

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Faculté des Sciences
Département d'Informatique

Distance des transpositions

Anthony LABARRE

Directeur de mémoire :
Pr. Jean-Paul Doignon

Mémoire présenté en vue de
l'obtention du Diplôme d'Études
Approfondies en Sciences

Année académique 2004-2005

Table des matières

1	Introduction	2
2	Rappels sur les permutations et les graphes	4
2.1	Permutations	4
2.2	Notions sur les graphes	6
3	Distance des transpositions	7
3.1	Rappels	7
3.2	Génération des permutations avec leur distance	13
3.3	Utilisation des cycles de la permutation	14
3.4	Transpositions échangeables	17
3.5	Formule explicite pour certaines permutations	18
3.5.1	Cycles orientés	21
3.5.2	Cycles non orientés	23
3.5.3	Distance des γ -permutations	26
3.6	Une nouvelle majoration	29
3.7	Amélioration de la majoration	30
3.7.1	Amélioration de la majoration par le torisme	30
3.7.2	Amélioration de la majoration par suppressions de 1-cycles	30
3.8	Problème de dénombrement lié au torisme	35
3.9	Problèmes ouverts	36

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire traite d'un cas particulier du problème de réarrangement de génomes (voir Meidanis et Setubal [14] ou Pevzner [15] pour une présentation générale du sujet), qui est motivé par des applications en biologie et qui peut être formulé de la façon suivante : étant donné deux génomes, trouver le nombre minimal de modifications génétiques, ou mutations, transformant l'un en l'autre. Ce nombre est défini comme la *distance* entre ces deux génomes, et nous montrerons plus loin que la distance étudiée dans ce mémoire en est bel et bien une (au sens de la définition classique, reprise comme Définition 2.5). Notons que le problème de réarrangement de génomes possède en fait deux facettes : d'une part, on peut s'intéresser à la recherche d'une séquence minimale d'opérations permettant de transformer un génome en un autre, ce qui nous fournit également la distance entre ces deux génomes ; et d'autre part, on peut chercher à ne calculer que la longueur de cette séquence, ce qui ne nous dit pas comment les génomes évoluent mais simplement quelle quantité de changement se produit. Le calcul de la distance seule est en général plus simple et plus rapide.

Dans la modélisation qui nous intéresse, l'ordre des gènes constituant un génome est connu, mais pas leur orientation (au sens biologique du terme). Les génomes considérés partagent alors le même ensemble de gènes, en possèdent le même nombre, et aucun gène n'est dupliqué : ceci nous permet de représenter ces génomes par des *permutations*. Nous ne considérons ici qu'un seul type de mutation : les *transpositions*, au sens biologique du terme, qui consistent à déplacer un morceau du génome à un autre endroit. Le problème de réarrangement par transpositions a été introduit par Bafna et Pevzner [1] en 1995, et est généralement considéré plus difficile que d'autres problèmes similaires. En particulier, ni la complexité du problème, ni la valeur maximale que la distance correspondante (appelée naturellement *distance des transpositions*) peut atteindre ne sont connues. Plusieurs $\frac{3}{2}$ -approximations polynomiales ont été proposées (par Bafna et Pevzner [1], Christie [3] ou encore Hartman [11]), ainsi que des heuristiques (voir par exemple Christie [3], Guyer, Heath et Vergara [10], Vergara [17] ou encore Walter, Curado et Oliveira [18]). Très récemment, le taux d'approximation a été réduit à $\frac{11}{8}$ par Elias et Hartman [7].

Une propriété intéressante de cette distance, comme nous le montrerons dans le Chapitre 3, est qu'il existe une forme canonique pour ce problème : la distance des transpositions entre deux permutations π, σ est la même qu'entre $\sigma^{-1} \circ \pi$ et la

permutation identité $\iota = (1\ 2\ \cdots\ n)$. Ainsi, nous nous ramenons au problème du *tri par transpositions* d’une permutation, et par abus de langage, nous disons que la distance d’une permutation est sa *distance* à ι .

Nos principales contributions dans ce mémoire sont les suivantes :

- nous montrons qu’une permutation particulière, que certains auteurs appellent la *permutation renversée* et que nous notons $\chi = (n\ n-1\ n-2\ \cdots\ 3\ 2\ 1)$, est telle que :
 - la distance de toute permutation est égale à celle de sa conjuguée par χ (Proposition 3.4) ;
 - la distance de toute permutation est égale à la distance entre la renversée de cette permutation et χ (Corollaire 3.1).
- nous donnons la distribution du nombre de permutations de n éléments à distance k , pour $n \leq 10$ (Table 3.1) ;
- nous nous écartons de l’approche traditionnellement utilisée dans ce type de problème au profit de l’utilisation de notions plus classiques de la théorie des groupes (Section 3.3). Dias et Meidanis [4] avaient également suggéré l’utilisation d’une telle approche, et y avaient recouru pour résoudre un autre problème de réarrangement dans [5]. Comme nous le pensions, cette approche s’est révélée fructueuse dans notre cas, car elle nous a permis d’obtenir les résultats suivants :
 - nous introduisons une classe de permutations particulières, les γ -permutations (Définition 3.16), et établissons une correspondance entre le graphe que nous introduisons en Section 3.3 et celui de Bafna et Pevzner [1] ;
 - nous donnons une formule permettant de calculer en temps linéaire, sans aucune structure de données supplémentaire, la distance des γ -permutations (Proposition 3.12) et de plusieurs autres classes de permutations qui en sont dérivées (Théorème 3.6) ;
 - nous obtenons une nouvelle majoration sur la distance des transpositions (Théorème 3.8).
- nous poursuivons le travail de Hultman [12] sur le dénombrement des permutations dont le graphe des cycles (voir Définition 3.2) contient un nombre donné de cycles (Corollaires 3.3, 3.4 et Conjecture 3.1), et donnons la distribution de ces nombres pour $n \leq 11$ (Table 3.4).

Les Sections 3.3, 3.5 et 3.6 ont constitué le contenu d’un article intitulé “*A New Tight Upper Bound on the Transposition Distance*”, soumis [13].

Chapitre 2

Rappels sur les permutations et les graphes

Ce chapitre présente quelques définitions générales ainsi que des notions de base de la théorie des graphes [2] qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Les définitions plus spécifiques, c'est-à-dire celles qui ont été introduites dans des articles, qui sont un peu plus inhabituelles, qui ne seront utilisées qu'à un endroit bien précis du mémoire ou encore qui nous sont dues seront introduites au fur et à mesure des besoins.

2.1 Permutations

Le terme “permutation” est utilisé dans une variété de sens néanmoins proches les uns des autres. Tentons de clarifier cela. Un ensemble fini $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de n éléments est donné.

Définition 2.1. *Un arrangement de E est une liste de tous les éléments de E , ce qui revient à la donnée d'un ordre total $\leq$ sur E ; l'arrangement correspondant $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ est la liste des éléments de E telle que $e_1 < e_2, e_2 < e_3, \dots, e_{n-1} < e_n$.*

Définition 2.2. *Une permutation de E est une application bijective de E vers lui-même.*

Lorsque E est muni d'un ordre total de référence, tout arrangement s'identifie naturellement à une permutation. Dans la suite, nous supposons $E = \{1, 2, \dots, n\}$ (parfois aussi noté $[n]$) muni de l'ordre naturel. L'arrangement $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ de E s'identifie à la permutation de E qui applique i sur e_i . Réciproquement, la permutation π de E donne l'arrangement $\langle \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n) \rangle$. Donc si la permutation π est spécifiée par l'écriture

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix},$$

l'arrangement est $\langle \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n) \rangle$. Ceci nous conduit à identifier un arrangement de E avec une permutation de E , et aussi à décrire la permutation π par la

seconde ligne de l'écriture ci-dessus, d'où

$$\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_n).$$

Définition 2.3. Les éléments de la permutation π sont les valeurs $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$.

La composée de deux permutations π et σ sera notée $\pi \circ \sigma$; ici, nous voyons à nouveau π et σ comme deux applications bijectives de E vers E , et appliquons d'abord σ puis π . La permutation identité $(1 \ 2 \ \cdots \ n)$ sera notée ι .

Définition 2.4. La permutation π^{-1} est la permutation inverse (ou réciproque) de π , c'est-à-dire est telle que $\pi \circ \pi^{-1} = \iota = \pi^{-1} \circ \pi$. Elle s'obtient en échangeant positions et éléments dans π :

$$\forall 1 \leq i \leq n : \quad \pi_{\pi_i}^{-1} = i .$$

Exemple 2.1. L'inverse de la permutation $(4 \ 8 \ 9 \ 7 \ 6 \ 5 \ 1 \ 3 \ 2 \ 10)$ est la permutation $(7 \ 9 \ 8 \ 1 \ 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 3 \ 10)$.

Définition 2.5. Une distance d sur un ensemble S est une application

$$d : S \times S \rightarrow \mathbb{R} : (s, t) \mapsto r$$

vérifiant les trois axiomes suivants :

1. $\forall s, t \in S : d(s, t) \geq 0$ et $d(s, t) = 0 \Leftrightarrow s = t$ (caractère défini positif) ;
2. $\forall s, t \in S : d(s, t) = d(t, s)$ (symétrie) ;
3. $\forall s, t, u \in S : d(s, u) \leq d(s, t) + d(t, u)$ (inégalité triangulaire).

Nous notons S_n le groupe symétrique, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ muni de l'opération de composition $\circ$.

Définition 2.6. Une distance d sur S_n est invariante à gauche si :

$$\forall \pi, \sigma, \tau \in S_n : d(\pi, \sigma) = d(\tau \circ \pi, \tau \circ \sigma).$$

Définition 2.7. Une distance d sur S_n est invariante à droite si :

$$\forall \pi, \sigma, \tau \in S_n : d(\pi, \sigma) = d(\pi \circ \tau, \sigma \circ \tau).$$

Rappelons également la décomposition bien connue en cycles disjoints, qui décompose par exemple la permutation $(4 \ 8 \ 9 \ 7 \ 6 \ 5 \ 1 \ 3 \ 2 \ 10)$ en les cycles $(1, 4, 7)$, $(2, 8, 3, 9)$, $(5, 6)$ et (10) .

Définition 2.8. Le nombre de Stirling de première espèce est noté $[n]$ et donne le nombre de permutations de n éléments contenant k cycles.

Définition 2.9. Le coefficient binomial est noté $\binom{n}{k}$ et représente le nombre de manières de choisir k éléments distincts parmi un ensemble de n éléments distincts.

Exemple 2.2. Prenons S_3 , qui contient six éléments, et $k = 2$; alors $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = 3$, car les seules permutations de S_3 se décomposant en exactement deux cycles sont $(1 \ 3 \ 2) = (1) \ (2, 3)$, $(2 \ 1 \ 3) = (1, 2) \ (3)$ et $(3 \ 2 \ 1) = (1, 3) \ (2)$.

2.2 Notions sur les graphes

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux graphes dirigés.

