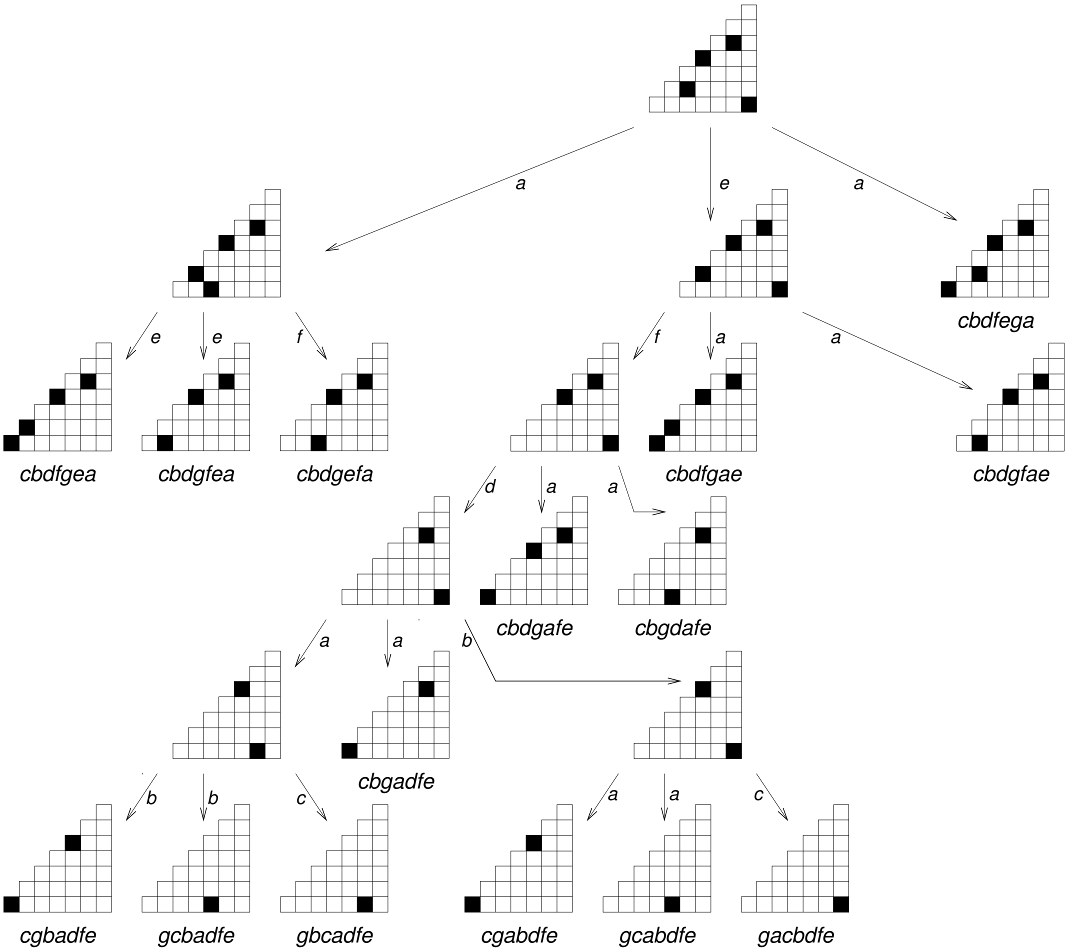


FIG. 7.5 : La classe du mot *cbdfega* a pour cardinal 15

une case exposée à gauche de la colonne de α, la suite d'insertions se termine en appliquant Étape 2 et créé une case enlevable dans la case σ_α. $\square$

Lemme 7.30 *$(\sigma \underset{\alpha}{\longrightarrow} .)$ et $\sigma.\alpha^{-1}$ sont les mêmes pour toute lettre $\alpha \in \Delta(\sigma)$.*

Démonstration. On fait la démonstration par récurrence sur la taille des escaliers.

Tout d'abord, montrons que $(\sigma \underset{\alpha}{\longrightarrow} .) \subset \sigma.\alpha^{-1}$. En fait, nous avons déjà montré dans le lemme 7.29 les cas de la règle 1 et de la règle 1'. Reprenons les notations de la règle 2. D'après l'hypothèse de récurrence, $\tilde{\tau}.\tilde{\delta} = \tilde{\sigma}$. En regardant alors de près le cas (3b), on en déduit que $\tau.\delta = \sigma$.

Réciproquement, considérons la suite d'insertions de $\sigma.\alpha$. Si la suite de lettres $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ est constante et si la dernière étape est (2), alors $\sigma.\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} \sigma$ d'après la règle 1 ; Si la dernière étape est (3c), alors $\sigma.\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} \sigma$ d'après la règle 1'.

Si la suite de lettres $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ n'est pas constante, la suite d'insertions contient nécessairement une étape de la forme $\alpha = \alpha_i \xrightarrow{3b} \alpha_{i+1} = \beta$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\sigma^{(i)}.\beta \underset{\beta}{\longrightarrow} \sigma^{(i)}$, et, par suite, $\sigma.\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} \sigma$ d'après la règle 2_β. □

7.4.2 Applications

Théorème 7.31 *Dans le cas standard, toutes les classes ont un cardinal impair.*

Démonstration. Nous allons faire la démonstration par récurrence sur la taille des escaliers.

L'ensemble $C(\sigma.A^{-1})$ est une union disjointe de classes chinoises sur $n-1$ lettres. Pour tout $\sigma' \in \sigma.A^{-1}$, si on ajoute à un élément de $C(\sigma')$ la lettre δ vérifiant $\sigma'.\delta = \sigma$ on induit une bijection entre $C(\sigma)$ et $C(\sigma.A^{-1})$.

De plus, comme par hypothèse de récurrence, toute classe standard possédant $n-1$ lettres est de cardinal impair, cela revient à démontrer que le nombre d'éléments de $\sigma.A^{-1}$ est impair (une somme de nombres impairs est impaire si et seulement si elle possède un nombre impair de termes).

Nous sommes donc ramenés à compter le nombre d'escaliers sur $n-1$ lettres qui donnent σ quand on leur insère la lettre manquante.

$$\left|\sigma.A^{-1}\right| = \sum_{\delta\in\Delta(\sigma)} \left|\sigma.\delta^{-1}\right|$$

Utilisons maintenant l'algorithme inverse de l'algorithme d'insertion puisqu'il énumère tous les différents escaliers qui permettent d'obtenir un escalier donné.

Nous suggérons au lecteur de suivre la suite de la démonstration à l'aide de la figure 7.5.

Calculons le cardinal de $\sigma.\delta^{-1}$ par récurrence. Comme nous sommes dans le cas standard, il y a au plus une case enlevable par ligne. Si δ est la plus grande case enlevable de σ, on a $|\sigma.\delta^{-1}| = 1$, puisqu'on ne peut pas appliquer la règle 2. Sinon, nous pouvons appliquer la règle 1' ou la règle 2 pour tout $\delta' > \delta$. La règle 1' (δ se déplace sur la diagonale) compte pour un escalier. La règle 2 (δ se déplace sous une case enlevable sur grande δ') compte pour $\left|\sigma.\delta'^{-1}\right|$, c'est-à-dire :

$$\left|\sigma.\delta^{-1}\right| = 1 + \sum_{\delta'>\delta} \left|\sigma.\delta'^{-1}\right|$$

Ainsi, si δ est la k-ième lettre enlevable, le cardinal de $\sigma.\delta^{-1}$ est 2^{k-1}. Finalement, le cardinal de $\sigma.A^{-1}$ ne dépend que de $|\Delta(\sigma)|$:

$$\left|\sigma.A^{-1}\right| = 2^{|\Delta(\sigma)|} - 1.$$

□

Proposition 7.32 *Le mot ligne canonique d'un escalier est le plus petit mot de sa classe pour l'ordre lexicographique.*

Démonstration. Grâce à la compatibilité des relations chinoises avec la standardisation, nous pouvons nous limiter au cas standard. Définissons un ordre total sur les escaliers : $\sigma < \sigma'$ si et seulement si les mots canoniques correspondants t et t' vérifient $t < t'$. En utilisant une récurrence, nous allons montrer que si $\sigma < \sigma'$, le plus petit élément de $C(\sigma)$ est inférieur au plus petit élément de $C(\sigma')$.

D'après le théorème 7.28, nous savons que chaque escalier est obtenu en enlevant une case enlevable à chaque étape. Mais, une fois une lettre retirée, on se retrouve avec un escalier sur $n-1$ lettres, sur lequel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. On définit alors $\sigma_\perp$ comme l'escalier obtenu en appliquant les règles 1 ou 1' à l'élément enlevable le plus haut (selon que celui-ci est sur la diagonale ou non).

Lemme 7.33 *$\sigma_\perp$ est le plus petit escalier de $\sigma.A^{-1}$.*

Démonstration. Soit σ' un escalier obtenu en appliquant les règles de réécriture à σ. Soit d la plus petite ligne qui diffère entre σ' et σ. Alors, si d est la ligne non nulle la plus basse de σ, on a $\sigma' = \sigma_\perp$ et $\sigma_\perp < \sigma$. En effet, si tel n'etait pas le cas, on verrait facilement que $\sigma' > \sigma$. Donc $\sigma_\perp < \sigma'$. □

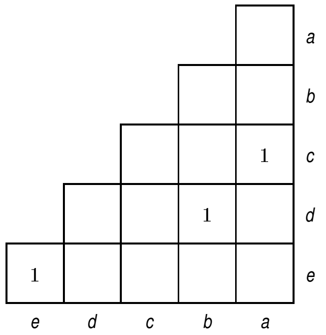
Nous en déduisons alors que le plus petit élément d'une classe est obtenu en retirant les lettres dans chaque ligne de celle du bas à celle du haut et dans chaque ligne de gauche à droite (dans le cas non standard). On obtient exactement le mot ligne canonique de σ. □

7.4.3 Représentation par liens

Dans cette section, nous présentons une façon plus compacte de représenter les classes standard chinoises. Nous verrons plus loin qu'elles permettent d'étudier les cardinaux des classes et de travailler sur les motifs des classes. Ce sera essentiellement le but de la section 7.6.3.

Définition 7.34 (Liens) *Soit σ un escalier. On utilise σ pour définir une involution partielle ρ sur A : pour toute case non vide $\sigma_{\alpha\beta}$, l'application ρ échange α and β.*

La représentation par liens $\lambda(\sigma)$ *de σ est la représentation de ρ obtenue ainsi : on dispose toutes les lettres apparaissant dans σ en ordre lexicographique et on relie deux lettres si elles apparaissent ensembles dans σ. Une lettre sur la diagonale est reliée à elle-même. Par exemple,*

si $\sigma =$ 

, *on a* $\lambda(\sigma) =$ *abcde.*

Il est clair que la représentation par liens $\lambda(\sigma)$, l'escalier standard correspondant et l'involution ρ associée sont toutes des représentations, la représentation par liens étant la plus compacte. Par exemple, on peut réécrire les exemples des figures 7.1 et 7.2 :

$$\lambda(\mathit{cbda}) = \mathit{abcd}, \quad \lambda(\mathit{bcedfa}) = \mathit{abcdef}, \quad \lambda(\mathit{cbdefa}) = \mathit{abcdef}.$$

Définition 7.35 (Grandes lettres et petites lettres)
Soit σ un escalier standard, ρ l'involution correspondante. On appelle grande lettre *toute lettre α vérifiant $\rho(\alpha) < \alpha$. On appelle* petite lettre *toute lettre α vérifiant $\rho(\alpha) > \alpha$ et* lettreneutre *toute lettre α vérifiant $\rho(\alpha) = \alpha$.*

Dans la représentation des classes par escaliers, les grandes lettres indicent les lignes contenant des 1, les petites lettres indicent les colonnes qui contiennent des 1 et les lettres neutres apparaissent sur la diagonale.

