C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–??, 2001 – PXMA????.TEX –
Combinatoire/*Combinatorics*
(Algèbre/*Algebra*)

Un analogue du monoïde plaxique pour les arbres binaires de recherche

Florent HIVERT [a], Jean-Christophe NOVELLI [b], Jean-Yves THIBON [c]

– **Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée, 77454 Marne-la-Vallée cedex**
[a] **Courriel : hivert@univ-mlv.fr**
[b] **Courriel : novelli@univ-mlv.fr**
[c] **Courriel : jyt@univ-mlv.fr**

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous introduisons une structure de monoïde sur un ensemble d'arbres binaires étiquetés, par un procédé analogue à la construction du monoïde plaxique. Nous en déduisons une nouvelle approche de l'algèbre des arbres binaires de Loday-Ronco. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

An analogue of the plactic monoid for binary search trees

Abstract. *We introduce a monoid structure on a certain set of labelled binary trees, by a process similar to the construction of the plactic monoid. This leads to a new interpretation of the algebra of planar binary trees of Loday-Ronco.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Il existe certaines analogies entre la combinatoire des arbres binaires et celle des tableaux de Young. Par exemple, les étiquetages croissants d'un arbre binaire donné et les tableaux de Young standard d'une forme donnée sont tous deux dénombrés par une « formule des équerres »[7, 17, 8] dont on connaît dans les deux cas des q-analogues naturels [17, 1]. On sait aussi qu'il est possible de construire, au moyen de la correspondance de Robinson-Schensted, une algèbre de Hopf ayant pour base les tableaux de Young standard [15], et qu'une réalisation naturelle de cette algèbre au moyen de polynômes non commutatifs, implique une preuve combinatoire éclairante (en une ligne) de la règle de Littlewood-Richardson [13, 3, 4]. Dans cette réalisation, chaque tableau t de forme λ est un polynôme homogène de degré $n = |\lambda|$ dont l'image commutative est la fonction de Schur s_λ.

Récemment, Loday et Ronco ont introduit une algèbre de Hopf ayant pour base les arbres binaires planaires [11, 12]. Cette algèbre peut, comme la précédente, se réaliser dans une algèbre associative libre [3, 4], chaque arbre binaire complet à n sommets internes étant représenté par un polynôme homogène de degré n en variables non commutatives. En réalité, ces deux algèbres sont, par définition, des sous-bigèbres de l'algèbre de Hopf des permutations de Malvenuto-Reutenauer [14], laquelle a été réalisée dans

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

[3, 4] comme l'algèbre des fonctions quasi-symétriques libres $\mathbf{FQSym}$ dont nous rappelons ci-dessous la définition. Notons au passage que toutes les algèbres en question sont libres [15, 11, 14], mais que cette propriété n'intervient pas dans la construction de leurs réalisations polynomiales.

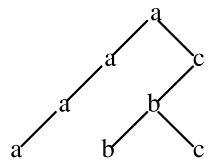
Ce sont ces réalisations qui permettent de faire apparaître l'algèbre des tableaux (ou fonctions symétriques libres) et l'algèbre des arbres binaires comme deux cas particuliers d'une même construction, reposant sur l'existence d'une correspondance de type Robinson-Schensted et d'un monoïde de type plaxique. Cette construction nous apparaît d'autant plus fondamentale qu'un troisième exemple entre dans ce cadre, celui du couple d'algèbres de Hopf en dualité $(\mathbf{Sym}, QSym)$ (fonctions symétriques non commutatives et fonctions quasi-symétriques), lequel correspond au monoïde hypoplaxique [9].

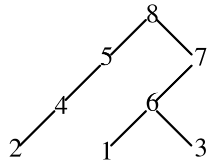
Nous commencerons par rappeler quelques définitions. Nos notations seront celles de [13] et de [3, 4]. Soit $A = \{a_1 < a_2 < \cdots\}$ un alphabet dénombrable totalement ordonné. Les polynômes non commutatifs $\mathbf{F}_\sigma(A) = \sum_{\mathrm{std}\,(w)=\sigma^{-1}} w$, où σ est une permutation et où w parcourt les mots de standardisé σ^{-1} forment une base d'une sous algèbre de $\mathbb{K}\langle A \rangle$ notée $\mathbf{FQSym}_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}$ etant un anneau commutatif quelconque) et simplement $\mathbf{FQSym}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ [3]. On pose également $\mathbf{G}_\sigma = \mathbf{F}_{\sigma^{-1}}$ et on définit un produit scalaire par $\langle \mathbf{F}_\sigma, \mathbf{G}_\tau \rangle = \delta_{\sigma\tau}$.