Définition 2.10. *Un graphe $G = (V, E)$ est le couple constitué par :*

1. *un ensemble $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$;*
2. *une famille $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ d'éléments du produit cartésien*

$$V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Les graphes sont représentés graphiquement par des points joints par des flèches ; les points représentent les éléments de l'ensemble V qui sont appelés *sommets*, et les flèches représentent les éléments de la famille E , appelés *arcs*. L'arc (u, v) a les sommets u et v pour *extrémités*. Nous utiliserons parfois également les notations $V(G)$ et $E(G)$ pour désigner respectivement les ensembles de sommets et d'arcs du graphe G .

Définition 2.11. *Le nombre de sommets d'un graphe G est appelé l'ordre de G .*

Définition 2.12. *Un graphe est simple si :*

1. *il ne comporte pas de boucle, c'est-à-dire d'arc dont les extrémités coïncident ;*
2. *entre deux sommets, il n'existe jamais plus d'un arc.*

Définition 2.13. *Un cycle dans un graphe G est une séquence de sommets telle que tout couple de sommets consécutifs dans cette séquence forme un arc dans G , y compris le couple formé par le dernier sommet et le premier (pris dans cet ordre), et n'apparaît qu'une seule fois dans cette séquence.*

Chapitre 3

Distance des transpositions

3.1 Rappels

Le terme *transposition*, défini ci-dessous, est à prendre ici au sens biologique du terme : il s'agit d'un événement dans l'évolution qui consiste de manière informelle à déplacer un morceau du génome d'un endroit à un autre. Par exemple, une transposition déplace le bloc d'éléments encadré dans la permutation ci-dessous à l'endroit marqué par $|$:

$$(2\ 1\ \boxed{7\ 3\ 5\ 6}\ 4\ 10\ 9\ | \ 8) \rightarrow (2\ 1\ 4\ 10\ 9\ 7\ 3\ 5\ 6\ 8) .$$

Contrairement aux transpositions algébriques, qui échangent deux éléments non nécessairement adjacents, les transpositions biologiques sont vues comme des échanges de blocs d'éléments adjacents et disjoints. Dans l'exemple ci-dessus, on a en fait échangé le bloc allant de l'élément 7 à l'élément 6 avec le bloc allant de l'élément 4 à l'élément 9.

Définition 3.1. Soit π une permutation de S_n ; la transposition $\tau(i, j, k)$, avec $1 \leq i \leq n-1$, $i+1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n+1$ et $k < i$ ou $k > j$ appliquée à π a pour effet d'insérer, entre les positions $k-1$ et k , l'intervalle fermé déterminé par les positions i et $j-1$. Cette transposition transforme donc π en la permutation $\pi \circ \tau(i, j, k)$, où $\tau(i, j, k)$ est la permutation suivante :

$$\left(\begin{array}{c} 1 \ \cdots \ i-1 \ \boxed{i \ i+1 \ \cdots \ j-2 \ j-1} \ \boxed{j \ j+1 \ \cdots \ k-1} \ k \ \cdots \ n \\ 1 \ \cdots \ i-1 \ \boxed{j \ j+1 \ \cdots \ k-1} \ \boxed{i \ i+1 \ \cdots \ j-2 \ j-1} \ k \ \cdots \ n \end{array} \right) .$$

On remarquera que pour $i < j < k$, $\tau(i, j, k)$ “échange” en fait les intervalles $[i, j-1]$ et $[j, k-1]$. Signalons que cette dernière notation $\tau(i, j, k)$ désigne à la fois cette dernière permutation de S_n et l'action qu'elle induit sur S_n (qui en algèbre est appelée la *translation droite* de S_n par $\tau(i, j, k)$). Le problème que nous étudions est celui de trouver le nombre minimal de transpositions transformant une permutation donnée π en une permutation donnée π' ; ce nombre minimal est défini comme la *distance des transpositions* (que nous abrégeons en “distance”) $d(\pi, \pi')$ entre ces deux permutations. Remarquons que l'inverse d'une transposition est encore une transposition :

$$(\tau(i, j, k))^{-1} = \tau^{-1}(i, i+k-j, k).$$

De plus, d est bien une distance sur l'ensemble des permutations, car :

1. $\forall \pi, \sigma \in S_n : d(\pi, \sigma) \geq 0$ et $d(\pi, \sigma) = 0 \Leftrightarrow \pi = \sigma$ (trivial) ;
2. $\forall \pi, \sigma \in S_n : d(\pi, \sigma) = d(\sigma, \pi)$: en effet, si $d(\pi, \sigma) = k$, alors il existe k transpositions $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ telles que $\pi \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k = \sigma$. Ceci implique que $\sigma \circ \tau_k^{-1} \circ \tau_{k-1}^{-1} \circ \dots \circ \tau_1^{-1} = \pi$. Comme l'inverse d'une transposition est une transposition, nous obtenons $d(\sigma, \pi) \leq d(\pi, \sigma)$. L'inégalité opposée se prouve de même.
3. $\forall \pi, \rho, \sigma \in S_n : d(\pi, \rho) \leq d(\pi, \sigma) + d(\sigma, \rho)$ sinon $d(\pi, \rho)$ ne serait pas minimale.

Vu l'invariance à gauche (voir la proposition qui suit), on ramène le problème du calcul de $d(\pi, \pi')$ au problème du calcul de $d(\pi'^{-1} \circ \pi, \iota)$. Dans la suite, nous abrègerons la plupart du temps $d(\pi, \iota)$ en $d(\pi)$.

Exemple 3.1. La distance des transpositions de la permutation $(3 \ 1 \ 4 \ 2)$ est 2 ; en effet :

$$(3 \ \boxed{1} \ \boxed{4} \ 2) \rightarrow (\boxed{3 \ 4} \ \boxed{1 \ 2}) \rightarrow (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

et on ne peut pas trier $(3 \ 1 \ 4 \ 2)$ en une seule transposition.

Proposition 3.1. La distance des transpositions est invariante à gauche.

Démonstration. Il faut montrer que $\forall \pi, \sigma, \xi \in S_n : d(\pi, \sigma) = d(\xi \circ \pi, \xi \circ \sigma)$. Si $d(\pi, \sigma) = m$, alors il existe une séquence optimale de m transpositions telle que

$$\pi \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m = \sigma$$

et donc

$$(\xi \circ \pi) \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m = \xi \circ \sigma$$

ce qui nous donne bien $d(\pi, \sigma) = d(\xi \circ \pi, \xi \circ \sigma)$ car l'existence d'une séquence plus courte de transpositions transformant $\xi \circ \sigma$ en $\xi \circ \pi$ contredirait l'optimalité de $\tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$. $\square$

Remarquons que cette propriété tient également pour d'autres distances utilisées dans le réarrangement de génomes (voir par exemple celle des retournements), car multiplier à gauche revient simplement à changer le nom des éléments. D'ailleurs, intuitivement, si l'on se donne deux ensembles ordonnés de gènes, on aura envie de numéroté l'un de manière à ce qu'il corresponde à l'identité et de renuméroté les gènes de l'autre en fonction de la numérotation attribuée à ceux du premier. Par contre, la distance des transpositions n'est pas invariante à droite, comme le montre le contre-exemple suivant : soit $\pi = (4 \ 3 \ 2 \ 1)$, $\sigma = (3 \ 1 \ 4 \ 2)$ et $\xi = (2 \ 1 \ 3 \ 4)$. Alors $d(\pi, \sigma) = 2$, mais $d(\pi \circ \xi, \sigma \circ \xi) = d((3 \ 4 \ 2 \ 1), (1 \ 3 \ 4 \ 2)) = 1$.

Comme l'ont déjà observé Bafna et Pevzner [1] :

$$\forall 1 \leq i < j < k \leq n+1 : \tau(i, j, k) = \tau(j, k, i).$$

C'est pourquoi, dans la suite, nous ne considérons que les transpositions sous la forme "canonique", c'est-à-dire les transpositions $\tau(i, j, k)$ avec $i < j < k$.

Notons $\mathcal{T}_n$ l'ensemble de toutes les transpositions différentes agissant sur une permutation π de n éléments.

Proposition 3.2. $|\mathcal{T}_n| = \binom{n+1}{3}$.

Démonstration. Dans le dénombrement des transpositions différentes, nous pouvons nous contenter de compter les transpositions telles que $i < j < k$. Tout triple d'entiers distincts i, j, k détermine donc une et une seule transposition : il suffit de trier ce triple de manière croissante, et ces entiers sont choisis parmi $n+1$ (la valeur maximale pour k) éléments. $\square$

Bafna et Pevzner [1] ont défini le graphe suivant pour représenter les permutations.

Définition 3.2. Le graphe des cycles d'une permutation π de S_n est le graphe dirigé et bicolore $G(\pi) = (V, E)$ construit de la façon suivante :

- l'ensemble V des sommets de $G(\pi)$ est constitué de $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$ plus deux encadrements $\pi_0 = 0$ et $\pi_{n+1} = n+1$;
- l'ensemble E des arcs de $G(\pi)$ est constitué :
 - des arcs noirs (π_i, π_{i-1}) pour $1 \leq i \leq n+1$;
 - des arcs gris $(i, i+1)$ pour $0 \leq i \leq n$.

L'ensemble des arcs gris et noirs du graphe se décompose de manière unique en cycles alternés (c'est-à-dire utilisant tour à tour un arc de chaque couleur), dont le nombre est noté $c(G(\pi))$.

Définition 3.3. Un cycle alterné de $G(\pi)$ est pair (resp. impair) s'il contient un nombre pair (resp. impair) d'arcs noirs.

Le nombre de cycles alternés pairs (resp. impairs) de $G(\pi)$ est noté $c_{\text{even}}(G(\pi))$ (resp. $c_{\text{odd}}(G(\pi))$), et l'on a bien entendu $c(G(\pi)) = c_{\text{odd}}(G(\pi)) + c_{\text{even}}(G(\pi))$. Un exemple de graphe des cycles est donné à la figure 3.1.

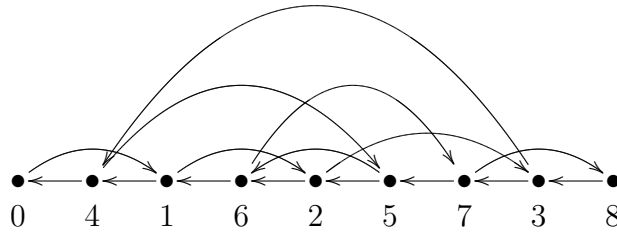


FIG. 3.1 – Le graphe des cycles de la permutation $(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 7\ 3)$

Numérotions les arcs noirs de $G(\pi)$ de la façon suivante : l'arc (π_i, π_{i-1}) reçoit le numéro i , et on dira qu'une transposition $\tau(i, j, k)$ agit sur les arcs i, j et k . De plus, nous dirons qu'une transposition agit sur un cycle alterné si les trois arcs sur lesquels elle agit appartiennent à ce cycle alterné.

Définition 3.4. Une x -move est une transposition $\tau(i, j, k)$ telle que $c(G(\pi \circ \tau)) - c(G(\pi)) = x$.