Exemple 7.36 Considérons la classe de *abdc*. Sa représentation par liens est *abcd*. Les lettres *a* et *b* sont neutres tandis que *c* est petite et *d* est grande.

7.5 La grande classe

Nous consacrons cette section à l'étude de problèmes d'énumération des classes standard du monoïde chinois. Nous allons montrer, à l'aide d'un algorithme de plongement, qu'il existe une classe de cardinal supérieur aux autres. Nous construirons dans ce cas une bijection entre les mots d'une classe donnée et les mots de Dyck.

7.5.1 La grande classe

Définition 7.37 (Grande classe) *Notons ω la permutation maximale sur n lettres.*

$$\omega = zy \dots ba.$$

On appelle grande classe $Gr(n) = Gr(A)$ *la classe de ω.*

Remarque 7.38 Soit $p = [\frac{n}{2}]$. Dans $Gr(n)$, les grandes lettres sont les p plus grandes lettres de l'alphabet et les petites lettres sont les p plus petites. Si n est impair, la $(p+1)$-ième lettre est neutre et si n est pair, il n'y a pas de lettre neutre. La i-ième lettre est associée à la $(n-i)$-ième lettre. Enfin, les cases non nulles sont exactement les cases de la seconde diagonale de σ et ne contiennent que des 1.

Exemple 7.39 Nous avons dessiné la classe $Gr(6)$ figure 7.6.

Dans le cas standard, les cases non nulles de l'escalier correspondent aux lettres neutres ou aux paires composées d'une grande lettre et d'une petite lettre. Étudions ce qu'il advient d'une lettre donnée lors de l'algorithme d'insertion.

Par convention, la lettre α qu'on va insérer est petite.

- Si $\alpha \xrightarrow{3a} \alpha$, il ne se passe rien. La lettre α ne change pas de statut et monte l'escalier.
- Si $\alpha \xrightarrow{3a} \beta$, alors α remplace et déloge une autre petite lettre β, qui monte l'escalier à sa place.
- Si $\alpha \xrightarrow{3b} R$, alors α devient une lettre neutre et s'arrête.
- Si $\alpha \xrightarrow{3c} R$, alors α est insérée sur une ligne où β était une lettre neutre. Dans ce cas, α est encore petite et β devient une grande lettre.

Nous avons maintenant une image claire du déroulement de l'algorithme d'insertion : les petites lettres montent l'escalier, sont remplacées ensuite par des petites lettres plus grandes jusqu'à ce qu'elles arrivent à la ligne qu'elles

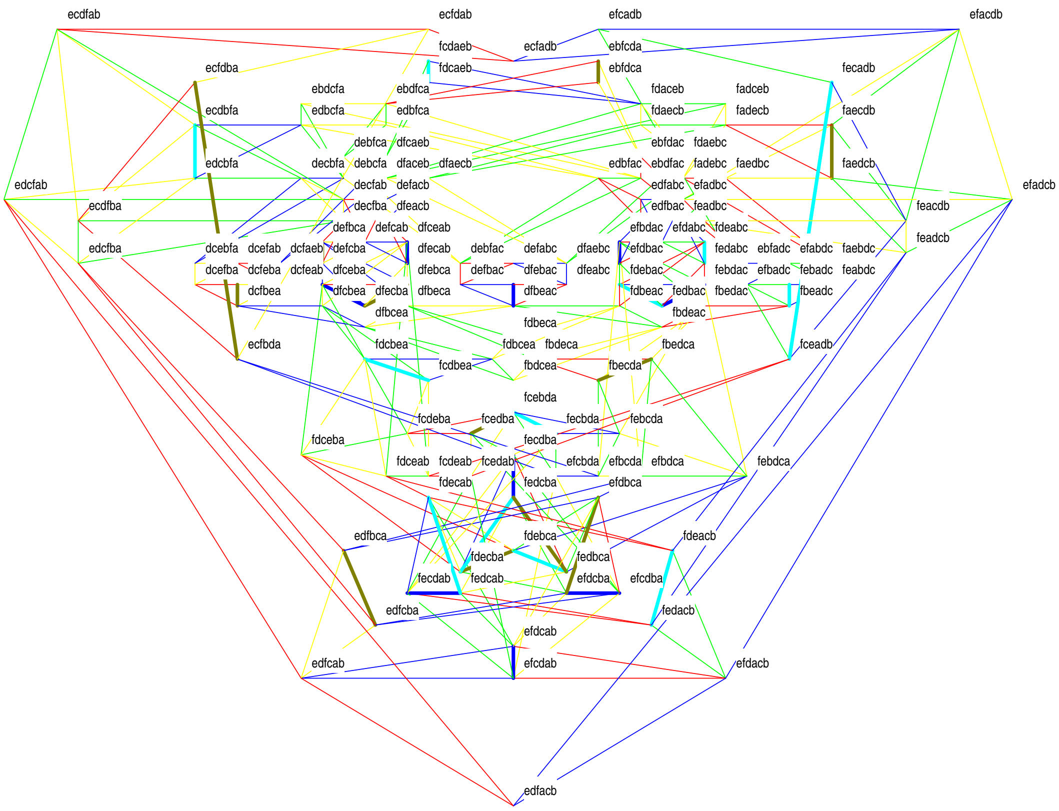


FIG. 7.6 : La grande classe *fedcba* : $\lambda(\textit{dcebfa}) = \textit{abcdef}$.

indexent où elles deviennent neutres, où finalement elles peuvent être délogées pour devenir grandes lettres. En particulier, une petite lettre peut devenir neutre ou grande alors qu'une lettre neutre ne peut devenir que neutre ou grande et qu'une grande est condamnée à le rester.

Par exemple, considérons un peu plus précisément les éléments de $Gr(6)$. Puisque *a*, *b*, *c* sont des petites lettres, nous pouvons déterminer quels mots ne peuvent pas être préfixes d'un mot de $Gr(6)$. En particulier, aucun mot de $Gr(6)$ ne peut commencer par *a*, *b* ou *c*. Aucun mot ne peut non plus commencer par *fab*, *fbc* ou *fac*. Plus généralement, un mot peut être préfixe d'un mot de $Gr(6)$ seulement si tous ses préfixes contiennent plus de grandes lettres (*d*, *e*, *f*) que de petites (*a*, *b*, *c*). Nous verrons dans la section 7.5.2 une description plus précise de ces préfixes.

Nous allons maintenant montrer que la grande classe est la classe de plus grand cardinal du monoïde chinois. En fait, elle contient toutes les autres classes dans le sens suivant : on peut plonger toute classe dans la grande classe en préservant complètement le graphe des réécritures de la première.

Définition 7.40 (Plongement) *Soient u, v, w trois mots. On dit que ces trois mots sont* congrus à une réécriture près *s'il existe trois lettres a, b, c, un mot x de longueur k et un autre mot y tels que*

$$\{u, v, w\} = \{x.cba.y, x.cab.y, x.bca.y\}.$$

On appelle plongement d'une classe chinoise C_1 *dans une autre classe chinoise C_2 une injection i de C_1 dans C_2 qui préserve le graphe de congruences. Autrement dit, si on a trois mots u, v et w congrus à une réécriture près de C_1, les trois mots $i(u)$, $i(v)$ et $i(w)$ sont eux-aussi congrus à une réécriture près.*

Pour montrer que la grande classe est la classe de plus grand cardinal du monoïde chinois, nous allons construire un algorithme qui plonge toute classe différente de la plus grande dans une classe plus grande. Ainsi, chaque classe appartient à une suite de classes croissantes qui se termine nécessairement sur la grande classe.

Algorithme de plongement élémentaire.
Soit σ un escalier standard complet tel que $C(\sigma)$ ne soit pas la grande classe. Trouver un élément β tel que $\sigma_{\beta\rho(\beta)}$ soit la case la plus à droite non exposée. Soit γ le successeur de β et notons t_β^γ la transposition élémentaire qui échange β et γ et laisse les autres lettres invariantes. L'algorithme définit cette transposition comme le plongement élémentaire.

Proposition 7.41 *L'algorithme décrit ci-dessus est correct, c'est-à-dire que β existe si et seulement si $C(\sigma)$ n'est pas la grande classe. De plus, dans ce cas, t_β^γ est un plongement.*

Démonstration. Le seul escalier standard n'ayant aucune case exposée est l'escalier de la grande classe. Autrement, β existe et est nécessairement différent de la plus grande lettre de l'alphabet, ce qui montre que γ est aussi bien défini.

Dans ce cas, soient u, v et w trois éléments de $C(\sigma)$ congrus à une réécriture près. Si ni β ni γ n'apparaissent dans abc, la transposition t_β^γ ne change pas la relation élémentaire du tout. Si seulement un des deux éléments de β ou γ apparaît dans abc, la transposition t_β^γ ne change pas les ordres relatifs des lettres de abc, ce qui montre que dans ce cas encore il existe une relation de réécriture entre les images de cba, cab et bca. Supposons maintenant que β et γ apparaissent tous deux dans abc. Puisque β et γ sont deux lettres consécutives, il n'y a que deux cas à considérer :

- $\beta < \gamma \leq c$, mais on a alors $c\gamma\beta \equiv c\beta\gamma \equiv \gamma c\beta$
- $a \leq \beta < \gamma$, mais on a alors $\gamma\beta a \equiv \gamma a\beta \equiv \beta\gamma a$.

Nous prétendons qu'aucun élément de $C(\sigma)$ ne contient une telle suite. Plus précisément, γ apparaît après β dans tout élément de $C(\sigma)$.

En effet, pour remplir la case $\sigma_{\beta\rho(\beta)}$, l'algorithme d'insertion doit contenir une suite d'insertions qui se termine en insérant $\rho(\beta)$ dans la ligne de β. Considérons l'équerre de γ à ce moment-là.

- Il ne peut pas y avoir de 1 dans une colonne indexée par une lettre α avec $\alpha > \rho(\beta)$, puisque la suite d'insertions consiste en une suite croissante de lettres et puisque l'équerre entière de γ se trouve strictement sous la ligne de β.
- Il ne peut pas y avoir de 1 dans une case $\sigma_{\gamma\alpha}$ avec $\alpha < \rho(\beta)$: si tel était le cas, on aurait $\rho(\gamma) < \rho(\beta)$ et, par suite, γ ne serait pas une lettre exposée, ce qui contredirait la définition de β.

