C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–??, 2001 – PXMA????.TEX –
Combinatoire/*Combinatorics*
(Algèbre/*Algebra*)

Sur quelques propriétés de l'algèbre des arbres binaires

Florent HIVERT [a], Jean-Christophe NOVELLI [b], Jean-Yves THIBON [c]

[a] Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée, 77454 Marne-la-Vallée cedex
Courriel : hivert@univ-mlv.fr
[b] Laboratoire Franco-Russe de Mathématiques, Université Indépendante de Moscou, 11, Bolchoi Vlassesky per., 121002, Moscou. Courriel : novelli@mccme.ru
[c] Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée, 77454 Marne-la-Vallée cedex
Courriel : jyt@univ-mlv.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous définissons une involution qui permet de ramener à une forme triangulaire par blocs les matrices de Gram de l'algèbre des arbres binaires plans. Ceci nous conduit à conjecturer l'existence d'une tour d'algèbres ayant cette dernière pour anneau de Grothendieck. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On some properties of the algebra of planar binary trees

Abstract. *We define an involution which reduces to a block triangular form the Gram matrices of the algebra of planar binary trees. This leads us to conjecture the existence of a tower of algebras admitting the latter as its Grothendieck ring.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Dans une note précédente [HNT02], nous avons attiré l'attention sur la similitude entre l'algèbre des arbres binaires $\mathbf{PBT}$ de [LR98], les fonctions symétriques libres $\mathbf{FSym}$ et les fonctions symétriques non commutatives $\mathbf{Sym}$. D'après [HNT02], $\mathbf{PBT}$ peut s'identifier à la sous-algèbre de $\mathbf{FQSym}$ engendrée par les polynômes

$$\mathbf{P}_T = \sum_{\mathcal{P}(\sigma)=T} \mathbf{F}_\sigma \,. \tag{1}$$

Cette définition est en tout point semblable à celle des fonctions de Schur rubans non commutatives R_I, qui peut s'écrire [NCSF4]

$$R_I = \sum_{P(\sigma)=I} \mathbf{F}_\sigma \,, \tag{2}$$

où $P(\sigma)$ est le P-symbole hypoplaxique de σ, un quasi-ruban standard étant ici identifié à une composition.

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

Rappelons que $\mathbf{FQSym}$ est naturellement munie d'un produit scalaire [DHT99, NCSF6] défini par $\langle \mathbf{F}_\sigma, \mathbf{G}_\tau \rangle = \delta_{\sigma\tau}$, et que les entiers

$$c_{I,J} = \langle R_I, R_J \rangle \quad |I| = |J| = n$$

s'interprètent comme les invariants de Cartan de la 0-algèbre de Hecke $H_n(0)$: le coefficient $c_{I,J}$ est égal à la multiplicité du module simple S_I dans le module projectif indécomposable P_J [NCSF4].

La similitude entre les équations (1) et (2) conduit à s'interroger sur la possibilité d'une interprétation analogue des entiers

$$c_{T,U} = \langle \mathbf{P}_T, \mathbf{P}_U \rangle = \sum_{\mathcal{P}(\sigma)=T; \mathcal{P}(\sigma^{-1})=U} 1.$$

Cela revient à supposer l'existence d'une tour d'algèbres sur $\mathbb{C}$: $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ avec $\dim_{\mathbb{C}}(A_n) = n!$, dont les modules simples S_T (et donc aussi les modules projectifs indécomposables P_T) seraient indexés par les arbres binaires planaires à n sommets. Pour que l'analogie soit complète, il faudrait aussi disposer de plongements naturels $A_p \otimes A_q \hookrightarrow A_{p+q}$ et d'identifications de $\mathbf{PBT}$ aux sommes directes de groupes de Grothendieck

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{n\geq 0} G_0(A_n)\,, \quad \mathcal{K} = \bigoplus_{n\geq 0} K_0(A_n)$$

telles que les produits de $\mathbf{PBT}$ et $\mathbf{PBT}^*$ exprimés dans des bases appropriées correspondent à l'induction de $A_p \otimes A_q$ à A_{p+q}.

Soit $M^{(n)}$ la matrice des $c_{T,U}$. Le calcul de la seule matrice $M^{(3)}$ suffit à se convaincre qu'elle ne peut pas être directement une matrice d'invariants de Cartan car elle a un zéro sur la diagonale. En effet, si l'on suppose que $\langle \mathbf{P}_T, \mathbf{P}_U \rangle = \dim \hom_{A_n}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_U)$, ou de façon équivalente, si l'on suppose que les modules simples sont indexés de manière à ce que $S_T = P_T/\mathrm{Rad}\, P_T$, on a automatiquement au moins 1 sur la diagonale puisque $\hom_{A_n}(\mathbf{P}_T, \mathbf{P}_T)$ contient au moins l'application identité. Toutefois, les matrices $M^{(n)}$ présentent une structure de blocs intéressante. Ceci nous conduit à nous demander s'il n'existe pas une transformation simple produisant une suite de matrices ayant les propriétés voulues.