Bafna et Pevzner [1] ont également établi le lemme suivant.

Lemme 3.1. $[1] \forall \pi \in S_n, \tau \in \mathcal{T}_n : c(G(\pi \circ \tau)) - c(G(\pi)) \in \{-2, 0, 2\}$.

La figure 3.2 illustre tous les cas à examiner dans la preuve de cette affirmation ; en observant que le Lemme 3.1 restait valable lorsqu'on se restreignait aux cycles alternés impairs, et que la permutation identité est la seule permutation dont le graphe des cycles contient $n + 1$ cycles alternés, ils ont déduit le théorème suivant.



FIG. 3.2 – Les différentes manières dont une transposition $\tau(i, j, k)$ peut affecter le nombre de cycles ; les traits pointillés représentent un chemin alterné entre les deux sommets qu'ils relient

Théorème 3.1. [1] $\forall \pi \in S_n : d(\pi) \geq \frac{n+1-c_{\text{odd}}(G(\pi))}{2}$.

Lemme 3.2. [1] *Toute transposition agissant sur les arcs noirs d'exactly deux cycles alternés différents est un 0-move.*

Définition 3.5. *Un point de rupture dans une permutation π est un couple d'éléments (π_i, π_{i+1}) tel que $\pi_{i+1} \neq \pi_i + 1$. Le nombre de points de rupture de π est noté $b(\pi)$. Si $\pi_{i+1} = \pi_i + 1$, le couple (π_i, π_{i+1}) est une adjacence.*

Bafna et Pevzner [1] ont montré la minoration suivante.

Lemme 3.3. $[1] \forall \pi \in S_n : d(\pi) \geq \frac{b(\pi)}{3}$.

En effet, une transposition ne peut éliminer au plus que trois points de rupture, et un exemple de ce “meilleur cas” est montré à la figure 3.3.

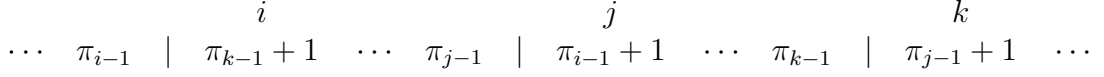


FIG. 3.3 – Une permutation π telle que $\tau(i, j, k)$ supprime trois points de rupture

Enfin, rappelons quelques notions introduites par Christie [3].

Définition 3.6. Une bande dans une permutation π est une sous-séquence de π délimitée par les éléments π_i et π_j ($i < j$), ne contenant pas de point de rupture et telle que les couples (π_{i-1}, π_i) et (π_j, π_{j+1}) sont des points de rupture.

Exemple 3.2. La permutation $\pi = (1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 9\ 6\ 7\ 10\ 8\ 11\ 12)$ se décompose en 8 bandes : $(\boxed{1\ 2\ 3}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{9}\ \boxed{6\ 7}\ \boxed{10}\ \boxed{8}\ \boxed{11\ 12})$.

L’intuition suggère qu’il est inutile de déplacer une bande *initiale*, commençant en 1 par 1, ou *terminale*, terminant en n par n , de même qu’il est inutile de “couper” une bande (appliquer une transposition n’en déplaçant qu’un morceau plutôt que son intégralité). Cette intuition est correcte, et est formalisée dans le Théorème 3.2.

Définition 3.7. Soit π une permutation formée de r bandes, en excluant les éventuelles bandes *initiale* et *terminale*. La permutation réduite $gl(\pi)$ est la permutation de $\{1, \dots, r\}$ obtenue à partir de π en remplaçant chaque bande par un élément, et en renumérotant ces éléments de façon à obtenir une permutation de S_r .

Exemple 3.3. Si $\pi = (1\ 2\ 9\ 4\ 5\ 6\ 3\ 7\ 8\ 10)$, alors $gl(\pi) = (4\ 2\ 1\ 3)$.

La version réduite de π doit sa notation $gl(\pi)$ au fait qu’elle est obtenue en “collant” (*to glue*) toutes les adjacences ensemble. L’algorithme 3.1 page 12 permet de réduire une permutation.

Définition 3.8. Deux permutations π et σ sont équivalentes par réduction si $gl(\pi) = gl(\sigma)$, et nous notons cela $\pi \equiv_r \sigma$.

Théorème 3.2. $[3] \forall \pi \in S_n : d(\pi) = d(gl(\pi))$.

Enfin, indiquons diverses majorations qui ont été publiées sur la distance des transpositions.

Théorème 3.3. $[1] \forall \pi \in S_n :$

$$d(\pi) \leq \frac{3(n+1 - c_{\text{odd}}(G(\pi)))}{4} . \quad (3.1)$$

Théorème 3.4. $[6] \forall \pi \in S_n :$

$$d(\pi) \leq \frac{3}{4} b(\pi) . \quad (3.2)$$

Théorème 3.5. $[8] \forall \pi \in S_n :$

$$d(\pi) \leq \begin{cases} \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil & \text{si } n < 9 ; \\ \left\lfloor \frac{2n-2}{3} \right\rfloor & \text{si } n \geq 9 . \end{cases} \quad (3.3)$$

Algorithme 3.1 RÉDUCTION(π)

Données: une permutation π de n éléments

Résultat: la permutation réduite π' de $n' \leq n$ éléments

```
1:  $\pi' \leftarrow \pi$  ;
2:  $i \leftarrow 1$  ;
3: while  $i < n - 1$  do
4:    $j \leftarrow i$  ;
5:   while  $(\pi'_i, \pi'_{i+1})$  n'est pas un point de rupture do
6:      $i \leftarrow i + 1$  ;
7:   end while
8:   if  $i \neq j$  then
9:     supprimer l'intervalle  $[j + 1, i]$  ;
10:     $i \leftarrow j + 1$  ;
11:   else
12:      $i \leftarrow i + 1$  ;
13:   end if
14: end while
15:  $\rho \leftarrow \pi'$  ;
16: trier  $\rho$  de façon croissante ;
17: for  $1 \leq k \leq n'$  do
18:    $e \leftarrow \rho_k$  ;
19:   for  $1 \leq p \leq n'$  do
20:     if  $\rho_k = \pi'_p$  then
21:        $\pi'_p \leftarrow k + 1$  ;
22:       STOP ;
23:     end if
24:   end for
25: end for
26: if  $\pi'_1 = 1$  then
27:   supprimer  $\pi'_1$  ;
28: end if
29: if  $\pi'_{n'} = n$  then
30:   supprimer  $\pi'_{n'}$  ;
31: end if
```

3.2 Génération des permutations avec leur distance

Afin d'étudier la distance des transpositions, nous générons toutes les permutations de n éléments, pour n fixé, en composant des transpositions. Notons N_i l'ensemble de toutes les permutations de n éléments à distance i de l'identité ; il est clair que :

1. $N_0 = \{(1 \ 2 \ \dots \ n)\}$, et donc $|N_0| = 1$;
2. $N_1 = \mathcal{T}_n$, et donc $|N_1| = \binom{n+1}{3}$, puisque N_1 est obtenu en appliquant toutes les transpositions différentes à ι ;
3. N_i est obtenu en appliquant les $\binom{n+1}{3}$ transpositions possibles à chaque élément $\pi \in N_{i-1}$, et en ne gardant que ceux qui n'appartiennent ni à N_{i-2} , ni à N_{i-1} , ni à N_i . Ceci se justifie de la façon suivante : nous cherchons, au niveau N_i , des permutations à distance i générées à partir de permutations à distance $i-1$. Or, toutes les transpositions possibles se divisent en trois catégories pour leur action sur la permutation π de N_{i-1} : celles qui font décroître la distance de π (dans ce cas, $(\pi \circ \tau) \in N_{i-2}$: si on avait $d(\pi \circ \tau) < i-2$, cela signifierait que $d(\pi) < i-1$, impossible par construction), celles qui l'augmentent et qui nous intéressent (le cas où $(\pi \circ \tau) \in N_i$) et celles qui ne la modifient pas (c'est-à-dire $(\pi \circ \tau) \in N_{i-1}$). Comme à chaque étape i , nous générons des permutations pour lesquelles il existe une séquence optimale de i transpositions, N_{i-2} , N_{i-1} et N_i sont bien les seuls niveaux à prendre en compte. La vérification du fait que $\pi \circ \tau \notin N_i$ est nécessaire car il existe plusieurs séquences optimales de transpositions générant $\pi \circ \tau$, et il se peut donc qu'on ait déjà généré $\pi \circ \tau$ précédemment.

La proposition suivante nous sera également utile dans l'élaboration de l'algorithme.

Proposition 3.3. $\forall \pi \in S_n : d(\pi) = d(\pi^{-1})$.

Démonstration. Triviale ; par l'invariance à gauche (Proposition 3.1), on a

$$d(\pi, \iota) = d(\pi^{-1} \circ \pi, \pi^{-1}) = d(\pi^{-1}, \iota).$$

□

De plus, il existe d'autres couples particuliers de permutations à même distance : comme nous allons le voir, il s'agit des couples $(\pi, m(\pi))$, où $m(\pi)$ est la *conjuguée* de π par la permutation $\chi = (n \ n-1 \ n-2 \ \dots \ 3 \ 2 \ 1)$, c'est-à-dire

$$m(\pi) = \chi \circ \pi \circ \chi^{-1} = \chi \circ \pi \circ \chi.$$

Exemple 3.4. Si $\pi = (1 \ 4 \ 6 \ 2 \ 5 \ 3)$, alors $\chi = (6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1)$ et

$$\chi \circ \pi \circ \chi^{-1} = \chi \circ (3 \ 5 \ 2 \ 6 \ 4 \ 1) = (4 \ 2 \ 5 \ 1 \ 3 \ 6).$$

Lemme 3.4. $\forall \tau \in \mathcal{T}_n : \chi \circ \tau \circ \chi^{-1} \in \mathcal{T}_n$.

Démonstration. Toute transposition τ vue comme un rangement est constituée de 2, 3 ou 4 sous-séquences croissantes d'éléments consécutifs; pour la simplicité et la concision, nous supposons sans perte de généralité que nous sommes ici dans le premier cas, les deux autres pouvant être prouvés de façon similaire. Multiplier toute permutation à droite par χ^{-1} transforme cette permutation en sa “renversée”, c'est-à-dire la permutation de départ lue de droite à gauche. Cette opération transforme en particulier τ en une permutation constituée de deux sous-séquences décroissantes, et enfin, la multiplication à gauche de $\tau \circ \chi^{-1}$ par χ transforme ces deux sous-séquences décroissantes en deux séquences croissantes, donc nous retombons bien sur une transposition. $\square$

Proposition 3.4. $\forall \pi \in S_n : d(\pi) = d(m(\pi)).$

Démonstration. Soit $d(\pi) = r$; alors, il existe une séquence de r transpositions telle que

$$\pi = \tau_r \circ \dots \circ \tau_1$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \chi \circ \pi \circ \chi^{-1} &= \chi \circ \tau_r \circ \dots \circ \tau_1 \circ \chi^{-1} \\ &= (\chi \circ \tau_r \circ \chi^{-1}) \circ (\chi \circ \tau_{r-1} \circ \chi^{-1}) \circ \dots \circ (\chi \circ \tau_1 \circ \chi^{-1}) \end{aligned}$$

et dans cette dernière expression, chaque conjuguée de chaque transposition est encore une transposition (Lemme 3.4). Ainsi, $d(\chi \circ \pi \circ \chi^{-1}) \leq d(\pi)$ et l'inégalité opposée provient du fait que π est la conjuguée par χ de $\chi \circ \pi \circ \chi^{-1}$. $\square$

Le corollaire suivant découle des Propositions 3.1, 3.3 et 3.4.