Donc l'équerre de γ est vide à ce moment-là, ce qui montre que γ apparaît après β dans tout élément de $C(\sigma)$. Donc chaque réécriture élémentaire de $C(\sigma)$ est encore valide après action de la transposition. Alors, par transitivité, les images des éléments de $C(\sigma)$ sont toutes équivalentes par les relations chinoises. □

Théorème 7.42 *Étant donné un entier n, toutes les classes sur n lettres ont un cardinal inférieur ou égal à celui de $Gr(n)$. Plus précisément, pour chaque classe chinoise, il existe une permutation de l'alphabet qui plonge cette classe dans $Gr(n)$. Enfin, $Gr(n)$ est la seule classe de son cardinal.*

Démonstration. Commençons avec une classe chinoise $C(\sigma_0)$ à laquelle on applique l'algorithme 7.5.1 itérativement. On obtient une suite de classes chinoises de plus en plus importantes $C(\sigma_i)$. De plus, pour tout $i \leq j$, la permutation obtenue est un plongement de $C(\sigma_i)$ dans $C(\sigma_j)$.

De plus, chaque plongement élémentaire injecte une classe chinoise $C(\sigma_i)$ dans une autre classe chinoise $C(\sigma_{i+1})$ de cardinal supérieur ou égal.

Montrons que ce processus se termine. Soit u un élément de $C(\sigma_0)$. Notons u_i son image itérée dans $C(\sigma_i)$. Si $C(\sigma_i) \neq Gr(n)$, l'algorithme fournit une transposition t_β^γ qui place β et γ dans le bon ordre. Autrement dit, le nombre d'inversions de $u_{i+1} = t_\beta^\gamma(u)$ est strictement plus grand que le nombre d'inversions de u_i. Comme il n'y a qu'un nombre fini de suites de permutations ayant un nombre d'inversions strictement croissant, nous concluons qu'il existe un entier j tel que soit u_j est la permutation maximale, soit l'algorithme échoue, c'est-à-dire $u_j \in Gr(n)$. Nous pouvons donc conclure que toutes les classes se plongent à l'aide d'une permutation dans $Gr(n)$.

Montrons maintenant que toutes les autres classes ont un cardinal strictement inférieur à celle-ci.

En fait, nous allons préciser un peu l'analyse de l'algorithme de plongement élémentaire. Nous avons montré dans la démontration de la proposition 7.41 que tous les mots de la classe initiale ont tous la lettre β avant γ. Il est alors clair que toutes les images de ces éléments par la transposition t_β^γ ont tous γ avant β. Ainsi, si on regarde les congruences élémentaires qui mettent en jeu β et γ, il faut considérer deux cas. Soit aucun mot de la classe initiale n'ont de suite de la forme $\beta c \gamma$ ou $\beta a \gamma$, auquel cas t_β^γ ne fait que remettre β et γ dans le bon ordre, soit la classe initiale contient une telle suite, auquel cas t_β^γ ajoute une nouvelle congruence élémentaire et plonge alors la classe initiale dans une classe strictement plus grande.

Revenons à la suite de classes chinoises croissantes $C(\sigma_0), \ldots, C(\sigma_{j-1})$, $C(\sigma_j) = Gr(n)$. Considérons la dernière transposition t_b^c qui envoie $C(\sigma_{j-1})$ dans $Gr(n)$. Comme ω appartient à $Gr(n)$, ce mot contient une suite du type $\gamma\beta a$ ou $c\gamma\beta$ et, par extension, $Gr(n)$ contient l'ensemble de toutes les réécritures élémentaires, $c\gamma\beta \equiv c\beta\gamma \equiv \gamma c \beta$ (resp. $\gamma\beta a \equiv \gamma a \beta \equiv \beta\gamma a$). En revenant à la classe $C(\sigma_{j-1})$, on voit qu'elle ne peut pas contenir le motif tranposé $c\gamma\beta$ (resp. $\gamma\beta a$) puisque ce mot est aussi dans $Gr(n)$. Ainsi, $c\beta\gamma$ (resp. $\beta\gamma a$) n'ont pas d'antécédent. Donc $Gr(n)$ est d'ordre strictement supérieur à celui de tous ses prédécesseurs. □

Exemples 7.43 Considérons la classe de *abcdefijhkg* d'ordre 35. L'algorithme la plonge successivement dans les classes

bacdefijhkg (ordre 35),	*bcadefijhkg* (105),	*bcdaefijhkg* (175),
bcdeafijhkg (245),	*bcdefaijhkg* (315),	*bcdegaijhkf* (315),
bcdehaijgkf (315),	*bcdehiajgkf* (329),	*bcdehigjakf* (399),
bcdehigjfka (1 225),	*cbdehigjfka* (1 295),	*cdbehigjfka* (4 165),
cdebhigjfka (7 175),	*cdfbhigjeka* (7 175),	*cdgbhifjeka* (7 175),
cdghbifjeka (7 725),	*cdghfibjeka* (10 607),	*cdghfiejbka* (60 037),
dcghfiejbka (67 597),	*ecghfidjbka* (67 597),	*fcgheidjbka* (67 597),
fgcheidjbka (92 323),	*fgehcidjbka* (228 305),	

et, finalement, *fgehdicjbka* (3 705 075) ! En particulier, le plongement envoie le mot *abcdefghijk* sur *kajbicdefgh*.

La figure 7.7 montre, sur un exemple plus petit comment plusieurs classes se plongent dans $Gr(6)$. Le lecteur pourra comparer avec les figures 7.6 et 7.2.

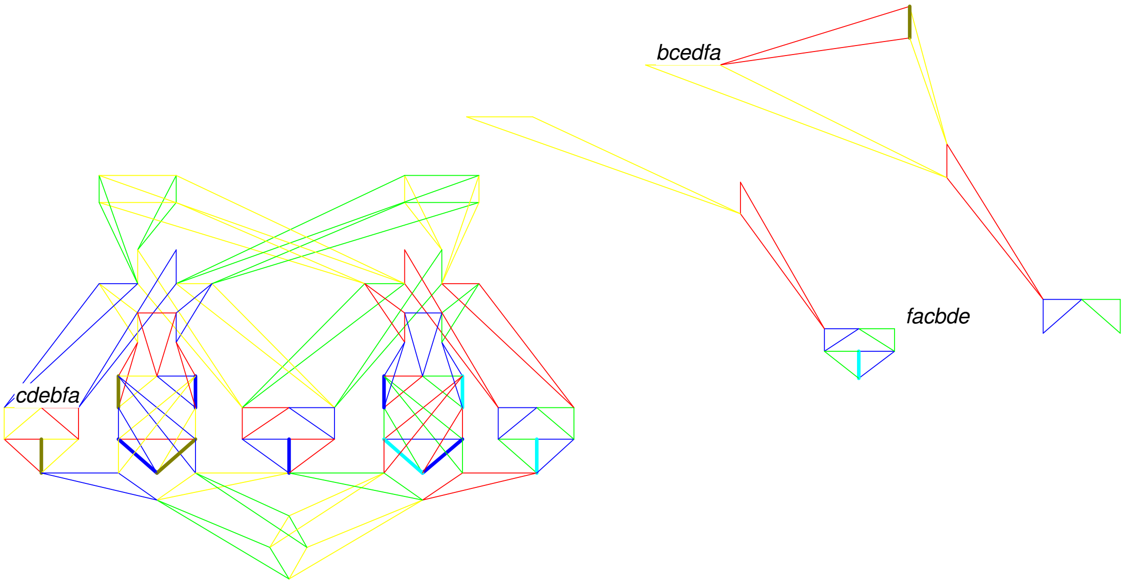


FIG. 7.7 : La transposition de *c* et *d* plonge la classe de *cdebfa* (cardinal 75) dans la classe $Gr(6)$ (cardinal 135). Remarquons que les plongements de *facbde* et *bcedfa* ne préservent pas l'involution de Schützenberger.

7.5.2 Mots de Dyck

Dans cette section, nous allons mettre la grande classe du monoïde chinois en relation avec les mots de Dyck. Nous affecterons un poids aux mots de Dyck. Ceci nous a permis entre autre de calculer le cardinal des grandes classes jusqu'à $n = 27$.

Dans toute cette section, nous utiliserons une convention spéciale : une "grande" lettre désigne une grande lettre de $Gr(A)$, c'est-à-dire une lettre de la moitié supérieure de l'alphabet et une "petite" lettre désigne une petite lettre de $Gr(A)$, c'est-à-dire une lettre de la moitié inférieure de A.

Nous commençons par étudier la grande classe quand n est pair, égal à $2p$. La partition entre petites et grandes lettres et la structure de $Gr(n)$ est fortement reliée à la structure des mots de Dyck.

Définition 7.44 (Mot de Dyck)
Soit $D = \{x, \bar{x}\}$ un alphabet à deux lettres.

- *La* hauteur *d'un mot w sur D est $h(w) = |w|_x - |w|_{\bar{x}}$.*
- *Un mot $w \in D^*$ est* un mot de Dyck *si tous ses préfixes sont de hauteur*

au moins égale à 0 *et si* $h(w) = 0$.

- *Un mot* w *est* un mot de Dyck propre *si tous ses préfixes sont de hauteur au moins égale à* 1 *et si* $h(w) = 0$.
- *Si* w *est un mot de Dyck et* u *un préfixe de* w*, on dit que* u *est* un retour à zéro *de* w *si* $h(u) = 0$

Ainsi, un mot de Dyck est propre s'il n'a qu'un retour à zéro, lui-même.

Définition 7.45 (Morphisme π) *Soit* A *un alphabet. Notons* π *le morphisme de monoïdes défini par*

$$\begin{array}{rcl} \pi \ : A^* & \longrightarrow & D^* \\ \alpha & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } \alpha \text{ est une grande lettre de } Gr(A), \\ \bar{x} & \text{si } \alpha \text{ est une petite lettre de } Gr(A). \end{cases} \end{array}$$

Théorème 7.46 *Fixons un alphabet* A *sur* $2p$ *lettres. Notons* c *et* c' *les lettres médianes de* A *et considérons alors* $Gr(2p-2)$ *défini sur* $A \setminus \{c, c'\}$*. Alors la grande classe* $Gr(2p)$ *est caractérisée par*

- *si* w *appartient à* $Gr(2p)$ *et si* w' *est obtenu à partir de* w *en retirant les lettres* c *et* c' *de* w*, alors* w' *appartient à* $Gr(2p-2)$.
- *si* w' *appartient à* $Gr(2p-2)$ *et si* w *est obtenu en insérant* c *et* c' *de sorte que l'image* $\pi(w)$ *soit un mot de Dyck alors* w *appartient à* $Gr(2p)$.
- *si* w' *appartient à* $Gr(2p-2)$ *et si* w *est obtenu en insérant* c *et* c' *de sorte que l'image* $\pi(w)$ *ne soit pas un mot de Dyck alors* w *n'appartient pas à* $Gr(2p)$.

Par exemple, *faeb* $\in Gr(4)$ et $\pi($*faeb*$) = x\bar{x}x\bar{x} \in D_2$. Le mot *fadebc* est obtenu en insérant *c* et *d* à partir du mot précédent. L'image de *fadebc* par π est $x\bar{x}xx\bar{x}\bar{x}$ qui est un mot de Dyck. Donc *fadebc* appartient à $Gr(6)$.