Commençons par la structure de blocs. Soit T un arbre binaire. On note σ_T le *mot canonique* de T, défini comme le plus grand élément pour l'ordre lexicographique de la classe sylvestre de T. On appelle *squelette* de T le couple d'entiers (k, l) défini par

– le plus grand entier $k \leq n-1$ tel que $\sigma_T(n) = n, \ldots, \sigma_T(n-k+1) = n-k+1$, autrement dit le nombre de points fixes à droite de la permutation (moins 1 si σ est l'identité),
– le nombre l de saillances du mot obtenu en effaçant les k dernières lettres de σ_T. Rappelons que i est une saillance de σ si $\sigma(i) > \sigma(j)$ pour tout $j > i$.

Le squelette de T peut se visualiser sur la composante formée de la succession de fils droits la plus haute et des sommets se trouvant au-dessus de ceux-ci, les deux nombres se lisant comme suit : le nombre de points fixes à la fin de σ_T correspond à la taille de la branche gauche moins un, et le nombre de saillances correspond à la taille de la branche droite. La figure 1 montre le squelette de la classe de $\sigma = (8, 9, 7, 5, 4, 6, 1, 2, 3, 10, 11)$, qui est ici $(2, 4)$.

Nous pouvons maintenant présenter la structure de blocs de $M^{(n)}$. Nous dirons que deux arbres T et U sont *dans le même bloc* s'il existe une puissance de $M^{(n)}$ dans laquelle le coefficient (T, U) est non nul (cette relation est symétrique car $M^{(n)}$ l'est, par définition).

THÉORÈME 1. – *Deux arbres sont dans le même bloc si et seulement s'ils ont même nombre de sommets et même squelette.*

THÉORÈME 2. – *Soit ν l'involution sur les arbres définie par $\nu(T) = T'$, où $T' = \mathcal{P}(\sigma_T^{-1})$. Alors*
– *l'involution ν préserve les blocs (T et $\nu(T)$ ont même squelette),*

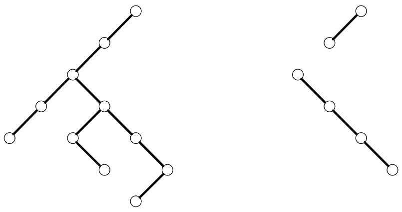

FIG. 1 – Un arbre et son squelette.

– *la matrice $C^{(n)}$ définie par*

$$C^{(n)}(T,U) = \langle\, \mathbf{P}_{\nu(T)}, \mathbf{P}_U \,\rangle$$

est unitriangulaire inférieure si l'on ordonne les arbres, d'abord par squelettes, puis à l'intérieur d'un même squelette, par l'ordre lexicographique sur leurs mots canoniques.

Nous avons représenté figure 2 les premières matrices $C^{(n)}$ en omettant les zéros pour faciliter la lecture. L'ordre des arbres sur les lignes et colonnes correspond aux ordres respectifs sur leurs mots canoniques :

– 12 ; 21,
– 123 ; 213 ; 231, 312 ; 321,
– 1234 ; 2134 ; 2314, 3124 ; 3214 ; 2341, 3241, 3412, 4123, 4213 ; 3421, 4231, 4312 ; 4321.

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 2 – Les matrices $C^{(n)}$ pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

On en déduit alors une nouvelle fois que $\mathbf{PBT}$ est auto-duale. En effet, pour tout n,

$$\det M^{(n)} = \varepsilon_n(\nu) \det C^{(n)} \neq 0,$$

où $\varepsilon_n(\nu)$ est la signature de la permutation de l'ensemble des arbres binaires à n sommets induite par ν. Il vient donc que la restriction du produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ de $\mathbf{FQSym}$ à la sous-algèbre de Hopf $\mathbf{PBT}$ est non dégénérée. Comme $\mathbf{FQSym}$ est auto-duale, $\mathbf{PBT}$ l'est aussi.