Corollaire 3.1. $\forall \pi \in S_n : d(\pi, \iota) = d(\pi \circ \chi, \chi) = d(\pi^{-1} \circ \chi, \chi).$

Nous obtenons donc l'algorithme 3.2 (voir page 16). L'implémentation de cet algorithme nous a permis de générer toutes les permutations de n éléments (pour $n \leq 10$) avec leur distance. Nous utilisons la notation $\llbracket n \rrbracket_k$ pour désigner le nombre de permutations de n éléments à distance k de ι . Le tableau 3.1 en présente quelques valeurs expérimentales, et nous pouvons remarquer que, en tout cas pour $n \leq 10$, la distribution est unimodale, de mode $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

3.3 Utilisation des cycles de la permutation

Le graphe suivant que je me propose à présent d'utiliser est un simple réencodage du graphe d'une permutation dans le sens le plus classique. La seule modification, expliquée dans la définition qui suit, est motivée par le fait qu'on a besoin d'un ordre total sur les sommets, puisqu'on cherche à trier des permutations.

Définition 3.9. Le Γ -graphe d'une permutation π de S_n est le graphe dirigé $\Gamma(\pi)$ construit de la façon suivante :

- $V(\Gamma(\pi)) = \{(1, \pi_1), (2, \pi_2), \dots, (n, \pi_n)\}$;
- $E(\Gamma(\pi)) = \{((i, \pi_i), (j, \pi_j)) \mid j = \pi_i\}$.

n	$\llbracket n \rrbracket_0$	$\llbracket n \rrbracket_1$	$\llbracket n \rrbracket_2$	$\llbracket n \rrbracket_3$	$\llbracket n \rrbracket_4$	$\llbracket n \rrbracket_5$	$\llbracket n \rrbracket_6$	$\llbracket n \rrbracket_7$	$\llbracket n \rrbracket_8$	$\llbracket n \rrbracket_9$	$\llbracket n \rrbracket_{10}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	10	12	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	20	68	31	0	0	0	0	0	0	0
6	1	35	259	380	45	0	0	0	0	0	0
7	1	56	770	2700	1513	0	0	0	0	0	0
8	1	84	1932	13467	22000	2836	0	0	0	0	0
9	1	120	4284	52512	191636	114327	0	0	0	0	0
10	1	165	8646	170907	1183457	2010571	255053	0	0	0	0

TAB. 3.1 – Quelques valeurs expérimentales de $\llbracket n \rrbracket_k$

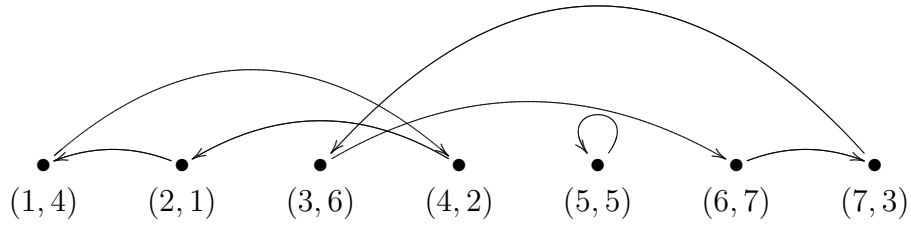


FIG. 3.4 – Le Γ -graphe de la permutation $(4\ 1\ 6\ 2\ 5\ 7\ 3)$

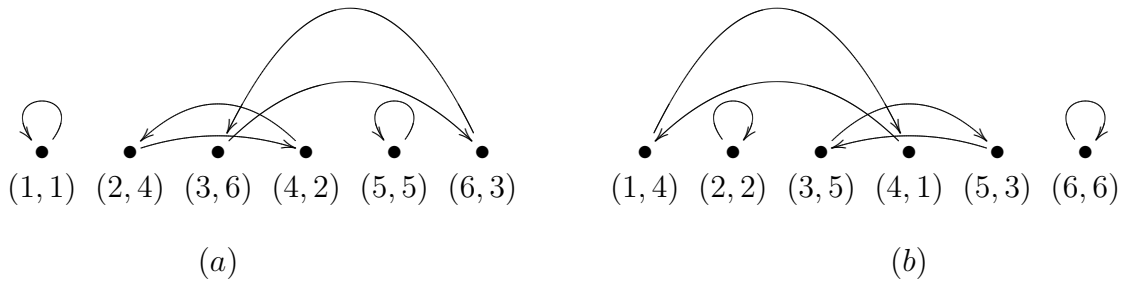


FIG. 3.5 – (a) Le Γ -graphe de $\pi = (1\ 4\ 6\ 2\ 5\ 3)$, (b) le Γ -graphe de $\chi \circ \pi \circ \chi^{-1}$

Algorithme 3.2 ARBORESCENCE(n)

Données: le nombre n d'éléments des permutations à générer

Résultat: une liste d'ensembles de permutations, chaque ensemble N_i étant l'ensemble de toutes les permutations à distance i de ι

```
1:  $N_0 \leftarrow \{\iota\}$ ;
2:  $N_1 \leftarrow \emptyset$ ;
3: for all  $\tau \in \mathcal{T}_n$  do
4:    $N_1 \leftarrow N_1 \cup \tau$ ;
5: end for
6:  $cpt \leftarrow 1 + \binom{n+1}{3}$ ;
7:  $i \leftarrow 2$ ;
8: while  $cpt < n!$  do
9:    $N_i \leftarrow \emptyset$ ;
10:  for all  $\pi \in N_{i-1}$  do
11:    for all  $\tau \in \mathcal{T}_n$  do
12:      if  $(\pi \circ \tau) \notin N_{i-2}$  et  $(\pi \circ \tau) \notin N_{i-1}$  et  $(\pi \circ \tau) \notin N_i$  then
13:         $N_i \leftarrow N_i \cup (\pi \circ \tau)$ ;
14:         $cpt \leftarrow cpt + 1$ ;
15:        if  $(\pi \circ \tau)^{-1} \neq (\pi \circ \tau)$  then
16:           $N_i \leftarrow N_i \cup (\pi \circ \tau)^{-1}$ ;
17:           $cpt \leftarrow cpt + 1$ ;
18:          if  $m(\pi \circ \tau) \neq (\pi \circ \tau)$  et  $m(\pi \circ \tau) \neq (\pi \circ \tau)^{-1}$  then
19:             $N_i \leftarrow N_i \cup m(\pi \circ \tau)$ ;
20:             $cpt \leftarrow cpt + 1$ ;
21:            if  $m(\pi \circ \tau)^{-1} \neq (\pi \circ \tau)$  et  $m(\pi \circ \tau)^{-1} \neq (\pi \circ \tau)^{-1}$  then
22:               $N_i \leftarrow N_i \cup m(\pi \circ \tau)^{-1}$ ;
23:               $cpt \leftarrow cpt + 1$ ;
24:            end if
25:          end if
26:          else if  $m(\pi \circ \tau) \neq (\pi \circ \tau)$  then
27:             $N_i \leftarrow N_i \cup m(\pi \circ \tau)$ ;
28:             $cpt \leftarrow cpt + 1$ ;
29:          end if
30:        end if
31:      end for
32:    end for
33:     $i \leftarrow i + 1$ ;
34:  end while
```

Définition 3.10. *L'indice du sommet (i, π_i) de $\Gamma(\pi)$ vaut i .*

Un exemple d'un tel graphe est donné à la figure 3.4. La figure 3.5 motive quant à elle l'utilisation du terme "miroir" de π pour la permutation $\chi \circ \pi \circ \chi^{-1}$.

Définition 3.11. *La longueur d'un arc $((i, \pi_i), (j, \pi_j))$ de $\Gamma(\pi)$ est $|j - i|$.*

Dans la suite, la notation $C = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ désignera le cycle C de $\Gamma(\pi)$ constitué des éléments $(i_1, \pi_{i_1}), (i_2, \pi_{i_2}), \dots, (i_k, \pi_{i_k})$.

Définition 3.12. *Un k -cycle est un cycle comportant k éléments.*

D'une façon analogue à la Définition 3.3, nous définissons une notion de parité sur les cycles de $\Gamma(\pi)$.

Définition 3.13. *Un k -cycle de $\Gamma(\pi)$ est pair (resp. impair) si k est pair (resp. impair).*

De manière similaire à ce qui a été fait dans la section précédente, nous notons $c(\Gamma(\pi))$ le nombre de cycles de $\Gamma(\pi)$, c'est-à-dire le nombre de cycles de π dans le sens le plus usuel, et $c_{\text{even}}(\Gamma(\pi))$ (resp. $c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi))$) le nombre de cycles pairs (resp. impairs) de $\Gamma(\pi)$.

Définition 3.14. *Un k -cycle de $\Gamma(\pi)$ est orienté positivement si $k \geq 3$ et si de plus ses éléments peuvent s'écrire sous la forme d'une séquence strictement croissante, orienté négativement si $k \geq 3$ et si de plus ses éléments peuvent s'écrire sous la forme d'une séquence strictement décroissante, et non orienté sinon.*

Exemple 3.5. *À la figure 3.4, le cycle $(4, 2, 1)$ est orienté négativement, le cycle (5) est non orienté, et le cycle $(3, 6, 7)$ est orienté positivement.*

Remarquons que tout 1-cycle et tout 2-cycle sont non-orientés, et que tout 3-cycle est orienté.

3.4 Transpositions échangeables

Quelles sont les transpositions τ_1, τ_2 telles que $\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2$? Ces transpositions qui commutent sont de plusieurs natures :

Définition 3.15. *Deux transpositions $\tau_1(i_1, j_1, k_1)$ et $\tau_2(i_2, j_2, k_2)$ sont indépendantes si $[i_1, k_1 - 1] \cap [i_2, k_2 - 1] = \emptyset$.*

Il est évident que si $\tau_2 = \tau_1^{-1}$, alors τ_1 et τ_2 commutent ; de même, $\tau_1(i_1, j_1, k_1)$ et $\tau_2(i_2, j_2, k_2)$ commutent également si elles sont indépendantes, comme le montre la figure 3.6.