Le mot *facebd* est obtenu en insérant *c* et *d* à partir du mot précédent. L'image de *facebd* par π est $x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}x$ qui n'est pas un mot de Dyck. Donc *facebd* n'appartient pas à $Gr(6)$.

Démonstration. Écrivons

$$w = a_1 \cdots a_j c a_{j+1} \cdots a_k c' a_{k+1} \cdots a_{2p-2}, \qquad \text{et} \qquad w' = a_1 \cdots a_{2p-2}$$ [3]

Il nous faut comparer ce qui se passe pendant la construction de l'escalier de w et pendant la construction de celui de w'. Il est clair qu'avant l'insertion de c, les deux escaliers sont identiques.

[3] Remarquons que nous n'avons précisé si $c < c'$ ou si $c > c'$.

Lemme 7.47 *Soit σ_i (resp. σ'_i) l'escalier obtenu par insertion partielle de w (resp. w') jusqu'à la lettre a_i. La partie gauche de l'escalier, notée A_i (resp. A'_i) est l'ensemble des colonnes de σ_i (resp. σ'_i) indexées par les lettres supérieures à c et c', celles-ci comprises. La partie droite de l'escalier, notée B_i (resp. B'_i) est l'ensemble des colonnes restantes, c'est-à-dire les colonnes indexées par des lettres strictement inférieures à c et c'.*

Alors $B_i = B'_i$ et les 1 de A_i et A'_i sont dans les mêmes équerres.

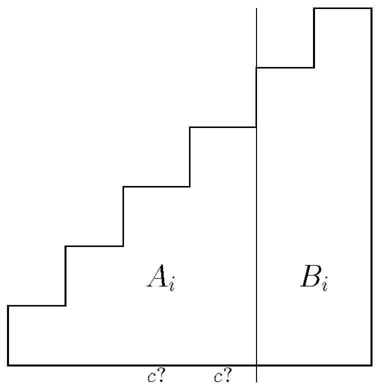


FIG. 7.8 : Les définitions de A_i et B_i

Une conséquence directe de ce lemme est que le 1 le plus bas de A_i et celui de A'_i est toujours sur la même ligne.

Considérons l'escalier correspondant à w', qui est l'escalier correspondant à la classe $Gr(2p-2)$. Nous devons voir où il est possible d'insérer les lettres c et c' dans un mot de $Gr(2p-2)$ pour obtenir un élément de $Gr(2p)$. Remarquons que la hauteur du préfixe d'un mot de Dyck, étant égale à la différence entre le nombre de grandes lettres de de petites lettres non encore insérées, est exactement le nombre de cases qui sont encore dans A'_i.

Soit $i = \inf\{i > j \mid \quad h(a_1 \cdots a_i) = 0\}$.

Nous avons maintenant une image assez précise de la suite des escaliers σ'_i : la hauteur du mot de Dyck correspondant à w' est égale au nombre de petites lettres qu'il reste à insérer dans l'escalier avant que la partie gauche A'_i ne soit vide. Nous devons considérer plusieurs cas :

- $c > c'$ et $k > i$. La case correspondant à c est sur la diagonale de l'escalier. La même situation se produit lorsqu'on insère c' sauf que, la première fois, le mot de Dyck avait un retour à zéro après l'insertion de c', la case correspondant à c' monte dans l'escalier jusqu'à rejoindre la case correspondant à c. Donc l'escalier σ est le même que σ' à l'exception d'un 1 dans la case $\sigma_{cc'}$. Dans ce cas, w appartient à $Gr(2p)$ et on voit bien que $\pi(w)$ est un mot de Dyck.

- $c > c'$ et $k < i$. À chaque fois que la case correspondant à c' monte dans l'escalier et atteint la hauteur de c, la lettre c' s'arrête et c monte à son tour. Donc c' est toujours en dessous de c. Dans ce cas, w appartient à $Gr(2p)$ et on voit bien que $\pi(w)$ est un mot de Dyck
- $c < c'$ et $k > i$. La lettre c arrive sur la diagonale de σ, donc σ ne peut pas être l'escalier de la grande classe. Dans ce cas, w n'appartient pas à $Gr(2p)$ et, de fait, $\pi(w)$ n'est pas un mot de Dyck.
- $c < c'$ et $k < i$. Quand on insère c', il ne monte pas nécessairement plus haut que c (cela dépend de la partie droite, B_i) mais l'insertion d'autres petites lettres finit par forcer c' à passer au dessus de la ligne de c. Dans ce cas, w n'appartient pas à $Gr(2p)$ et, de fait, $\pi(w)$ n'est pas un mot de Dyck.

□

Nous décrivons maintenant un procédé pour calculer le cardinal de la grande classe d'ordre pair.

Définition 7.48 (Mot de Dyck à histoire) *Un* mot de Dyck à histoire *est un mot w sur l'alphabet $\{x, \bar{x}\} \times \mathbb{N}$ qui vérifie*

- *Si $|w| = 2p$, w est une permutation des lettres $x_1, \dots x_p, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p$.*
- *Le morphisme de monoïde $\nu : x_i \mapsto x$, $\bar{x}_i \mapsto \bar{x}$, envoie w sur un mot de Dyck.*
- *Le mot w' obtenu en effaçant x_p et $\bar{x}_p$ de w est un mot de Dyck à histoire (le mot vide est un mot de Dyck à histoire).*

Autrement dit, un mot de Dyck à histoire réunit un mot de Dyck et une façon de le construire à partir de mots de Dyck successifs.

Corollaire 7.49 *Fixons un alphabet A de $2p$ lettres. Soit ζ l'isomorphisme de monoïde entre A^* et $D \times \{1, \dots, p\}$ qui envoie les petites lettres de A $(a, b, \dots)$ sur $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ et les grandes lettres de A $(z, y, \dots)$ sur $x_p, x_{p-1}, \dots$*

Alors ζ est une bijection entre $Gr(2p)$ et les mots de Dyck à histoire de longueur $2p$.

On peut aussi compter le cardinal de $Gr(2p)$ en affectant directement un coefficient aux mots de Dyck. Un mot de Dyck de longueur $2p$ avec $p > 0$ peut être réduit à un mot de Dyck de longueur $2p-2$ de plusieurs manières différentes en effaçant un x et un $\bar{x}$. Appelons chacune de ces façons une réduction de Dyck.

Définition 7.50 (Poids) *Le* poids *d'un mot de Dyck est défini de proche en proche par :*

- *Poids*$(x\bar{x}) = 1$.
- *Le poids d'un mot de Dyck de longueur* $2p$ *est égal à la somme des poids de tous les mots de Dyck obtenus par toutes les réductions de Dyck possibles.*

Exemple 7.51 Comme $xx\bar{x}\bar{x}$ se réduit par $\cancel{x}x\cancel{\bar{x}}\bar{x}$, $\cancel{x}x\bar{x}\cancel{\bar{x}}$, $x\cancel{x}\cancel{\bar{x}}\bar{x}$ et $x\cancel{x}\bar{x}\cancel{\bar{x}}$, le poids de $xx\bar{x}\bar{x}$ est égal à 4. De même, $x\bar{x}x\bar{x}$ se réduit par $\cancel{x}\cancel{\bar{x}}x\bar{x}$, $x\cancel{\bar{x}}\cancel{x}\bar{x}$ et $x\bar{x}\cancel{x}\cancel{\bar{x}}$, donc le poids de $x\bar{x}x\bar{x}$ est égal à 3. De même, le lecteur pourra voir facilement que le poids de $xxx\bar{x}\bar{x}\bar{x}$ vaut 36.

Nous énonçons maintenant notre principal résultat concernant le cardinal de la grande classe.

Théorème 7.52 *Pour tout mot de Dyck* w *de longueur* $2p$*, le poids de* w *vérifie*

$$Poids(w) = |\{u \in Gr(n),\ \pi(u) = w\}|\,.$$

Démonstration. Par définition, $Poids(w) = |\nu^{-1}(w)|$. $\square$

Corollaire 7.53 *La somme des poids de tous les mots de Dyck de longueur* $2p$ *est égal au cardinal de* $Gr(2p)$*.*

Supposons maintenat que n est impair, égal à $2p+1$. Le prochain théorème se montre de la même façon que les précédents.

Théorème 7.54 *Fixons un alphabet* A *de* $2p+1$ *lettres. Notons* c *la lettre médiane de* A *et considérons* $Gr(2p)$ *défini sur* $A \setminus \{c\}$*. Alors la grande classe* $Gr(2p+1)$ *est caractérisée par*

- *si* w *appartient à* $Gr(2p+1)$ *et si* w' *est obtenu en effaçant* c *de* w*, alors* w' *appartient à* $Gr(2p)$*.*
- *si* w' *appartient à* $Gr(2p)$ *et si* w *est obtenu en insérant* c *dans* w' *alors* w *appartient à* $Gr(2p+1)$*.*

Corollaire 7.55 *Si* n *est un nombre impair alors*

$$|Gr(n)| = (n)\,|Gr(n-1)|\,.$$

Pour finir sur la grande classe, nous donnons figure 7.9 la table des cardinaux de celles-ci pour n allant de 2 à 27.

2	1	15	69767308065
3	3	16	878527273745
4	7	17	14934963653665
5	35	18	215641280371953
6	135	19	4097184327067107
7	945	20	66791817776602071
8	5193	21	1402628173308643491
9	46737	22	25497938851324213335
10	336825	23	586452593580456906705
11	3705075	24	11768195809024637785049
12	33229775	25	294204895225615944626225
13	431987075	26	6461991778062768047152937
14	4651153871	27	174473778007694737273129299

FIG. 7.9 : Cardinaux des grandes classes

7.6 Généralisation aux autres classes

Dans cette section, nous allons montrer qu'il est possible de généraliser l'idée de l'insertion de lettres au cas de toutes les classes. En effet, dans la précédente section (section 7.5.2), on avait transformé les mots de la grande classe en mots de Dyck et montré comment on pouvait les engendrer à partir de la grande classe deux crans auparavant. La généralisation à toutes les classes chinoises standard consiste à changer les mots de Dyck à histoires en mots de Motzkin à histoires, le reste n'étant que peu modifié.

Définition 7.56 (Mots de Motzkin) *Soit $M = \{x, \bar{x}, t\}$ un alphabet à trois lettres. Considérons le morphisme de monoïde μ de M^* dans D^* défini par*

$$\mu(x) = x, \quad \mu(\bar{x}) = \bar{x}, \quad \mu(t) = \epsilon.$$

Un mot w de M^* est appelé mot de Motzkin *si $\mu(w)$ est un mot de Dyck. Le* type *d'un mot de Motzkin w est $(|w|_x, |w|_t)$. Grâce à l'application μ, nous généralisons aux mots de Motzkin la notion de hauteur, de mots de Motzkin propres et de retours à zéro (voir définition 7.44).*

Définition 7.57 (Type d'une classe) *Soit C une classe d'équivalence du monoïde chinois. Le* type *de C est égal à (i, j) où i est le nombre de paires de petites et grandes lettres et j le nombre de lettres neutres.*

De même que dans la sous-section précédente, nous définissons le morphisme qui envoie les mots d'une classe chinoise sur un mot de Motzkin de même type.