Soit $w \mapsto (P(w), Q(w))$ la correspondance de Robinson-Schensted usuelle (*cf.* [13]). Pour un tableau standard t de forme λ, on définit la fonction de Schur libre $\mathbf{S}_t$ comme la somme $\mathbf{S}_t = \sum_{P(\sigma)=t} \mathbf{F}_\sigma$. Ainsi qu'il est montré dans [13, 4], les $\mathbf{S}_t$ forment une base d'une sous-algèbre $\mathbf{FSym}$ de $\mathbf{FQSym}$, et cet énoncé peut être vu comme un raffinement de la règle de Littlewood-Richardson, qu'il implique immédiatement. De plus, $\mathbf{FSym}$ est une sous-bigèbre de $\mathbf{FQSym}$.

Nous allons maintenant donner une construction de l'algèbre $\mathbf{PBT}$ des arbres binaires planaires de Loday-Ronco [11] entièrement analogue à celle de $\mathbf{FSym}$. Commençons par l'analogue approprié de la correspondance de Robinson-Schensted. Elle se définit à partir de l'arbre binaire décroissant (ou arbre tournoi) $\mathcal{T}(\sigma)$ associé à une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. C'est un arbre binaire (incomplet) à n sommets, numérotés de 1 à n. La racine est numérotée n (le maximum), et si, en tant que mot, $\sigma = unv$, alors le sous-arbre gauche est $\mathcal{T}(u)$ et le sous-arbre droit $\mathcal{T}(v)$ (u et v étant vus comme des permutations de leurs réarrangements croissants). On notera $[\mathcal{T}(\sigma)]$ la forme de cet arbre (on oublie les étiquettes).

Pour un mot $w \in A^*$, on posera $\mathcal{Q}(w) = \mathcal{T}((\mathrm{std}\,w)^{-1})$, et $\mathcal{P}(w)$ sera l'arbre obtenu en remplaçant chaque étiquette i de $\mathcal{Q}(w)$ par la i-ème lettre de w. Par exemple, si $w = bacaabca$, $\mathrm{std}\,w = \sigma = 51723684$, $\sigma^{-1} = 24581637$ et

$\mathcal{P}(w) =$ 

$\mathcal{Q}(w) =$ 

Ces arbres peuvent se calculer au moyen d'un algorithme d'insertion à la Schensted. Pour construire $\mathcal{P}(w)$, on lit les lettres de w à partir de la droite. La dernière est placée à la racine, puis chaque lettre est insérée récursivement dans le sous-arbre gauche ou droit selon qu'elle est $\leq$ ou $>$ à la racine. L'arbre $\mathcal{Q}(w)$ indique l'ordre (inverse) de création des sommets. Ainsi, l'étiquetage de $\mathcal{P}(w)$ est croissant au sens large dans le sens $\nearrow$ et au sens strict dans le sens $\searrow$, et le parcours infixe de l'arbre produit le réarrangement croissant de w. Il s'agit là d'un algorithme de tri classique [8], et on reconnaît dans $\mathcal{P}(w)$ un arbre binaire de recherche. Quant à $\mathcal{Q}(w)$, c'est un arbre tournoi. Dans le cas où $w = \sigma$ est une permutation, la seule information contenue dans $\mathcal{P}(\sigma)$ est sa forme, et on l'identifie à l'arbre non étiqueté $[\mathcal{T}(\sigma^{-1})]$.

THÉORÈME 1. – *La relation d'équivalence $\sim$ sur le monoïde libre A^* définie par*

$$u \sim v \iff \mathcal{P}(u) = \mathcal{P}(v)$$

coïncide avec la congruence engendrée par les relations

$$zxuy \equiv xzuy\,,\ x \leq y < z \in A\,,\ u \in A^*\,. \tag{1}$$

Cette congruence sera appelée *congruence sylvestre* et le monoïde quotient $\mathrm{Sylv}(A) = A^*/\equiv$, le *monoïde sylvestre*.