Proposition 3.5. *Soit deux transpositions τ_1, τ_2 et $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; si $\tau_2 = \tau_1^m$ ou $\tau_1 = \tau_2^m$, alors τ_1 et τ_2 commutent.*

Démonstration. Directe : si $\tau_2 = \tau_1^m$, alors

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1^m \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_1^m = \tau_1 \circ \tau_2.$$

De même, si $\tau_1 = \tau_2^m$, alors

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \tau_2^m = \tau_2^m \circ \tau_2 = \tau_1 \circ \tau_2.$$

□

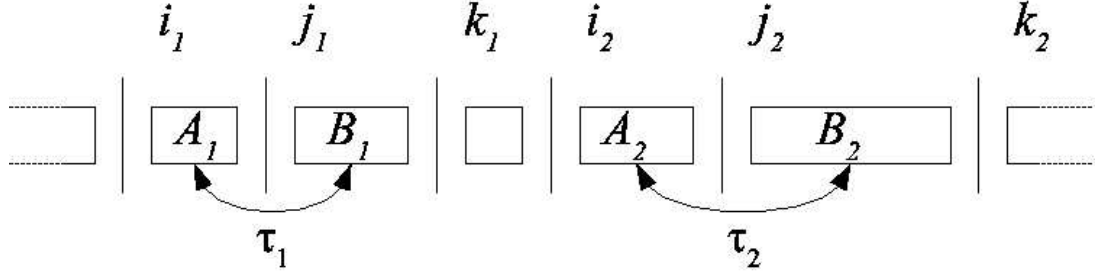


FIG. 3.6 – Deux transpositions indépendantes ; il est clair qu’elles commutent.

3.5 Formule explicite pour certaines permutations

Dans cette section, nous montrons qu’il est possible, pour une classe bien définie de permutations, de calculer la distance de ces dernières par un algorithme linéaire, sans recourir à quelque structure de données supplémentaire que ce soit.

Définition 3.16. Une γ -permutation est une permutation réduite (Définition 3.7) fixant les éléments pairs.

Exemple 3.6. La permutation $(15 \ 2 \ 7 \ 4 \ 1 \ 6 \ 3 \ 8 \ 11 \ 10 \ 5 \ 12 \ 9 \ 14 \ 13)$ est une γ -permutation.

La restriction demandant que la permutation considérée soit réduite est une hypothèse technique qui nous permet de grandement simplifier les démonstrations, en particulier grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.6. Pour toute γ -permutation π de S_n :

$$\begin{cases} c_{\text{even}}(G(\pi)) &= 2 \ c_{\text{even}}(\Gamma(\pi)); \\ c_{\text{odd}}(G(\pi)) &= 2 \left(c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) - \frac{n-1}{2} \right). \end{cases}$$

Exemple 3.7. La figure 3.7 montre le Γ -graphe de la permutation $(15 \ 2 \ 7 \ 4 \ 1 \ 6 \ 3 \ 8 \ 11 \ 10 \ 5 \ 12 \ 9 \ 14 \ 13)$, ainsi que son graphe des cycles. On a $c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) = 7$, $c_{\text{even}}(\Gamma(\pi)) = 2$, $c_{\text{odd}}(G(\pi)) = 0$ et $c_{\text{even}}(G(\pi)) = 4$.

Démonstration. (Proposition 3.6) Tout sommet (i, π_i) de $\Gamma(\pi)$ correspondant à un élément impair est à la fois l’extrémité initiale d’un arc $((i, \pi_i), (\pi_i, \pi_{j_1}))$ et l’extrémité terminale d’un autre arc $((j_2, i), (i, \pi_i))$. Dans $G(\pi)$, ces arcs sont chacun transformés en une séquence de deux arcs (gris-noir pour le premier, noir-gris pour le second) :

$$\begin{cases} ((i, \pi_i), (\pi_i, \pi_{j_1})) & \text{donne } (\pi_i, \pi_i + 1), (\pi_i + 1, \pi_{j_1}); \\ ((j_2, i), (i, \pi_i)) & \text{donne } (\pi_i, \pi_{i-1}), (\pi_{i-1}, \pi_{j_2}). \end{cases}$$

Selon que $i < \pi_i$ ou $i > \pi_i$, l’arc issu de (i, π_i) dans $\Gamma(\pi)$ sera transformé de l’une de ces deux façons :

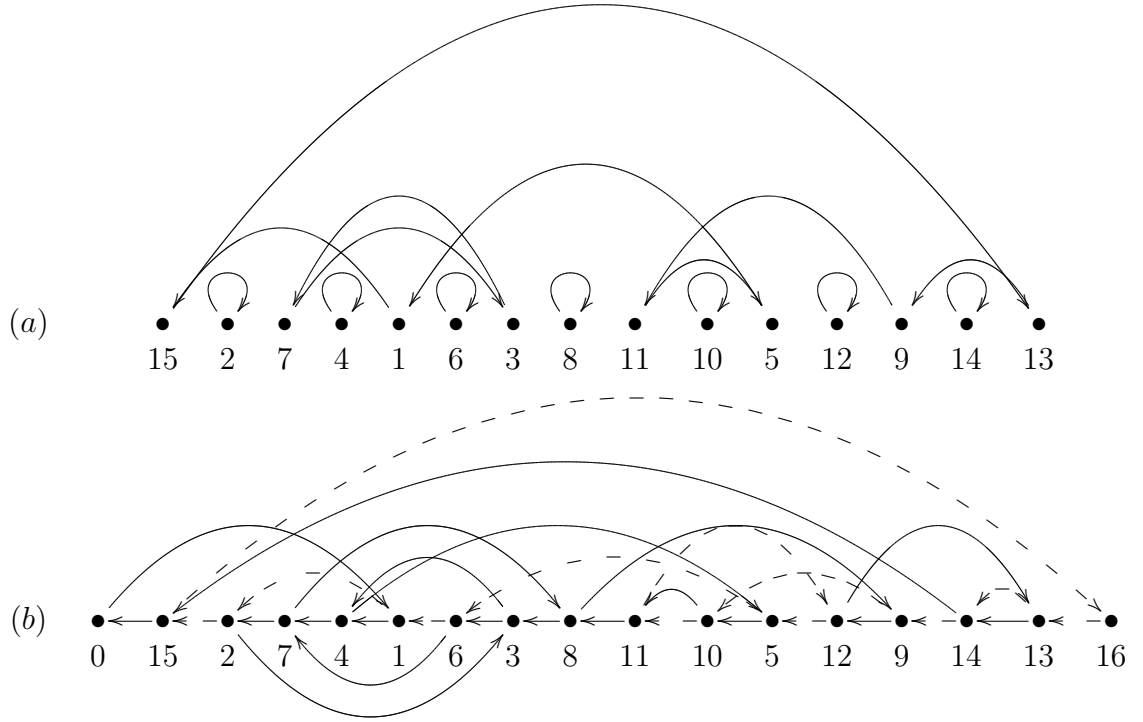
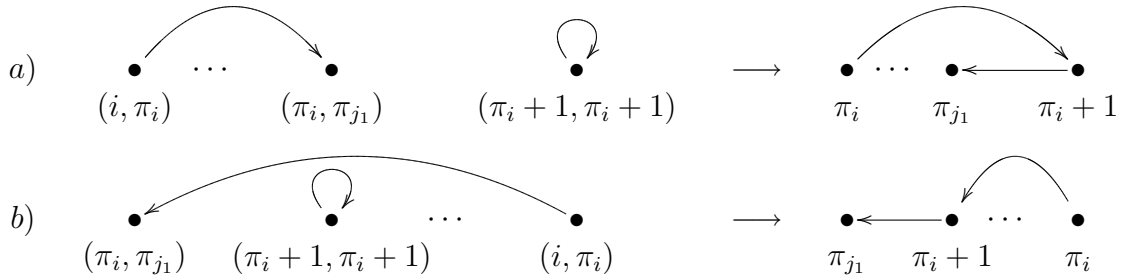
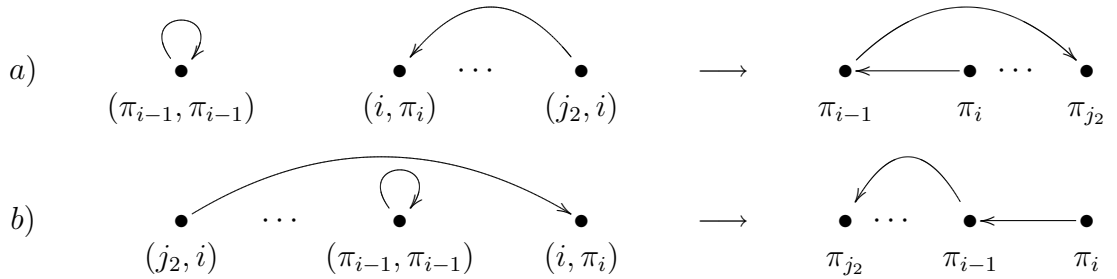


FIG. 3.7 – (a) Le graphe des cycles d’une γ -permutation (les indices ont été omis pour plus de clarté) ; (b) le Γ -graphe de la même permutation.



Et de la même manière, l’arc arrivant en (i, π_i) dans $\Gamma(\pi)$ sera transformé de l’une des deux façons suivantes, d’après les positions relatives de π_i et π_{j_2} :



Ainsi, chaque cycle de plus d’un arc dans $\Gamma(\pi)$ est reconstitué dans $G(\pi)$; de plus, pour chaque tel cycle de $\Gamma(\pi)$, un nouveau cycle est également créé dans $G(\pi)$ qui correspond en fait au parcours du cycle de $\Gamma(\pi)$ dans le sens inverse des flèches. La parité des cycles associés de $\Gamma(\pi)$ et de $G(\pi)$ coïncide, puisqu’à chaque sommet appartenant à un cycle d’au moins deux éléments dans $\Gamma(\pi)$ correspond un arc noir dans $G(\pi)$. Enfin, les cycles de longueur 1 de $\Gamma(\pi)$ correspondant aux éléments pairs

de π ne sont pas conservés dans $G(\pi)$, puisque π est réduite, et ces éléments pairs sont au nombre de $\frac{n-1}{2}$. $\square$

Nous pouvons donc déduire de cette proposition et du Théorème 3.1 la minoration suivante.

Lemme 3.5. *Pour toute γ -permutation π de S_n :*

$$d(\pi) \geq n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)).$$

Démonstration. Directe :

$$\begin{aligned} d(\pi) &\geq \frac{n+1 - c_{\text{odd}}(G(\pi))}{2} \\ &= \frac{n+1 - 2(c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) - \frac{n-1}{2})}{2} \\ &= \frac{n+1 - 2c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) + n-1}{2} \\ &= n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)). \end{aligned}$$

$\square$

Si les éléments pairs d'une γ -permutation sont fixés, ce n'est pas le cas des éléments impairs qui peuvent présenter des configurations assez diverses, que nous caractérisons à l'aide des définitions suivantes. Ces définitions portent toutes sur les cycles de $\Gamma(\pi)$.