Définition 7.58 (Morphisme π) *Soient A un alphabet et C une classe chinoise sur A. Le morphisme de monoïde π est défini par*

$$\begin{array}{rcl} \pi \; : A^* & \longrightarrow & M^* \\ \alpha & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x & \textit{si } \alpha \textit{ est une grande lettre de } Gr(A), \\ \bar{x} & \textit{si } \alpha \textit{ est une petite lettre de } Gr(A), \\ t & \textit{si } \alpha \textit{ est une lettre neutre de } Gr(A). \end{array} \right. \end{array}$$

Définition 7.59 (Case centrale d'un escalier) *Soit σ un escalier standard. La première case non nulle $\sigma_{\beta\alpha}$ dans la lecture canonique ligne est appelée* la case centrale de l'escalier. *Autrement dit,*

- *pour tous $\beta' < \beta$ et pour tous α', on a $\sigma_{\beta'\alpha'} = 0$,*
- *pour tous $\alpha' < \alpha$, on a $\sigma_{\beta\alpha'} = 0$,*
- $\sigma_{\beta\alpha} > 0$.

Les lettres α et β correspondant à cette case sont appelées lettres centrales *de cet escalier. Toutes les cases situées au sud-ouest de la case centrale sont appelées* cases externes.

Enfin, l'escalier $D\sigma$ obtenu en mettant la case $\sigma_{\beta\alpha}$ à zéro est appelé l'escalier dérivé de σ *et la classe correspondante* la classe dérivée de C.

7.6.1 Deux théorèmes de réduction

Dans cette sous-section, nous généralisons les théorèmes 7.54 et 7.46 par les théorèmes $\mid$ et $\sqcup$ selon que l'on considère une lettre neutre ou une paire de lettres. Ceux-ci nous permettront par la suite de faire une construction analogue à la correspondance de Robinson-Schented dans le cadre du monoïde chinois.

Théorème 7.60 ($\mid$) *Soit σ un escalier standard dont la case centrale est sur la diagonale, en σ_c. Soient $\{e_j\}$ les lettres externes de σ, $\{s_i\}$ les lettres inférieures à c et soit $\{g_i\}$ les lettres associées aux s_i.*

Alors toutes les s_i sont des petites lettres et les ensembles $\{s_i\}$, $\{g_i\}$, $\{e_j\}$ et $\{c\}$ forment une partition de l'alphabet A.

De plus, un mot $w = a_1 \cdots a_k \, c \, a_{k+1} \cdots a_{n-1}$ appartient à $C(\sigma)$ si et seulement si

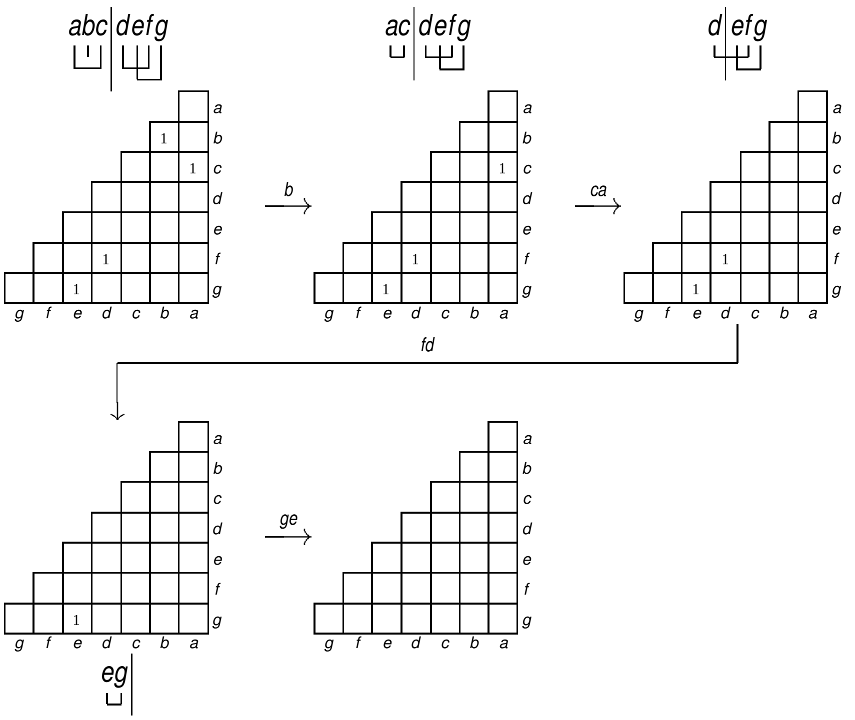


FIG. 7.10 : Les dérivées successives de *bcafdge*

– *$w' = a_1 \cdots a_{n-1}$ appartient à $C(D\sigma)$,*
– *Si M est le mot de Motzkin associé à w et si p est la position du premier retour à zéro de M après la lettre c, toutes les lettres e_j apparaissent après la position p dans w.*

Si on considère la première étape de l'exemple de la figure 7.10, les ensembles $\{s_i\}$, $\{g_i\}$, $\{e_j\}$ et $\{c\}$ sont respectivement $\{a\}$, $\{c\}$, $\{d, e, f, g\}$ et $\{b\}$.

Démonstration. La définition d'une case centrale sur la diagonale montre directement toute la première partie de l'énoncé. Montrons maintenant la seconde partie, c'est-à-dire la construction récursive des mots de $C(\sigma)$.

Tout d'abord, nous avons les deux inégalités $s_i < c < g_i$ et $c < e_j$, ce qui montre en particulier que c est inférieur aux petites lettres de l'ensemble $\{e_j\}$. On montre alors le sens direct en utilisant une construction analogue à celle de la grande classe : la place finale du 1 correspondant à s_i et g_i est dans la partie droite de l'escalier. L'idée est la suivante : dans le mot de Motzkin propre contenant c, la hauteur de ses préfixes compte le nombre de lettres inférieures à c qu'on doit insérer avant que le 1 correspondant à c n'atteigne sa position finale dans σ. Alors, si un des e_j est inséré avant le retour à zéro, il restera au moins un des s_i à insérer après celui-ci. Comme c et tous les s_i

sont inférieurs à tous les e_j, on voit alors que le 1 du-dit e_j n'atteindra jamais sa position finale (les lettres ne se déplacent que vers la droite au cours de l'algorithme d'insertion).

Réciproquement, si on place la lettre c manquante dans un mot w' de $C(D\sigma)$ de sorte que le mot de Motzkin propre contenant c vérifie les conditions de l'énoncé, il faut montrer que w appartient à $C(\sigma)$. On fait à nouveau de même que pour la grande classe : il faut comparer les tableaux d'insertion partiels de w et w'. On montre alors qu'au premier retour à zéro après l'insertion de w, les deux tableaux sont les mêmes, sauf que la case diagonale σ_c est occupée dans σ alors qu'elle est libre dans σ'. □

On démontre de même le théorème suivant.

Théorème 7.61 **($\sqcup$)** *Soit σ un escalier standard dont la case centrale, notée $\sigma_{c_1 c_2}$ n'est pas sur la diagonale. Soit $\{e_j\}$ les lettres externes de σ, soient $\{s_i\}$ les lettres inférieures à c_2 et $\{g_i\}$ les lettres associées.*

Alors toutes les s_i sont des petites lettres et les ensembles $\{s_i\}$, $\{g_i\}$, $\{e_j\}$ et $\{c_1, c_2\}$ forment une partition de l'alphabet A.

Un mot $w = a_1 \dots a_k \, c \, a_{k+1} \dots a'_k \, c' \, a_{k'+1} \dots a_{n-2}$ avec $\{c, c'\} = \{c_1, c_2\}$ appartient à $C(\sigma)$ si et seulement si

- *le mot $w' = a_1 \dots a_{n-2}$ appartient à $C(D\sigma)$,*
- *si M est le mot de Motzkin associé à w et si p est la position du premier retour à zéro suivant la lettre x ou $\bar{x}$ associée à c', toutes les lettres e_j apparaissent après la position p dans w.*

7.6.2 Correspondance de Robinson-Schensted

Dans la section 7.5.2, nous avons construit une sorte de correspondance de Robinson-Schensted dans le cadre de la grande classe puisque les mots de Dyck à histoire (voir définition 7.48) sont en bijection avec les mots de la grande classe.

Nous allons maintenant généraliser cette construction en utilisant des mots de Motzkin à histoire qu'on mettra en bijection avec les éléments d'une classe chinoise donnée.

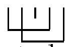
Définition 7.62 (Mot de Motzkin à histoire) *On appelle* mot de Motzkin à histoire de type (n, p) *un mot w sur l'alphabet $M \times \mathbb{N}$ qui vérifie*

- *Le mot vide est un mot de Motzkin à histoire de type $(0, 0)$.*
- *Le mot w est une permutation de $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, t_1, \dots, t_p$.*

- *Le morphisme de monoïde* $\nu : x_i \mapsto x,\ \bar{x}_i \mapsto \bar{x},\ t_p \mapsto t$ *envoie* w *sur un mot de Motzkin.*
- *Le mot* w' *obtenu en effaçant* x_n *et* $\bar{x}_n$ *de* w *est un mot de Motzkin à histoire de type* $(n-1, p)$.
- *Le mot* w' *obtenu en effaçant* t_p *de* w *est un mot de Motzkin à histoire de type* $(n, p-1)$.

Remarquons que le mot canonique ligne d'une classe fournit un ordre sur les paires de grandes et petites lettres : on numérote les grandes lettres, les petites lettres et les lettres neutres en lisant le mot canonique de droite à gauche. Ainsi, étant donnée une classe C, il y a une bijection naturelle entre les lettres d'un mot de Motzkin correctement ordonné de même type que C et les lettres de l'alphabet. Ainsi, en appliquant la bijection réciproque, on peut associer à chaque mot de Motzkin à histoire du bon type, un mot. Nous allons maintenant voir sous quelles conditions un tel mot appartient à la classe C.

Exemple 7.63 Considérons la classe C de ***cdaeb***, dont la représentation par liens est ***abcde***.



Le mot de Motzkin à histoire $x_1x_2t_1\bar{x}_2\bar{x}_1$ est du bon type et est associé par la bijection précédente au mot ***edcab***. Celui-ci n'appartient par à C.

Définition 7.64 (Mot admissible) *Soit* C *une classe chinoise et* w *un mot de Motzkin à histoire du même type que* C*. Définissons le* mot dérivé Dw *de* w *en effaçant la (les) lettre(s) correspondant à la case centrale de* C *dans* w*, c'est-à-dire* t_p *si la case centrale est sur la diagonale et* x_n *et* $\bar{x}_n$ *sinon.*

On dit que w *est* C-admissible *si*

- *le mot* Dw *est un mot de Motzkin à histoire,*
- *le mot* Dw *est* DC*-admissible,*
- *s'il existe une lettre centrale, elle correspond à* t_1.
- *les lettres de* w *correspondant aux lettres externes de* C *apparaissent après le premier retour à zéro de* w *après la (les) lettre(s) associée(s) à la case centrale de* C.

Remarquons que t_1 est a-admissible et que $x_1\bar{x}_1$ est ba-admissible

Le théorème suivant est une conséquence directe des théorèmes $\mid$ et $\sqcup$.