La congruence sylvestre est aux arbres ce que la congruence plaxique (engendrée par les relations de Knuth) est aux tableaux [10, 13]. Dans le cas du monoïde plaxique, les classes ont des représentants canoniques (les lectures par lignes des tableaux). Il en est de même ici :

PROPOSITION 2. – *Soit T un arbre binaire de recherche, et soit w_T le mot obtenu en effectuant son parcours postfixe (parcours en profondeur commençant par la gauche, où l'on écrit la lettre étiquetant un noeud quand on le visite pour la dernière fois). Alors, $\mathcal{P}(w_T) = T$, et w_T est minimal pour l'ordre lexicographique dans sa classe sylvestre. De plus, en itérant à partir de w_T les règles de réécriture $xzuy \to zxuy$, obtenues en orientant les relations sylvestres, on engendre toute la classe de w_T.*

Les mots de la forme w_T seront appelés *mots-arbres* (ou plus simplement *arbres*).

Pour un arbre binaire T non étiqueté (identifié à un $\mathcal{P}$-symbole de permutation), introduisons le polynôme

$$\mathbf{P}_T(A) = \sum_{\mathcal{P}(\sigma)=T} \mathbf{F}_\sigma \,.$$

En utilisant le fait que la congruence sylvestre est compatible à la restriction aux intervalles de l'alphabet, et en raisonnant comme dans [4], prop. 3.12,on en déduit l'identité suivante.

THÉORÈME 3. – *Soient T' et T'' deux arbres binaires non étiquetés. Alors,*

$$\mathbf{P}_{T'}\mathbf{P}_{T''} = \sum_{T\in \mathrm{Sh}(T',T'')} \mathbf{P}_T \,,$$

où $\mathrm{Sh}(T',T'')$ désigne l'ensemble des arbres T tels que w_T apparaît dans le produit de mélange $u \sqcup\!\sqcup v$ où $u = w_{T'}$ et où $v = w_{T''}[k]$ est le mot-arbre de T'' décalé du nombre k de sommets de T'.

Cet énoncé est entièrement analogue à la « règle de Littlewood-Richardson libre »présentée dans [13, 4]. Il fournit une nouvelle construction de l'algèbre des arbres binaires de Loday-Ronco. Dans [12], le produit $\mathbf{P}_{T'}\mathbf{P}_{T''}$ est décrit au moyen d'un ordre sur les arbres binaires (notons au passage que Loday et Ronco utilisent des arbres binaires complets, dont nous ne conservons ici que les noeuds internes). Cet ordre peut s'obtenir à partir de l'ordre faible du groupe symétrique : c'est la restriction de celui-ci aux permutations qui sont des mots-arbres. Remarquons que les résultats de Björner et Wachs [2] entraînent que les classes sont des intervalles de l'ordre faible.

Ainsi, l'ensemble $\mathrm{Sh}(T',T'')$ est un intervalle de l'ordre de Loday-Ronco. Dans le cas des tableaux, il est possible de définir un ordre similaire, quotient de l'ordre faible par les relations de Knuth, dont les ensembles $\mathrm{Sh}(t',t'')$ de [13, 4] sont également des intervalles.

Le cardinal d'une classe plaxique de permutations est égal au nombre de tableaux standard d'une certaine forme, donné par la célèbre formule des équerres [7], dont on connaît un q-analogue [17] qui prend en compte l'indice majeur des permutations. De la même manière, le dénombrement par indice majeur de la classe sylvestre correpondant à l'arbre T à n sommets est donné par la spécialisation $(q)_n\mathbf{P}_T(1,q,q^2,\cdots)$, égale, d'après [1] à

$$\sum_{\mathcal{P}(\sigma)=T} q^{\mathrm{maj}\,(\sigma)} = \frac{[n]_q!}{\prod_{\circ\in T} q^{\delta_\circ}[h_\circ]_q} \,, \tag{2}$$

où, pour un sommet $\circ$ de T, $h_\circ$ est le nombre de sommets du sous-arbre dont il est racine, et $\delta_\circ$ celui de son sous-arbre droit.

La congruence sylvestre permet également une description simple du dual de Hopf de l'algèbre des arbres binaires :

THÉORÈME 4. – *Le dual $\mathbf{PBT}^*$ de $\mathbf{PBT}$ est isomorphe à l'image de $\mathbf{FQSym}$ par la projection canonique*

$$\pi : \mathbb{C}\langle\, A\,\rangle \longrightarrow \mathbb{C}[\mathrm{Sylv}\,(A)] \simeq \mathbb{C}\langle\, A\,\rangle/\equiv \,.$$

La base duale $\mathbf{Q}_T$ de $\mathbf{P}_T$ est $\mathbf{Q}_T = \pi(\mathbf{G}_{w_T})$, où w_T est la permutation canoniquement associée à l'arbre T.