Définition 3.17. *La portée du cycle $C = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ est l'intervalle*

$$\text{portee}(C) = \left[\min_{1 \leq j \leq k} i_j, \max_{1 \leq j \leq k} i_j \right] = [C^{\min}, C^{\max}].$$

Exemple 3.8. *La portée du cycle $(4, 2, 1)$ de la permutation de la figure 3.4 est $[1, 4]$.*

Définition 3.18. *Un cycle C_1 contient un cycle C_2 si $\text{portee}(C_2) \subset \text{portee}(C_1)$.*

Exemple 3.9. *À la figure 3.4, le cycle $(3, 6, 7)$ contient le cycle (5) .*

Définition 3.19. *Deux cycles C_1, C_2 sont disjoints si $\text{portee}(C_1) \cap \text{portee}(C_2) = \emptyset$.*

Exemple 3.10. *Les cycles $(1, 4, 2)$ et (5) de la figure 3.4 sont disjoints.*

Définition 3.20. *Deux cycles C_1, C_2 se chevauchent s'ils ne se contiennent pas et que de plus $\text{portee}(C_1) \cap \text{portee}(C_2) \neq \emptyset$.*

Exemple 3.11. *Les cycles $(1, 4, 2)$ et $(3, 6, 7)$ de la figure 3.4 se chevauchent.*

Nous n'allons dans un premier temps n'examiner que les permutations dont les éléments impairs forment un seul cycle, et distinguer deux cas : celui où ce cycle est orienté, et celui où il ne l'est pas.

3.5.1 Cycles orientés

Définition 3.21. Une α -permutation est une permutation fixant les éléments pairs et dont les éléments impairs forment un cycle orienté (dans le graphe Γ).

Exemple 3.12. La permutation $(3\ 2\ 5\ 4\ 7\ 6\ 9\ 8\ 11\ 10\ 1)$ est une α -permutation, ainsi que son inverse, la permutation $(11\ 2\ 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 8\ 7\ 10\ 9)$.

Une telle permutation est donc forcément réduite, et répond également à la Définition 3.16. Autrement dit, toute α -permutation est une γ -permutation, et il n'existe que 2 α -permutations pour n fixé. Nous qualifierons le cycle formé des éléments impairs de *cycle principal*, qui comporte $\frac{n+1}{2}$ éléments.

Proposition 3.7. Pour toute α -permutation π de S_n :

$$d(\pi) = \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2} \bmod 2 \right).$$

Démonstration. Remarquons que $c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) = \frac{n-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \bmod 2 \right)$, ce qui implique par le Lemme 3.5 que $d(\pi) \geq \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2} \bmod 2 \right)$. Nous allons supposer dans la suite que le cycle principal de π est orienté positivement, mais nous éliminerons cette restriction à la fin de la démonstration.

1. si $\frac{n+1}{2}$ est impair : considérons les deux transpositions τ_1, τ_2 , définies ci-dessous :

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau(2, 4, n+1); \\ \tau_2 = \tau(1, 3, n). \end{cases}$$

Une séquence de $\frac{n+1}{2} - 1$ transpositions triant π (voir Proposition 3.8 ci-dessous) est :

$$(\tau_1 \circ \tau_2)^{\frac{n+1}{2}-1}$$

et cette séquence est bien optimale, puisqu'elle atteint la minoration montrée en début de démonstration.

2. si $\frac{n+1}{2}$ est pair : considérons à nouveau les transpositions τ_1, τ_2 définies plus haut, ainsi que les transpositions τ_3, τ_4 définies ci-dessous :

$$\begin{cases} \tau_3 = \tau(2, 3, n+1); \\ \tau_4 = \tau(1, 2, n+1). \end{cases}$$

Une séquence de $\frac{n+1}{2}$ transpositions triant π (voir Proposition 3.9 ci-dessous) est :

$$(\tau_1 \circ \tau_2)^{\frac{n+1}{2}-2} \circ \tau_3 \circ \tau_4$$

et cette séquence est bien optimale, puisqu'elle atteint la minoration montrée en début de démonstration.

De plus, le cycle principal peut être orienté négativement, puisque changer le sens de tous les arcs de $\Gamma(\pi)$ transforme π en π^{-1} , à même distance (Proposition 3.3). $\square$

Avant de poursuivre, montrons que les séquences présentées dans la Proposition 3.7 trient bien les α -permutations.

Proposition 3.8. Soit π une α -permutation de S_n dont le cycle principal est orienté positivement et comporte un nombre impair d'éléments, et les transpositions

$$\begin{cases} \tau_1 &= \tau(2, 4, n+1); \\ \tau_2 &= \tau(1, 3, n). \end{cases}$$

Alors la séquence de transpositions $(\tau_1 \circ \tau_2)^{\frac{n+1}{2}-1}$ trie π .

Démonstration. Montrons d'abord l'effet des transpositions τ_1 et τ_2 ; τ_1 transforme une permutation

$$\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4 \ \pi_5 \ \cdots \ \pi_{n-1} \ \pi_n)$$

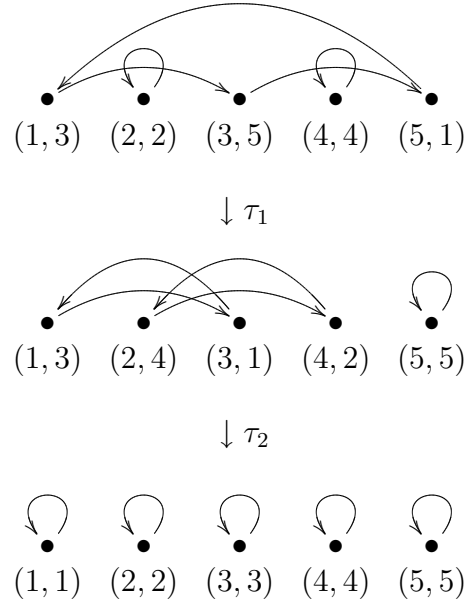
en la permutation

$$(\pi_1 \ \pi_4 \ \pi_5 \ \cdots \ \pi_{n-1} \ \pi_n \ \pi_2 \ \pi_3)$$

et τ_2 transformera cette dernière en la permutation

$$(\pi_5 \ \cdots \ \pi_{n-1} \ \pi_n \ \pi_2 \ \pi_1 \ \pi_4 \ \pi_3).$$

1. cas de base : $n = 5$: la seule permutation π satisfaisant les hypothèses est $(3 \ 2 \ 5 \ 4 \ 1)$. Comme le montre la figure ci-dessous, il vient $\pi \circ \tau_1 \circ \tau_2 = \iota$.



2. induction : vrai pour $n - 2 \Rightarrow$ vrai pour n : la permutation de n éléments à trier est

$$\pi = (3 \ 2 \ 5 \ 4 \ 7 \ 6 \ \cdots \ n - 2 \ n - 3 \ n \ n - 1 \ 1).$$

Appliquons la transposition τ_1 à π ; nous obtenons :

$$(3 \ 4 \ 7 \ 6 \ \cdots \ n - 2 \ n - 3 \ n \ n - 1 \ 1 \ 2 \ 5)$$

à laquelle nous appliquons ensuite τ_2 pour finalement obtenir :

$$(7 \ 6 \ \cdots \ n - 2 \ n - 3 \ n \ n - 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5).$$

Or, la réduction de cette dernière permutation fusionne les 5 derniers éléments en l'élément 1, et diminue de 4 les valeurs de tous les autres éléments. Il est alors clair que, si σ est la permutation pour laquelle notre hypothèse d'induction est vraie, alors $\pi \circ \tau_1 \circ \tau_2 \equiv_r \sigma$, et la thèse est vérifiée. Enfin, si le cycle principal de π est orienté négativement, alors π est le miroir du cas que nous venons de traiter et se trouve à même distance. De plus, par la même astuce que celle utilisée dans la Proposition 3.4, nous pouvons convertir la séquence ci-dessus en une séquence fonctionnant dans le cas négatif. □

Proposition 3.9. *Soit π une α -permutation de S_n dont le cycle principal est orienté positivement et comporte un nombre pair d'éléments, et les transpositions*

$$\begin{cases} \tau_1 &= \tau(2, 4, n+1); \\ \tau_2 &= \tau(1, 3, n); \\ \tau_3 &= \tau(2, 3, n+1); \\ \tau_4 &= \tau(1, 2, n+1). \end{cases}$$

Alors la séquence de transpositions $(\tau_1 \circ \tau_2)^{\frac{n+1-2}{2}} \circ \tau_3 \circ \tau_4$ trie π .

Démonstration. Similaire à celle de la Proposition 3.7 : le cas de base est $\pi = (3\ 2\ 5\ 4\ 7\ 6\ 1)$, et $\pi \circ \tau_3 \circ \tau_4 = (5\ 4\ 7\ 6\ 1\ 2\ 3) \equiv_r (3\ 2\ 5\ 4\ 1)$ qui est le cas de base de la Proposition 3.7. □

3.5.2 Cycles non orientés

Nous allons montrer que l'orientation du cycle (requis dans la Définition 3.21 d'une α -permutation) n'a pas d'importance, c'est-à-dire que la Proposition 3.7 reste valide dans le cas des cycles non orientés. Afin de simplifier les démonstrations suivantes, nous allons dans la suite utiliser des *échanges*¹. Cela nous permettra d'éviter de devoir construire des séquences de transpositions triant les cycles considérés.

Définition 3.22. *Un échange sera noté $\text{exc}(i, j)$ et représentera la permutation qui échange les éléments en positions i et j , transformant ainsi toute permutation π en la permutation $\pi \circ \text{exc}(i, j)$, où*

$$\text{exc}(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Définition 3.23. *Une β -permutation est une permutation fixant les éléments pairs et dont les éléments impairs forment un cycle non orienté (dans le graphe Γ).*

Il découle directement de la définition que pour $n \geq 5$, il existe $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - 2 = \left(\frac{n-1}{2}\right)! - 2$ β -permutations (le -2 étant dû au fait qu'il faut retirer les deux α -permutations du dénombrement ; voir Graham, Patashnik et Knuth [9] pour l'égalité qui précède). Pour $n = 3$, il n'y a qu'une seule β -permutation qui est $(3\ 2\ 1)$. Si

¹Ces échanges sont habituellement appelés "transpositions" en algèbre.

π est une β -permutation, on peut appliquer une séquence $\mathcal{E}$ d'échanges successifs aux éléments de son cycle principal de manière à la transformer en une permutation σ se réduisant à une α -permutation. On a donc la majoration suivante sur π :

$$d(\pi) \leq f(\mathcal{E}) + d(\sigma)$$

où $f(\mathcal{E})$ “convertit” $\mathcal{E}$ en une séquence optimale de transpositions ayant le même effet. Remarquons qu'il n'est pas vraiment difficile de trouver σ : la difficulté du problème réside dans la détermination d'une permutation σ telle que le membre de droite de l'inégalité plus haut est minimisé.

Avant de poursuivre, formalisons la notion de “croisement” ou de “chevauchement” de deux arcs de $\Gamma(\pi)$.

Définition 3.24. Deux arcs $a_1 = ((i_1, \pi_{i_1}), (j_1, \pi_{j_1}))$ et $a_2 = ((i_2, \pi_{i_2}), (j_2, \pi_{j_2}))$ de $\Gamma(\pi)$ se chevauchent si les intervalles $[i_1, j_1]$ et $[i_2, j_2]$ ne se contiennent pas et qu'ils possèdent une intersection non vide.