Théorème 7.65 *Soit C une classe chinoise de type (n,p) et soit t sa lecture canonique ligne. On définit ζ, l'isomorphisme de monoïde entre A^* et $\{x,\bar{x}\}\times\{1,\dots n\}\cup\{t\}\times\{1,\dots,p\}$ qui envoie les grandes lettres de A sur $x_1,\dots x_n$ selon leurs positions respectives dans t (c'est-à-dire dans l'ordre inverse), les lettres neutres de A sur $t_1,\dots,t_p$ selon leurs positions respectives dans t (ordre inverse aussi) et les petites lettres de A sur $\bar{x}_1,\dots\bar{x}_n$ selon les positions respectives de leurs grandes lettres correspondantes par ρ dans t (toujours en ordre inverse).*

Alors ζ induit une bijection entre les éléments de C et les mots de Motkzin à histoire C-admissibles.

Précisons un dernier point : on ne peut lire le retour à zéro du mot de Motzkin correspondant à w' sur w. Autrement dit, tous les points de la définition d'un mot C-admissible doivent être vérifiés récursivement. Par exemple, dans la classe de ***edfbgcha***, le mot $x_1\bar{x}_1x_3x_4\bar{x}_3x_2\bar{x}_4\bar{x}_2$ est admissible mais le mot $x_1x_3\bar{x}_3\bar{x}_4x_4x_2\bar{x}_2\bar{x}_1$ en l'est pas car si on supprime x_4 et $\bar{x}_4$, on déplace en même temps le retour à zéro à la fin du mot.

7.6.3 Énumération des classes par motifs

Le but de cette section est de compter le nombre de classes chinoises d'un cardinal donné (dans le cas standard). Comme le nombre de classes chinoises est assez grand, nous allons les rassembler par classes d'isomorphisme, qui consiste essentiellement en des motifs identiques.

Nous commençons par le cas des classes d'ordre 1 où on applique une version simplifiée de l'idée générale : nous décomposons un escalier en escaliers irréductibles qui n'interfèrent pas avec les autres. Les escaliers des classes d'ordre 1 jouent un rôle particulier dans cette décomposition.

Classes de cardinal 1

Lemme 7.66 *Soit σ un escalier d'une classe de cardinal* 1*. Alors il n'y a pas deux entiers* 1 *l'un au nord-ouest de l'autre dans σ.*

Démonstration. Si la classe est de cardinal 1, cela signifie qu'à chaque étape de l'algorithme inverse (voir algorithme 7.4.1), il n'y a qu'une seule possibilité, autrement dit que l'ensemble des éléments enlevables est toujours réduit à un élément. On voit alors que cette condition correspond à la condition de l'énoncé. □

Nous transposons le lemme précédent au mot de la dite classe.

Proposition 7.67 *Un mot w appartient à une classe de cardinal 1 si et seulement si la suite des lettres aux positions paires et la suite des lettres aux positions impaires sont toutes deux croissantes.*

Démonstration. Il est tout d'abord clair que le mot canonique associé à une classe de cardinal 1 vérifie les conditions de la proposition. Réciproquement, soit w un mot vérifiant les conditions de la proposition. Le mot w n'a aucune réécriture élémentaire puisque tous les facteurs de longueur trois $w_i w_{i+1} w_{i+2}$ vérifient $w_i < w_{i+2}$ tandis que les trois mots cba, cab et bca vérifient la condition inverse. □

Exemple 7.68 Soit $w = \mathsf{abcdgehf}$. Comme les deux sous-mots acgh et bdef sont croissants, la classes de w est d'ordre 1.

Corollaire 7.69 *Le nombre de classes d'ordre 1 sur n lettres distinctes est :*

$$\#C(1,n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Motifs

Considérons une classe chinoise $C(\sigma)$ et examinons précisément les positions qu'une lettre donnée peut occuper. Dans les classes d'ordre 1, toutes les lettres ont une position fixée. Dans d'autres classes, seulement certaines lettres peuvent se déplacer. Dans d'autres classes encore, toutes les lettres se déplacent mais la plupart d'entre elles ont un nombre de places possibles limitées.

Définition 7.70 (Motif) *Considérons deux escaliers σ et σ' sur les alphabets A et A'. On dit que σ et σ'* ont le même motif *s'il existe une injection croissante i de A dans A' et une injection croissante j de A' dans A vérifiant*

$$\sigma = \sigma' \circ (i,i) \quad \textit{et} \quad \sigma' = \sigma \circ (j,j).$$

Proposition 7.71 *Si deux escaliers ont même motif, ils ont des supports isomorphes. Formellement, un motif n'est qu'un escalier à isomorphisme près de son support.*

Démonstration. Soit S le support de σ, c'est-à-dire l'ensemble des lettres α apparaissant dans σ. Soit S' le support de σ'. Alors i et j définissent un isomorphisme entre $(S,<)$ et $(S',<)$. □

Définition 7.72 (Motif extractible, primitif)
Soit σ un escalier sur l'alphabet A et soit B un sous-ensemble de A.

- *On appelle* sous-motif P de σ sur B *l'escalier défini sur B en prenant toutes les cases de σ dont les indices sont tous deux dans B.*
- *On appelle* motif extractible *un sous-motif P sur B tel que toutes les autres cases de σ aient leurs indices dans le complémentaire de B dans A.*
- *On dit qu'un motif extractible P est un* sous-motif droit *si toutes les cases au nord-est de P dans σ sont nulles.*
- *On dit qu'un motif extractible P est un* sous-motif gauche *si toutes les cases au sud-ouest de P dans σ sont nulles.*
- *Enfin, on dit qu'un motif est un* motif primitif *s'il ne contient aucun sous-motif extractible non trivial.*

Exemple 7.73 Considérons un mot standard w qui peut s'écrire sous la forme $w = uv$, de sorte que toutes les lettres de u soient inférieures à toutes les lettres de v. Alors le sous-motif U obtenu en considérant l'alphabet de u est extractible de même que le sous-motif V obtenu en considérant l'alphabet de v. En particulier, le motif de w n'est pas primitif.

Remarquons en outre que cela signifie dans ce cas que la classe $C(w)$ est une classe produit. En effet,

$$C(w) = C(u).C(v).$$

Il est clair que tout escalier se décompose de façon unique comme une liste de sous-motifs primitifs extractibles.

Définition 7.74 (Hauteur d'un motif) *Soit P un motif.*

- *On appelle* partie gauche de P *et on note $l(P)$ l'ensemble des petites lettres dont toutes les lettres plus petites lexicographiquement dans P sont aussi petites.*
- *On appelle* hauteur de P à gauche *et on note $hl(P)$ le cardinal de $l(P)$.*
- *On appelle* partie droite de P *et on note $r(P)$ l'ensemble des grandes lettres dont toutes les lettres plus grandes lexicographiquement dans P sont aussi grandes.*
- *On appelle* hauteur de P à droite *et on note $hr(P)$ le cardinal de $r(P)$.*

Par exemple, le motif *bcdea* de représentation par liens *abcde* vérifie

$$hl(\textit{bcdea}) = hr(\textit{bcdea}) = 1.$$

Le motif *cbdae* de représentation par liens *abcde* vérifie

$$hl(\textit{cbdae}) = 1, \quad \text{et} \quad hr(\textit{cbdae}) = 0.$$

Cardinal des classes ayant un motif donné

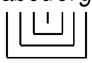
Proposition 7.75 *Soit P un motif de p lettres. Le nombre d'escaliers σ sur n lettres ($n \geq p$) qui ont P comme motif gauche et dont le reste des motifs primitifs ne sont que de motifs d'ordre 1 est*

$$\binom{hr(P) + n - p}{\lfloor \frac{n-p}{2} \rfloor}.$$

Démonstration. Nous allons construire un nouveau motif à partir de celui de P. Le motif P se termine par $hr(P)$ grandes lettres. On définit alors le motif P' en associant ces grandes lettres avec les bonnes petites lettres de P de sorte que $C(P')$ soit de cardinal 1.

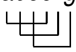
Pour fixer les idées, considérons, par exemple, le motif *decfbga*.

abcdefg.



La partie droite de P est $r(P) =$ *efg*. On associe alors *a* avec *e*, *b* avec *f* et *g* avec *c*. On efface *d*, ce qui donne le nouveau motif $P' =$ *eafbgc*.

abcefg.



Appliquons la précédente transformation à tous les sous-motifs P de tous les escaliers σ définis dans la proposition. Les classes ainsi obtenues sont évidemment de cardinal 1 et possèdent $2hr(P) + n - p$ lettres, avec la condition supplémentaire que les $hr(P)$ premières petites lettres apparaissent aux premières positions paires dans le mot canonique. Remarquons que la transformation précédente est bijective puisqu'il est possible de reconstituer un escalier σ à partir d'une classe de cardinal 1 vérifiant nos hypothèses sur $2hr(P) + n - p$ lettres et du motif.

Nous nous sommes donc ramenés à compter le nombre de telles classes de cardinal 1. Nous utilisons alors la proposition 7.67.

Le nombre de lettres devant être placées à des positions paires est égal à $hr(P) + \lfloor \frac{n-p}{2} \rfloor$. De plus, les $hr(P)$ premières sont déjà fixées. Cela revient donc à choisir $\lfloor \frac{n-p-q}{2} \rfloor$ lettres parmi les $hr(P) + n - p$ lettres restantes, ce qui donne le coefficient binomial recherché. □

Proposition 7.76 *Soient P et Q deux motifs sur respectivement p et q lettres. Le nombre de classes sur n lettres ($n \geq p + q$) ayant P comme motif gauche et Q comme motif droit et dont les autres motifs primitifs sont d'ordre* 1 *est égal à*

- $\binom{hr(P)+hl(Q)+n-p-q}{hl(Q)+\frac{n-p-q}{2}}$ *si $n - p - q$ est pair,*
- $\binom{hr(P)+hl(Q)+n-p-q}{\lfloor\frac{n-p-q}{2}\rfloor}$ *si $n - p - q$ est impair*

Démonstration. La démonstration de ce résultat est très similaire à celle de la démonstration précédente. La différence entre les cas pairs et impairs provient du fait qu'il faut savoir si les lettres déjà choisies sont toutes à des positions paires ou certaines à des positions paires (celles de P) et les autres à des positions impaires (dans ce cas, celles de Q). □

Définition 7.77 (Chaîne) *On dit qu'un* 1 *est inférieur à un autre* 1 *si la grande lettre du premier est comprise entre la petite et la grande lettre de l'autre.*

On peut voir cette relation particulièrement facilement en se servant de la représentation par liens. Remarquons que cette relation n'est pas un ordre car elle n'est pas transitive.

Exemple 7.78 Dans l'escalier *cbda*, on a *cb* < *da*. Dans l'escalier *cadb*, on a *ca* < *db*.

On appelle *motif pyramidal* un motif dans lequel aucun 1 n'est sur la diagonale et tous les 1 peuvent être ordonnés dans une chaîne de sorte que chaque élément soit inférieur au précédent.