Il est facile d'en déduire que $\mathbf{PBT}$ est en fait auto-duale (ce qui est aussi une conséquence de [16]). Le dual de $\mathbf{FSym}$ admet une description similaire [15, 5]. Ces résultats sont des conséquences de la « formule de Cauchy libre »

$$\sum_{\mathrm{std}\,(u)=\mathrm{std}\,(v)^{-1}} u \otimes v = \sum_{\sigma} \mathbf{U}_\sigma \otimes \mathbf{V}_\sigma$$

pour tout couple $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ de bases adjointes de $\mathbf{FQSym}$.

Pour calculer les éléments primitifs de $\mathbf{PBT}$ et de $\mathbf{PBT}^*$ (ou de $\mathbf{FSym}$ et de $\mathbf{FSym}^*$), on peut procéder comme dans [4]. On part d'une base multiplicative d'un côté. Les éléments de la base duale correspondant aux indécomposables de notre base multiplicative forment alors une base d'éléments primitifs du dual. Le calcul explicite se ramène à celui de la fonction de Möbius de l'ordre approprié. Dans la cas de $\mathbf{PBT}$, et plus généralement des algèbres dendriformes libres, les éléments primitifs ont été déterminés dans [16]. Toutefois, le procédé proposé ci-dessus conduit à une caractérisation différente.

Finalement, remarquons qu'on peut construire un couple de graphes gradués (Γ, Γ^*) en dualité au sens de Fomin [6], dont les sommets de degré n sont les arbres binaires à n sommets. Dans Γ, on a une arête entre T et T' si $\mathbf{P}_{T'}$ apparaît dans le développement de $\mathbf{P}_T\mathbf{P}_\bullet$. Dand Γ^*, cette même arête sera présente si $\mathbf{Q}_{T'}$ apparaît dans $\mathbf{Q}_T\mathbf{Q}_\bullet$. La correspondance sylvestre est alors la correspondance de Fomin associée à ce couple de graphes.

Remerciements. Nous tenons à remercier Jean-Louis Loday et María Ronco pour leurs commentaires.

Références bibliographiques

[1] A. Björner, M. Wachs, q-Hook length formulas for forests, J. Combin. Theory Ser. A 52 (1989), 165–187.
[2] A. Björner, M. Wachs, Permutation statistics and linear extensions of posets, J. Combin. Theory Ser. A 58 (1991), 85–114.
[3] G. Duchamp, F. Hivert, J.-Y. Thibon, Une généralisation des fonctions quasi-symétriques et des fonctions symétriques non commutatives, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), no. 12, 1113–1116.
[4] G. Duchamp, F. Hivert, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions VI: free quasi-symmetric functions and related algebras, Internat. J. Alg. Comput. (à paraître).
[5] G. Duchamp, F. Hivert, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions VII (en préparation).
[6] S. Fomin, Duality of graded graphs, J. Alg. Combinatorics 3 (1994), 357–404.
[7] J.S. Frame, G. de B. Robinson, R.M. Thrall, The hook graphs of the symmetric groups, Canadian J. Math. 6, (1954). 316–324.
[8] D.E. Knuth, The art of computer programming, vol.3: Sorting and searching, Addison-Wesley, 1973.
[9] D. Krob, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions IV: Quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$, J. Algebraic Combin. 6 (1997), no. 4, 339–376.
[10] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger, Le monoïde plaxique, Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics (Naples, 1978), pp. 129–156, Quad. Ricerca Sci., 109, CNR, Rome, 1981.
[11] J.-L. Loday, M.O. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, Adv. Math. 139 (1998), no. 2, 293–309.
[12] J.-L. Loday, M.O. Ronco, Order structure on the algebra of permutations and of planar binary trees, J. Algebraic Combin. 15 (2002), no. 3, 253-270.
[13] M. Lothaire, Algebraic combinatorics on words, Cambridge University press, Cambridge, 2002.
[14] C. Malvenuto, C. Reutenauer, Duality between quasi-symmetric functions and Solomon descent algebra, J. Algebra 177 (1995), 967–892.
[15] S. Poirier, C. Reutenauer, Algèbres de Hopf de tableaux, Ann. Sci. Math. Québec 19 (1995), no. 1, 79–90.
[16] M.O. Ronco, Primitive elements in a free dendriform Hopf algebra, Contemp. Maths. Vol. 267 (2000), 245–264.
[17] R.P. Stanley, Ordered structures and partitions, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 119, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972.