Les quatre configurations possibles pour les arcs se chevauchant sont présentées à la figure 3.8 (où l'on a décidé de noter a_1 l'arc le plus à gauche).

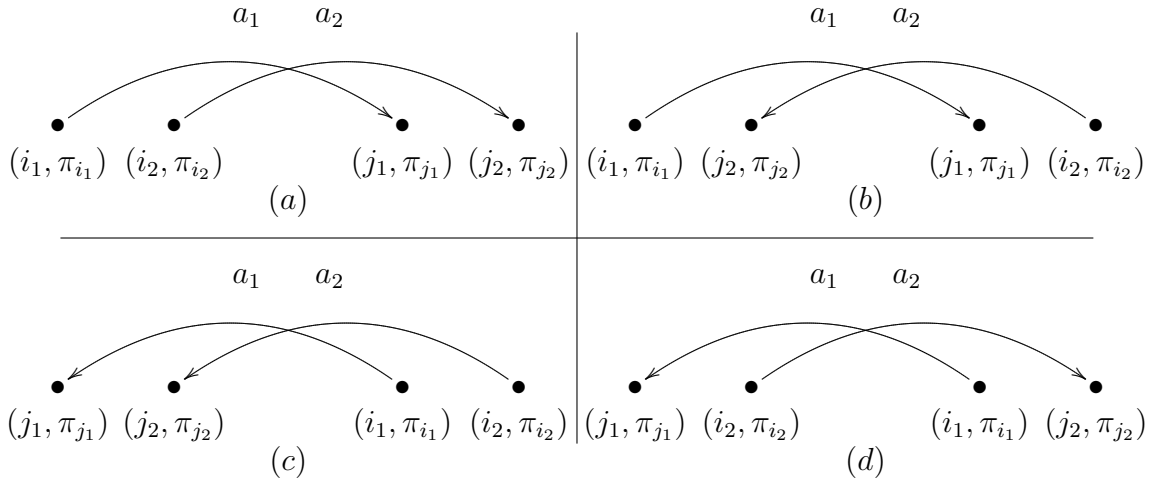


FIG. 3.8 – Les quatre cas de chevauchement de deux arcs de $\Gamma(\pi)$

Par définition, une β -permutation comporte des croisements dans son cycle principal, et la stratégie que nous allons adopter pour calculer sa distance consiste à éliminer ces croisements pour obtenir une permutation se réduisant à une α -permutation ; cela revient à faire coïncider l'extrémité d'un des deux arcs se chevauchant avec l'origine de l'autre, et nous obtenons cette configuration par une séquence particulière d'échanges. Nous appellerons *chemin* la séquence d'arcs reliant l'extrémité d'un arc à l'origine d'un arc qui le chevauche, et qualifierons l'opération de suppression de ce chemin comme nous venons de la décrire de *contraction*. C'est de ces chemins que nous parlerons lorsque nous utiliserons dans la suite l'expression “chemins à contracter”.

Nous ferons usage de la proposition suivante dans la suite.

Proposition 3.10. *Pour les séquences de t échanges $\mathcal{E} = \text{exc}(i, i+2) \circ \text{exc}(i, i+4) \circ \dots \circ \text{exc}(i, i+2t)$ et $\mathcal{F} = \text{exc}(i, i+2t) \circ \dots \circ \text{exc}(i, i+4) \circ \text{exc}(i, i+2)$:*

$$f(\mathcal{E}) = f(\mathcal{F}) = t + (t \bmod 2).$$

Démonstration. Pour tous i, t valides, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ se réduisent à des α -permutations π dont le cycle principal contient $t+1$ éléments, et par la Proposition 3.7 :

$$d(\pi) = t + 1 - ((t+1) \bmod 2) = t + (t \bmod 2).$$

□

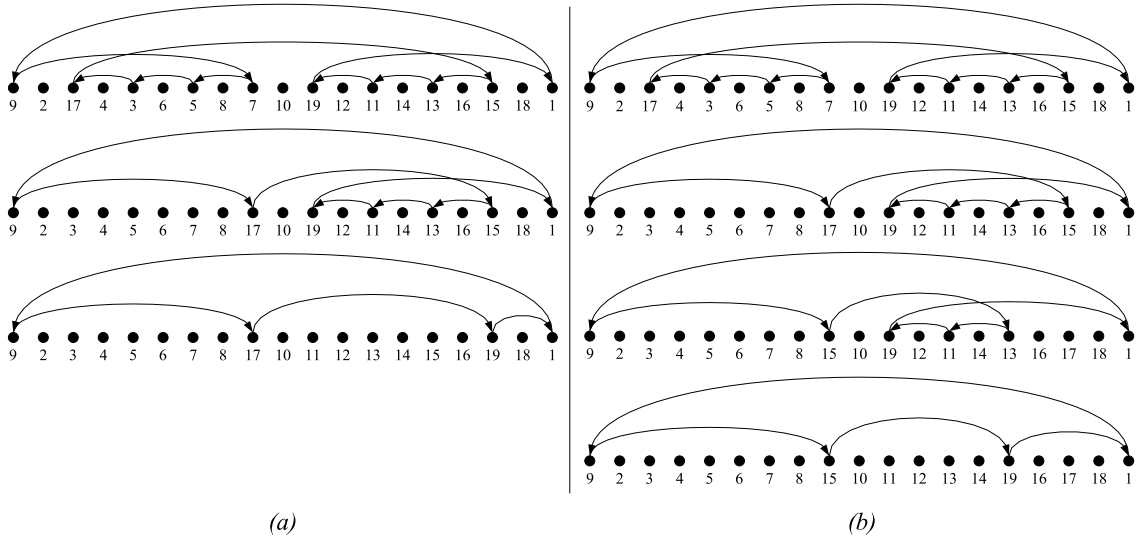


FIG. 3.9 – Deux scénarios possibles d'échanges transformant une β -permutation en une α -permutation

Proposition 3.11. *Pour toute β -permutation π de S_n :*

$$d(\pi) = \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2} \bmod 2 \right).$$

Démonstration. Une β -permutation n'étant qu'un cas particulier de γ -permutation, on a par le Lemme 3.5 :

$$d(\pi) \geq \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2} \bmod 2 \right).$$

Si le cycle principal de π ne comporte qu'un seul croisement, alors il existe un chemin de t arcs reliant les deux arcs qui se croisent ; on peut contracter ce chemin par une séquence de t échanges successifs dépendants (dans le sens où chaque échange de la séquence agit sur un élément de l'échange précédent), qui trient les éléments appartenant à cette partie du cycle. Par exemple, dans le cas (a) de la figure 3.8, il suffit d'appliquer la séquence $\text{exc}(i_2, j_1) \circ \dots \circ \text{exc}(i_2, i_2+4) \circ \text{exc}(i_2, i_2+2)$. Et

comme on l'a vu (Proposition 3.10), l'action de ces t échanges est aussi celui de $t + (t \bmod 2)$ transpositions.

Une fois ce chemin contracté, t sommets ont été éliminés du cycle principal de π et le résultat de cette transformation est une permutation σ se réduisant à une α -permutation ; nous avons donc :

$$\begin{aligned}
d(\pi) &\leq d(\pi, \sigma) + d(\sigma) \\
&= t + (t \bmod 2) + \left(\frac{n+1}{2} - t - \left(\left(\frac{n+1}{2} - t \right) \bmod 2 \right) \right) \\
&= t + \frac{n+1}{2} - t + (t \bmod 2) - \left(\left(\frac{n+1}{2} - t \right) \bmod 2 \right) \\
&= \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2} \bmod 2 \right)
\end{aligned}$$

ce qui vérifie bien la thèse dans ce cas-ci.

Dans le cas où il existe plusieurs croisements, il convient de ne pas contracter séparément chacun des chemins reliant deux arcs se croisant. En effet, si l'on procédait de cette manière, et en supposant qu'il y ait p chemins de t_g arcs ($1 \leq g \leq p$), il faudrait effectuer $\sum_{g=1}^p t_g$ échanges pour tous les contracter, ce qui correspondrait à $\sum_{g=1}^p (t_g + (t_g \bmod 2))$ transpositions. On peut améliorer le procédé en échangeant le dernier sommet déplacé dans le premier chemin contracté avec le premier sommet du chemin suivant à contracter, puis continuer la contraction de ce dernier chemin par des échanges dépendants, comme auparavant. Par exemple, la figure 3.9 montre la transformation d'une β -permutation en une permutation se réduisant à une α -permutation de deux façons différentes. Le scénario (a) nécessite $3+3$ échanges = 8 transpositions (cf. Proposition 3.10), alors que le scénario (b) utilise le même nombre d'échanges, mais qui correspond cette fois à 6 transpositions.

Ainsi, toute β -permutation π contenant p chemins de t_g éléments à contracter ($1 \leq g \leq p$) peut être transformée en une permutation réductible à une α -permutation σ telle que

$$d(\pi, \sigma) = T + T \bmod 2$$

où $T = \sum_{g=1}^p t_g$. Les échanges - ou plutôt, les transpositions représentant ces échanges - élimineront T sommets du cycle principal de π , ce qui nous fournit la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
d(\pi) &\leq d(\pi, \sigma) + d(\sigma) \\
&= T + (T \bmod 2) + \left(\frac{n+1}{2} - T - \left(\left(\frac{n+1}{2} - T \right) \bmod 2 \right) \right) \\
&= \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2} \bmod 2 \right)
\end{aligned}$$

qui égale la minoration donnée plus haut. □

3.5.3 Distance des γ -permutations

Toute permutation π peut être triée en éliminant un à un les cycles de $\Gamma(\pi)$, de manière à n'éliminer qu'un seul cycle à la fois sans modifier les autres. Ceci se voit

bien en utilisant des échanges plutôt que des transpositions, car ceux-ci n'agissent que sur les éléments du cycle à éliminer ; il suffit ensuite de remplacer la séquence optimale d'échanges par une séquence optimale de transpositions. Cette stratégie fournit donc la majoration suivante sur la distance de π .

Lemme 3.6. *Pour toute permutation π avec $\Gamma(\pi) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{c(\Gamma(\pi))}$ (on prend la décomposition en cycles de π), notons $d(C)$ la distance de la permutation σ telle que $\Gamma(\sigma)$ est constitué uniquement du cycle C et des 1-cycles que C contient ; alors :*

$$d(\pi) \leq \sum_{i=1}^{c(\Gamma(\pi))} d(C_i) .$$

Remarquons que nous ne connaissons pas forcément toujours la longueur de la séquence optimale triant chacun des cycles de $\Gamma(\pi)$. Nous allons maintenant montrer que la minoration du Lemme 3.5 page 20 est atteinte.