Définition 7.79 (Interférence) *Soit P un escalier composé d'un motif, une partie gauche composée qui est une classe d'ordre* 1 *et une partie droite que est une class d'ordre* 1*. On dit qu'il y a des* interférences entre les parties gauches et droites *s'il existe une petite lettre de la partie droite qui est inférieure lexicographique à une grande lettre de la partie gauche.* Le nombre d'interférences *est le plus grand nombre de lettres g de la partie gauche qu'on peut associer à des lettres s différentes de la partie droite avec $g > s$.*

Théorème 7.80 *Soit P un motif non pyramidal. Le nombre d'escaliers à q lettres qui ont le motif P et dont tous les motifs disjoints de P sont de cardinal* 1 *est donné par la somme*

$$\sum_{j=0}^{q-n} \binom{hl(P)+j}{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{hr(P)+q-n-j}{\lfloor \frac{q-n-j}{2} \rfloor}.$$

Démonstration. Dans la somme de l'énoncé, j désigne le nombre de lettres à la gauche du motif. De plus, comme le motif est non-pyramidal, les lettres de $hr(P)$ et celles de $hl(P)$ n'ont aucune interférence. En particulier, étant donné un entier j, le choix des lettres à sa gauche et celui des lettres à sa droite sont totalement indépendants. On obtient alors le produit de l'énoncé à j fixé. □

Pour traiter le cas des motifs pyramidaux, il nous faut maintenant raisonner sur le nombre d'interférences entre les parties gauche et droite du motif.

Théorème 7.81 *Soit P un motif pyramidal. Le nombre d'escaliers sur q lettres qui ont le motif P et dont tous les motifs disjoints de P sont de cardinal* 1 *est donné par la somme*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q-n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{q-n-2i} \binom{hl(P)+i+j}{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{hr(P)+i+q-n-j}{\lfloor \frac{q-n-j}{2} \rfloor}.$$

Démonstration. S'il y a i interférences, nous pouvons transformer le motif P en ajoutant i à $hr(P)$ et $hl(P)$ et compter comme dans le théorème précédent en supposant qu'il n'y a pas d'interférences. □

Remarque 7.82 Avec l'ensemble de ces formules, nous pouvons calculer le nombre de classes à n lettres ayant un cardinal donné. Il nous suffit pour cela de trouver tous les motifs extraits pour lesquels on obtient ce cardinal.

7.7 Classes de conjugaison

Dans cette section, nous allons étudier les classes de conjugaison du monoïde chinois.

Définition 7.83 (Conjugaison) *La* relation de conjugaison *sur le monoïde chinois est la clôture transitive de la relation R définie sur A^* par*

$$w\,R\,w' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\,(u,v) \in A^2,\ w = uv \text{ et } w' = vu.$$

Remarquons que la relation de conjugaison est une relation d'équivalence. Ainsi, la *classe de conjugaison* d'un mot est définie comme l'ensemble des mots équivalents au premier par la relation de conjugaison.

Remarque 7.84 Considérons les deux opérations suivantes sur les mots :

- Opération H : choisir un élément de la classe chinoise d'un mot,
- Opération *Rot* : placer la dernière lettre d'un mot en première position.

La classe de conjugaison d'un mot est l'ensemble des mots qu'on peut obtenir par application d'un nombre fini d'opérations H et *Rot*.

Le théorème suivant montre que la classe de conjugaison d'un mot a une structure très simple. On le verra comme corollaire direct du théorème 7.87.

Théorème 7.85 *La classe de conjugaison d'un mot est égale à sa classe d'évaluation, c'est-à-dire à l'ensemble des mots qui ont même évaluation que lui.*

Définition 7.86 (Relation $\approxeq$) *Soit $\approxeq$ la relation d'équivalence définie sur les mots par $a_1a_2\ldots a_k = w \approxeq w' = a'_1a'_2\ldots a'_k$ si et seulement si*

- $w \equiv w'$ *ou*
- $a_{k-1}a_ka_1 \equiv a'_{k-1}a'_ka'_1$ *ou*
- $a_ka_1a_2 \equiv a'_ka'_1a'_2$,

On dit dans ce cas que w et w' sont dans la même classe circulaire.

Autrement dit, cela revient à dessiner un mot sur un cercle avec une case pointée en début de mot et à faire toutes les réécritures entre trois lettres voisines. On a dessiné figure 7.11 pour $n = 4$ les deux classes circulaires ainsi obtenues.

La congruence $\approxeq$ est naturellement intermédiaire entre la relation de conjugaison $\sim$ et la relation de congruence chinoise usuelle $\equiv$.

Par exemple, on a *badc* $\approxeq$ *cadb* $\approxeq$ *bacd* puisque *dcb* $\equiv$ *dbc* $\equiv$ *cdb*.

Théorème 7.87 *On se place dans le cas standard avec un alphabet à n lettres.*

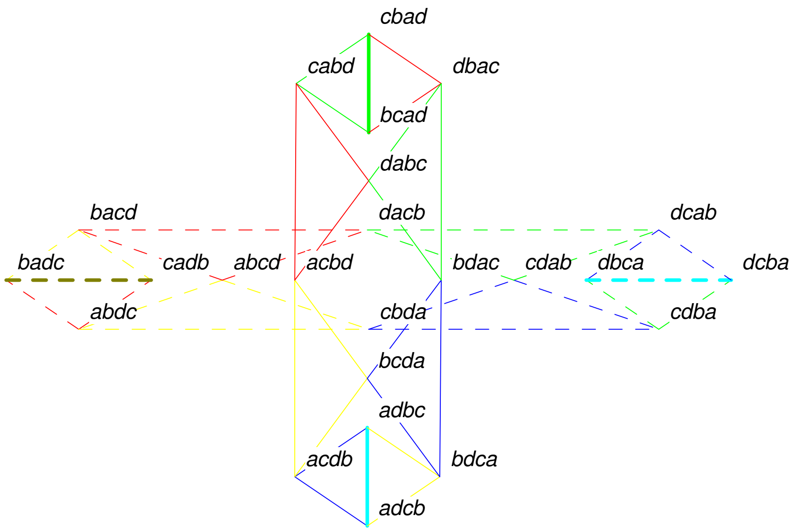


FIG. 7.11 : Les classes circulaires de la congruence chinoise sur 4 lettres.

1) Si n est impair, il y a une seule classe circulaire chinoise.

2) Si n est pair, il y a exactement deux classes circulaires chinoises. De plus, l'application Rot échange ces deux classes.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la classe circulaire chinoise d'un mot est incluse dans sa classe de conjugaison, elle-même incluse dans sa classe d'évaluation. Nous définissons l'algorithme suivant :

Algorithme de standardisation de la relation circulaire.
Soient w un mot standard, de longueur $|w| > 2$, a la plus petite lettre de w et z la plus grande lettre de w.

- Étape 1 : déplacer la lettre a jusqu'à la position juste à droite de z en utilisant les congruences élémentaires de $\approx$: $cba \approx cab$ et $bca \approx cab$ (a se déplace vers la gauche),
- Étape 2 : Déplacer le bloc za jusqu'au début de w en utilisant les congruences élémentaires $bca \equiv cab$ comme dans $y(za) \approx (za)y$.[4] (za se déplace vers la gauche).

En appliquant cet algorithme à un mot w, on obtient un mot w'. On peut alors l'appliquer récursivement sur u qui possède deux lettres de moins. Comme a et z sont deux lettres extrêmes de l'alphabet toute lettre peut traverser le bloc za sans difficultés. Si n est pair, l'itération de l'algorithme sur w termine ainsi :

[4]Puisque toutes les autres lettres sont supérieures à a et inférieures à z.

– soit $w \approx zayb \dots \alpha\beta$,

– soit $w \approx zayb \dots \beta\alpha$,

où α et β sont les lettres médianes de A. Si n est impair, l'itération de l'algorithme sur w termine nécessairement sur $zayb \dots \alpha$ où α est la lettre médiane de l'alphabet. Nous avons donc montré le théorème si n est impair.

Montrons maintenant le cas pair. D'après ce qui précède, on sait qu'il y a au plus deux classes. Pour montrer qu'il y en a exactement deux, il suffit de montrer que deux mots équivalents par $\approx$ donnent le même résultat par l'algorithme. Il suffit de le montrer sur les réécritures élémentaires, où le résultat est immédiat.

Il est clair que les classes circulaires sont stables par application de Rot. De plus, on montre par une récurrence évidente que

$$ayb \dots \alpha\beta z \approx zayb \dots \beta\alpha.$$

□

Par exemple, la classe du mot *faebdc* est envoyée sur la classe du mot *faebcd* par Rot puisque *cfaebd* $\approx$ *faebcd* (*c* traverse tous les couples de lettres).

Remarque 7.88 Le *centre* du monoïde chinois est l'ensemble des mots commutants avec tous les autres mots. Comme il était déjà annoncé dans [17], on peut vérifier facilement que le centre est

$$(za)^*.$$

Index des notations

Index

Bibliographie

[1] G. E. ANDREWS, The theory of partitions, *Encyclopedia of mathematics ans its applications*, (vol. 2), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

[2] I. N. BERNSTEIN, I. M. GELFAND ET S. I. GELFAND, Schubert cells and the cohomology of the space G/P, *Russian Math. Surveys* **28** (1973), 1–26.

[3] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, *Hermann*, 1975.

[4] P. BOUWKNEGT ET K. PILCH, The deformed Virasoro algebra at roots of unity, *Commun. Math. Phys.* **196** (1998), 249-288.

[5] R. W. CARTER, Representation theory of the 0-Hecke algebra, *J. Algebra* **15** (1986), 89–103.

[6] J. CASSAIGNE, M. ESPIE, F. HIVERT, D. KROB ET J.-C. NOVELLI, The Chinese monoïd, *dans* Actes du 8ème congrès « Séries Formelles et Combinatoire Algêbrique », Univ. Minnesota, Minneapolis, 1996, 69–80.

[7] I. CHEREDNIK, On R-matrix quantization of formal loop groups, *dans* « Group theoretical methods in physics », Proc 3rd Semin. Yurmala (USSR) 1985,**2** (1986), 161-180.

[8] I. CHEREDNIK, A unification of Knizhnik-Zamolodchikov and Dunkl operators via affine Hecke algebras, *Invent. Math.* **106**(2) (1991), 411-432.

[9] I. CHEREDNIK, Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures, *Ann. Math.* **141** (1995), 191-216.

[10] E. DATE, M. JIMBO ET T. MIWA, Representations of $U_q(gl_n)$ at $q = 0$ and the Robinson-Schensted correspondence, *dans* « Physics and mathematics of strings », Memorial volume of V. Knizhnik, *L. Bring, D. Friedan et A. M. Polyakov, éditeurs*, World Scientific, 1990.

[11] M. DEMAZURE, Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, *Ann. Sc. E.N.S.* **47** (1974), 53–88.

[12] M. DEMAZURE, Une formule des caractères, *Bull. Sc. Math.* **98** (1974), 163–172.

[13] J. DÉSARMÉNIEN, Fonctions symétriques associées à des suites classiques de nombres, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **16**(4) (1983), 271–304.

[14] R. DIPPER ET S. DONKIN, Quantum GL_n, *Proc. London Math. Soc.* **63** (1991), 165–211.