Étudions maintenant d'un peu plus près les blocs de la matrice ainsi obtenue. Appelons *triangle de Catalan* [Slo] (respectivement *triangle de Stirling de première espèce*) la matrice triangulaire A (resp. B) dont le coefficient $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$) est le coefficient de $t^i u^j$ dans les expressions respectives :

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n+k} \binom{n+k}{k} u^k, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} t^n \prod_{k=1}^{n-1} (1 + k\,u).$$

L'interprétation combinatoire (bien connue) de ces nombres est la suivante : $a_{i,j}$ est le nombre d'arbres binaires de taille i dont le nombre d'éléments hors de la chaîne des fils droits partant de la racine est j. Le coefficient $b_{i,j}$ est le nombre de permutations de longueur i dont le complémentaire du nombre de saillances est j. On a représenté figure 3 les deux triangles où l'on a mis entre parenthèses les arbres n'ayant pas de fils droit à la racine et les permutations n'ayant qu'une seule saillance. Signalons que les lignes du triangle de Catalan donnent les coefficients des polynômes de Poincaré des algèbres de coinvariants de l'action quasi-symétrisante du groupe symétrique, calculées par Aval-Bergeron-Bergeron [ABB02].

1						
1	(1)					
1	2	(2)				
1	3	5	(5)			
1	4	9	14	(14)		
1	5	14	28	42	(42)	
1	6	20	48	90	132	(132)

1						
1	(1)					
1	3	(2)				
1	6	11	(6)			
1	10	35	50	(24)		
1	15	85	225	274	(120)	
1	21	175	735	1624	1764	(720)

FIG. 3 – Les triangles de Catalan et des nombres de Stirling de première espèce.

THÉORÈME 3. – *Considérons un bloc de squelette (k, l) de la matrice $C^{(n)}$ pour un entier n donné.*

- *Le nombre $m_n(k, l)$ de lignes de ce bloc est donné par le $(n-k-l+1)$-ieme nombre (ou premier si $l = 1$) de la $(n-k)$-ieme ligne du tableau de Catalan.*
- *La somme $d_n(k, l)$ des éléments de ce bloc est donnée par le $(n-k-l-1)$-ieme nombre (ou premier si $l = 1$) de la $(n-k)$-ieme ligne du tableau de Stirling.*

Pour toute tour d'algèbres (A_n) admettant les $C^{(n)}$ comme matrices d'invariants de Cartan, les squelettes (k, l) correspondent effectivement aux blocs (au sens de sous-algèbres indécomposables) $B_n(k, l)$ de A_n. Alors, $d_n(k, l)$ est la dimension de $B_n(k, l)$, et $m_n(k, l)$ le nombre de ses modules simples.

Remarquons qu'il peut a priori exister plusieurs tours d'algèbres non isomorphes possédant ces propriétés. Nous avons calculé les carquois correspondant à chaque bloc de la matrice pour $n \leq 6$ en mettant le moins de flèches possibles (donc le moins de relations). La structure des carquois et de leurs relations semble posséder une certaine régularité mais elle reste malheureusement insuffisamment comprise pour nous permettre de décrire ces algèbres pour tout n. Nous conjecturons néanmoins le résultat suivant :

CONJECTURE 1. – *Il existe une tour d'algèbres (A_n) dont les $C^{(n)}$ sont les matrices des invariants de Cartan. De plus, il existe des plongements $\rho_{m,n}$ de $A_m \otimes A_n$ dans A_{m+n} tels que si l'on munit $\mathcal{K}$ du produit d'induction $[M] \cdot [N] = [M \otimes_{\mathbb{C}} N \uparrow_{A_m \otimes A_n}^{A_{m+n}}]$, l'application $\mathcal{K} \to \mathbf{PBT}$ qui envoie la classe du module projectif indécomposable P_T sur le polynôme $\mathbf{P}_T$ est un isomorphisme d'anneaux.*

Références bibliographiques

[ABB02] J.-C. Aval, F. Bergeron, N. Bergeron, Ideals of quasi-symmetric functions and super-covariant polynomials for S_n, Advances in Mathematics, à paraître.

[DHT99] G. Duchamp, F. Hivert, J.-Y. Thibon, Une généralisation des fonctions quasi-symétriques et des fonctions symétriques non commutatives, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), no. 12, 1113–1116.

[NCSF6] G. Duchamp, F. Hivert, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions VI: free quasi-symmetric functions and related algebras, Internat. J. Alg. Comput. 12 (2002), 671–717.

[HNT02] F. Hivert, J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon, Un analogue du monoïde plaxique pour les arbres binaires de recherche, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. 332 (2002) 577–580.

[NCSF4] D. Krob, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions IV: Quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$, J. Algebraic Combin. 6 (1997), no. 4, 339–376.

[LR98] J.-L. Loday, M.O. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, Adv. Math. 139 (1998), no. 2, 293–309.

[LR02] J.-L. Loday, M.O. Ronco, Order structure on the algebra of permutations and of planar binary trees, J. Algebraic Combin. 15 (2002), no. 3, 253–270.

[Slo] N.J.A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://www.research.att.com/~njas/sequences/, A009766.