[15] G. DUCHAMP, F. HIVERT ET J.-Y. THIBON, Some common generalisation of quasi-symmetric and noncommutative symmetric functions, *prépublication* (1998).

[16] G. DUCHAMP, A. KLYACHKO, D. KROB ET J.-Y. THIBON, Noncommutative symmetric functions III : Deformations of Cauchy and convolution algebras, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **1** (1997), 159–216.

[17] G. Duchamp et D. Krob. Plactic-growth-like monoids, *dans* Words, languages and combinatorics II, Kyoto, Japan, 25-28 August 1992, *M. Ito et H. Jürgensen, éditeurs*, World Scientific, 1994, p. 124–142.

[18] G. Duchamp, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, T. Scharf, et J.-Y. Thibon, Euler-Poincaré characteristic and polynomial representations of Iwahori-Hecke algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **31** (1995), 179–201.

[19] G. Duchamp, D. Krob, B. Leclerc et J.-Y. Thibon, Fonctions quasi-symétriques, fonctions symétriques non commutatives et algèbres de Hecke à $q = 0$, *C.R. Acad. Sci. Paris* **322** (1996), 107–112.

[20] H. O. Foulkes, A survey of some combinatorial aspects of symmetric functions, *dans* « Permutations », Gauthier-Villars, Paris (1974).

[21] W. Fulton, Young yableaux, London Mathematical Society Student Text, Cambridge Univ. Press, (1997).

[22] A. M. Garsia et M. Haiman, A graded representation model for Macdonald's polynomials, Proc. Nat. Acad. Sci. **90** (1993), 3607–3610.

[23] I. M. Gelfand, D. Krob, B. Leclerc, A. Lascoux, V. S. Retakh et J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions, *Adv. in Math.* **112** (1995), 218–348.

[24] I. Gessel, Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions, *dans* "Combinatorics and algebra", *C. Greene, éditeur*, *Contemporary Mathematics* **34** (1984), 289–301.

[25] I. Gessel et C. Reutenauer, Counting permutations with given cycle structure and descent set, *Journal of combinatorial theory*, **A-64** (2) (1993), 198–215.

[26] J. A. Green, The characters of the finite general linear groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **80** (1955), 402–449.

[27] R. E. Griswold et M. T. Griswold, The Icon Programming Language, *Prentice-Hall*, 2-ième éd., 1990.

[28] P. Hall, The algebra of partitions, *dans* « Combinatorics » P .A. MacMahon, M.I.T. press (Cambridge), 70–84.

[29] G. H. Hardy, Ramanujan, Cambridge Univ. Press, Cambridge, MA, (1940).

[30] F. Hivert, Affine Hecke algebras and quasi-symmetric functions, *prépublication* (1998).

[31] R. Hotta et T. A. Springer, A specialization theorem for certain Weyl group representations and application to the Green polynomials of unitary groups, *Inv. Math.* **41** (1977), 113–140.

[32] C. G. Jacobi, De Functionibus alternantibus, *Crelle's Journal*, **22**, 360-431.

[33] K. Johnsen, On a forgotten note by Ernst Steinitz on the theory of Abelian groups, *Bull. London Math. Soc.* **14** (1982), 353–355.

[34] M. Kashiwara, On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991), 465-516.

[35] A. N. Kirillov et N. Yu. Reshetikhin, Bethe Ansatz and the combinatorics of Young tableaux, *J. Sov. Math.* **41** (1988), 925–955.

[36] A. N. Kirillov et M. Noumi, Affine Hecke algebras and raising operators for Macdonald polynomials, *preprint* q-alg/9605004 (1996).

[37] A. A. KLYACHKO, Lie elements in the tensor algebra, *Siberian Math. J.* **15** (1974), 1296–1304.

[38] D. E. KNUTH, Permutations, matrices and generalized Young tableaux, *Pacific J. Math.* **34**, 709–727, 1970.

[39] D. E. KNUTH, The art of computer programming – Volume 3 : Sorting and Searching, Addison Wesley, 1976

[40] D. KROB ET J.-Y. THIBON, Noncommutative symmetric functions IV : Quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$, *J. Alg. Comb.* **6** (1997), 339–376.

[41] D. KROB ET J.-Y. THIBON, A Crystalizable version of $U_q(gl_n)$, *dans* Actes du $9^{\text{ème}}$ congrès « Série Formelles et Combinatoire Algébrique », *C. Krattenthaler, éditeur*, Vienne, (1997).

[42] D. KROB ET J.-Y. THIBON, Noncommutative symmetric functions V : A degenerate version of $U_q(gl_N)$, *prébublication*, (1997).

[43] A. LASCOUX, Cyclic permutations on words, tableaux et harmonic polynomials, *Proc. Conf. on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)*, Manoj Prakashar, Madras (1991), 323-347

[44] A. LASCOUX, B. LECLERC ET J.-Y. THIBON, Fonctions de Hall-Littlewood et polynômes de Kostka-Foulkes aux racines de l'unité, *C.R. Acad. Sci. Paris* **316** (1993), 1–6.

[45] A. LASCOUX, B. LECLERC ET J.-Y. THIBON, Green polynomials and Hall-Littlewood functions at roots of unity, *Europ. J. Combinatorics* **15** (1994), 173–180.

[46] A. LASCOUX, B. LECLERC ET J.-Y. THIBON, Polynômes de Kostka-Foulkes et graphes cristallins des groupes quantiques de type A_n, *C.R. Acad. Sci. Paris* **320** (1995), 131–134.

[47] A. LASCOUX, B. LECLERC ET J.-Y. THIBON, Ribbon tableaux, Hall-Littlewood functions, quantum affine algebras, and unipotent varieties, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 1041–1068.

[48] A. LASCOUX, B. LECLERC ET J.-Y. THIBON, Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras, *Commun. Math. Phys.* **181** (1997), 205–263.

[49] A. LASCOUX ET M. P. SCHÜTZENBERGER, Le Monoïde plaxique, *Quad. del. Ric. Sci.* **109** (1981), 129–156.

[50] A. LASCOUX ET M. P. SCHÜTZENBERGER, Symmetry and flag manifold, *Invariant Theory Springer L.N.* **996** (1983), P. 118-144.

[51] A. LASCOUX ET M. P. SCHÜTZENBERGER, Key and standard bases, *dans* "Invariant Theory and Tableaux", *IMA vol. in Maths. and Appl.* **19** (1990), 125–144

[52] A. LASCOUX ET M. P. SCHÜTZENBERGER, Symmetrization operators on polynomial rings, *Funct. Anal. Appl.* **21** (1987), 77–78.

[53] B. LECLERC ET J.-Y. THIBON, Canonical bases of q-deformed Fock spaces, *Int. Math. Res. Notices* **9** (1996), 447–456.

[54] P. LITTELMAN, Crystal Graphs and Young tableaux, *J. of Algebra* (à paraître).

[55] D. E. LITTLEWOOD, The theory of group characters, $2^{\text{ème}}$ édition, Oxford Univ. Press (1950).

[56] D. E. LITTLEWOOD, On certain symmetric functions, *Proc. London Math. Soc.* **43** (1961), 485–498.

[57] A. Lascoux, B. Leclerc et J.-Y. Thibon, The Plactic monoid, *dans* M. Lothaire, Algebraic combinatorics on words, *à paraître chez* Cambridge Univ. Press.

[58] G. Lusztig, Green polynomials and singularities of unipotent classes, *Advances in Math.* **42** (1981), 169–257.

[59] G. Lusztig, Affine Hecke algebras and their graded version, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 599–635.

[60] G. Lusztig, Equivariant K-theory and representations of Hecke algebras, *Proc Amer. Math. Soc.* **94** (1985), 337–342.

[61] I. G. Macdonald, A new class of symmetric functions, *dans* Actes 20^{e} semin. Lotharingien. *Publ. I.R.M.A. Strasbourg*, **372/S-20** (1988), 131–171.

[62] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, *Clarendon Press*, (1995).

[63] I. G. Macdonald, Note on Schubert Polynomials, *Publications du LACIM*, Montreal, (1991).

[64] P. A. MacMahon, Combinatorial analysis, *Cambridge University Press*, (1915) Chelsea reprint 1960.

[65] C. Malvenuto, Produits et coproduits des fonctions quasi-symétriques et de l'algèbre des descentes, *Thèse*, LACIM, UQAM, Montreal (1994).

[66] C. Malvenuto et C. Reutenauer, Duality between quasi-symmetric functions and Solomon descent algebra, *J. Algebra* **177** (1995), 967–982.

[67] A. Nakayashiki et Y. Yamada, Kotska polynomials and energy functions in solvable lattice models, *Selecta Mathematica*, **3** (1997), 547–599.

[68] P. N. Norton, 0-Hecke algebras, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **27** (1979), 337–357.

[69] J.-C. Novelli, On the hypoplactic monoid, *dans* Actes du 9$^{\text{ème}}$ congrès « Série Formelles et Combinatoire Algébrique » *C. Krattenthaler, éditeur, Vienne*, (1997).

[70] S. Poirier, Fonctions symétriques, ensembles de descentes et classe de conjugaison dans les produits en couronne, *Publications du LACIM*, Montréal, (1996).

[71] M. Reineke, Generic extensions and multiplicative bases of Hall algebras at $q = 0$, *Prépublication.*

[72] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford science publications, (1993).

[73] G. de B. Robinson, On the representation theory of the symmetric group, *Amer. J. Math.* **60**, 1938, p. 745–760.

[74] C. Schensted, Longest increasing and decreasing subsequences, *Canad. J. Math.* **13**, 1961, p. 178–191.

[75] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternieren den Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, *Crelle's Journal* **139** (1911), 155–250 (Ges. Abhandlugen, **1**, 346–441).

[76] M.-P. Schützenberger . La correspondance de Robinson, *dans* Combinatoire et représentation du groupe symétrique, *D. Foata, éditeur, Lecture Notes in Math.*, Vol. 579, Springer-Verlag, New York, NY, 1977, p. 59–135.

[77] L. Solomon, A Mackey formula in the group ring of a coxeter group, *J. Algebra* **41** (1976), 255-268.

[78] D. Stanton, Invariant theory and tableaux, *Springer-Verlag*, New-York.

[79] E. STEINBERG, A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field, *Trans. Amer. Math. Sac.* **71** (1951), 274–282.

[80] E. STEINITZ, Zur Theorie der Abel'schen Gruppen„ *Jarhesbericht der DMV* **9** (1901), 80–85.

[81] M. TAKEUCHI, A two-parameter quantization of $GL(n)$, *Proc. Japan Acad.* **66** Ser. A (1990), 112–114 .

[82] B. C. V. UNG, NCSF, a maple package for noncommutative symmetric functions, *Maple Technical Newsletter* **3-3** (1996), 24-29.

[83] B. C. V. UNG ET S. VEIGNEAU, ACE un environnement en combinatoire Algébrique, *dans* Actes du 7ème congrès « Série Formelles et Combinatoire Algébrique », B. Leclerc et J.-Y. Thibon, éditeurs, (1996).

[84] H. WEYL, The classical groups, *Princeton Univ. Press.*

[85] C. N. YANG, Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1312–1325.

[86] A. YOUNG, Quantitative substitutional analysis I-IX., *Proc. London Math. Soc.*