Proposition 3.12. *Pour toute γ -permutation π de S_n :*

$$d(\pi) = n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)).$$

Démonstration. Chaque cycle de $\Gamma(\pi)$ est soit orienté, soit non orienté, et nous connaissons la distance de chacun de ces cycles (Propositions 3.7 et 3.11). Notons $\text{odd}(\Gamma(\pi))$ (resp. $\text{even}(\Gamma(\pi))$) l'ensemble des cycles impairs (resp. pairs) de $\Gamma(\pi)$; par le Lemme 3.6, nous avons :

$$\begin{aligned} d(\pi) &\leq \sum_{i=1}^{c(\Gamma(\pi))} |C_i| - (|C_i| \bmod 2) \\ &= \sum_{C_{i_1} \in \text{odd}(\Gamma(\pi))} (|C_{i_1}| - 1) + \sum_{C_{i_2} \in \text{even}(\Gamma(\pi))} |C_{i_2}| \\ &= \sum_{i=1}^{c(\Gamma(\pi))} |C_i| - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) \\ &= n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) . \end{aligned}$$

La dernière égalité est correcte car tout élément de π appartient à un et un seul cycle. La thèse s'obtient en combinant cette majoration de $d(\pi)$ avec le Lemme 3.5. $\square$

Remarquons enfin que cette dernière proposition peut être facilement étendue : en effet, on sait par le Théorème 3.2 qu'il n'est pas nécessaire que π soit réduite. On peut également souhaiter qu'au lieu des éléments pairs, ce soit les éléments impairs qui soient tous fixés ; dans le cas d'une telle permutation π , on aura alors $\pi_1 = 1$, et l'on pourra réduire π à une γ -permutation. Par exemple :

$$(1 \ 4 \ 3 \ 6 \ 5 \ 8 \ 7 \ 2) \equiv_r (3 \ 2 \ 5 \ 4 \ 7 \ 6 \ 1).$$

De plus, nous pouvons encore étendre le résultat grâce aux *permutations toriques*, introduites par Eriksson, Eriksson, Karlander, Svensson et Wästlund [8] et Hultman [12]. Notons, pour $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et $m \in \mathbb{N}$:

1. $\overline{x}^m = (x + m) \bmod (n + 1)$;
2. $\underline{x}_m = (x - m) \bmod (n + 1)$.

Définition 3.25. Soit $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_n)$ une permutation de n éléments ; la permutation circulaire correspondante est $\pi^\circ = 0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_n$, dans laquelle 0 est à la fois le prédécesseur de π_1 et le successeur de π_n .

Cette permutation circulaire peut être lue en prenant n'importe quelle position comme point de départ ; pour retrouver la permutation linéaire initiale, il suffit de retirer le 0 et de prendre comme position de départ pour π la position qui suit le 0. À partir d'une permutation circulaire π° et d'un naturel m , définissons une permutation circulaire $m + \pi^\circ$ par l'égalité

$$m + \pi^\circ = \overline{0}^m \ \overline{\pi_1}^m \ \overline{\pi_2}^m \ \cdots \ \overline{\pi_n}^m.$$

Définition 3.26. Soit $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_n)$ une permutation de n éléments ; la permutation torique correspondante, notée π° , est l'ensemble des permutations $m + \pi^\circ$ avec $0 \leq m \leq n$.

Exemple 3.13. Soit $\pi = (3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 4 \ 6)$; alors $\pi^\circ = 0 \ 3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 4 \ 6$, et :

$$\begin{aligned} 0 + \pi^\circ &= 0 \ 3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 4 \ 6 \\ 1 + \pi^\circ &= 1 \ 4 \ 2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 0 \\ 2 + \pi^\circ &= 2 \ 5 \ 3 \ 0 \ 4 \ 6 \ 1 \\ 3 + \pi^\circ &= 3 \ 6 \ 4 \ 1 \ 5 \ 0 \ 2 \\ 4 + \pi^\circ &= 4 \ 0 \ 5 \ 2 \ 6 \ 1 \ 3 \\ 5 + \pi^\circ &= 5 \ 1 \ 6 \ 3 \ 0 \ 2 \ 4 \\ 6 + \pi^\circ &= 6 \ 2 \ 0 \ 4 \ 1 \ 3 \ 5 \end{aligned}$$

On a donc $\pi^\circ = \{ (3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 4 \ 6), (1 \ 4 \ 2 \ 6 \ 3 \ 5), (4 \ 6 \ 1 \ 2 \ 5 \ 3), (2 \ 3 \ 6 \ 4 \ 1 \ 5), (5 \ 2 \ 6 \ 1 \ 3 \ 4), (2 \ 4 \ 5 \ 1 \ 6 \ 3), (4 \ 1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 2) \}$.

Enfin, le lemme suivant est dû à Eriksson et autres.

Lemme 3.7. $[8] \ \forall \ \pi, \sigma \in S_n : \sigma \in \pi^\circ \Rightarrow d(\sigma) = d(\pi)$.

Ainsi, si π est une permutation réduite de n éléments, où n est impair et dans laquelle les éléments impairs occupent les positions impaires et forment une sous-séquence "croissante modulo $n+1$ ", alors $\pi \in \sigma^\circ$ où σ se réduit à une γ -permutation. En effet, si n est impair, ajouter 1 (mod $(n+1)$) à tous les éléments de π° transforme n en 0, c'est-à-dire le nouveau point de départ de la permutation résultante ; ainsi, les éléments impairs deviennent tous pairs et fixés, et π est alors transformée en une permutation dont les éléments pairs sont fixés.

Exemple 3.14. Si $\sigma = (5 \ 4 \ 7 \ 2 \ 9 \ 8 \ 1 \ 6 \ 3)$, alors $1 + \sigma^\circ = 1 \ 6 \ 5 \ 8 \ 3 \ 0 \ 9 \ 2 \ 7 \ 4$ dont on déduit $\pi = (9 \ 2 \ 7 \ 4 \ 1 \ 6 \ 5 \ 8 \ 3)$ qui est une γ -permutation.

Nous obtenons donc finalement le résultat suivant.

Théorème 3.6. *Pour toute permutation π de S_n fixant soit les éléments pairs, soit les éléments impairs :*

$$d(\pi) = n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)).$$

De plus, toute permutation σ avec n impair et dont les éléments impairs occupent les positions impaires et forment une sous-séquence croissante modulo $n + 1$ peut être transformée en temps linéaire en une permutation π telle que

$$d(\sigma) = d(\pi) = n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)).$$

Insistons bien sur le fait que $c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi))$ compte aussi les $\frac{n-1}{2}$ 1-cycles créés par les éléments pairs fixés ! La valeur maximale que peut atteindre la distance d'une permutation satisfaisant ces conditions est donc $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

3.6 Une nouvelle majoration

Le théorème suivant motive l'importance des γ -permutations.

Théorème 3.7. *Toute permutation π de S_n s'obtient, pour un certain naturel k , à partir d'une γ -permutation σ de S_{n+k} en éliminant k éléments pairs de σ .*

Démonstration. Si π n'est pas une γ -permutation, il suffit de la réduire en π' et d'ajouter un 1-cycle à $\Gamma(\pi')$ entre tout couple d'éléments (π'_i, π'_{i+1}) ($1 \leq i \leq n-1$) tels que $\pi'_i \neq i$ et $\pi'_{i+1} \neq i+1$ pour la transformer en une γ -permutation σ de S_{n+k} . Cette opération est bien sûr réversible, et ceci termine la preuve. $\square$

Nous obtenons ainsi une nouvelle majoration sur la distance des transpositions.

Théorème 3.8. $\forall \pi \in S_n :$

$$d(\pi) \leq n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)). \quad (3.4)$$

Démonstration. Soit $\sigma \in S_{n+k}$ une γ -permutation de laquelle π provient par suppression de k éléments pairs (comme dans la preuve précédente). Les cycles de $\Gamma(\sigma)$ peuvent tous être éliminés individuellement par des séquences d'échanges pour lesquelles nous connaissons le nombre minimal correspondant de transpositions (Proposition 3.12), et tous ces échanges marchent encore pour $\Gamma(\pi)$ (après en avoir éventuellement adapté certains). Nous pouvons donc affirmer que $d(\pi) \leq d(\sigma)$, et :

$$d(\pi) \leq d(\sigma) = n + k - c_{\text{odd}}(\Gamma(\sigma)) = n + k - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) - k = n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)).$$

$\square$

Le tableau 3.2 compare la majoration du Théorème 3.8 aux majorations données par les équations (3.1), (3.2) et (3.3), en donnant dans chaque colonne le nombre de cas où elle est inférieure à la majoration à laquelle elle est comparée.

n	$n!$	$(3.4) \leq (3.1)$	$(3.4) \leq (3.2)$	$(3.4) \leq (3.3)$
3	6	2	1	6
4	24	8	8	15
5	120	45	24	31
6	720	304	49	495
7	5040	2055	722	1611
8	40320	17879	3094	4355
9	362880	104392	60871	10243

TAB. 3.2 – Comparaison de la majoration du Théorème 3.8 avec d'autres majorations

n	$n!$	$(3.5) \leq (3.1)$	$(3.5) \leq (3.2)$	$(3.5) \leq (3.3)$
3	6	2	1	6
4	24	11	9	21
5	120	60	36	54
6	720	451	73	703
7	5040	3318	1336	3574
8	40320	27486	5957	9864
9	362880	259195	132801	21610

TAB. 3.3 – Comparaison de la majoration du Théorème 3.9 avec d'autres majorations

3.7 Amélioration de la majoration

3.7.1 Amélioration de la majoration par le torisme

L'utilisation du torisme et des Propositions 3.3 page 13 et 3.4 14 permet d'améliorer notre majoration.

Théorème 3.9. *Notons $P = \pi_{\circ}^{\circ} \cup (m(\pi))_{\circ}^{\circ} \cup (\pi^{-1})_{\circ}^{\circ} \cup (m(\pi^{-1}))_{\circ}^{\circ}$; alors :*

$$\forall \pi \in S_n : d(\pi) \leq n - \max_{\sigma \in P} c_{\text{odd}}(\Gamma(\sigma)) . \quad (3.5)$$

Il a été constaté empiriquement (Table 3.3) que ceci permettait une bonne amélioration de notre majoration, mais l'expression et la quantification de cette amélioration restent difficiles à évaluer car nous ne savons pas comment évolue la structure classique des cycles de Γ sous le torisme, alors que la structure des cycles de G sous cette classe d'équivalence est bien plus stable, comme l'a montré Hultman [12].

3.7.2 Amélioration de la majoration par suppressions de 1-cycles

Après avoir examiné les configurations particulières que sont les γ -permutations, il est naturel de se demander comment évolue la distance de ces permutations lorsqu'on supprime un ou plusieurs (voire tous les) 1-cycles qu'elles contiennent. Comme dans la Section 3.5, nous examinons séparément le cas des cycles orientés et celui des cycles non orientés.

Cas des cycles orientés

Définition 3.27. Une sous-permutation σ d'une permutation π de S_n est un intervalle de $k \leq n$ éléments de π tels que

$$\sigma = (\pi_i - m + 1 \ \pi_{i+1} - m + 1 \ \cdots \ \pi_{i+k} - m + 1)$$

est une permutation de S_k (où m est le plus petit élément de cet intervalle).

Définition 3.28. Un α -cycle dans un Γ -graphe est un cycle dont la portée est une sous- α -permutation.

Définition 3.29. Une k -troncature (ou plus simplement, la troncature) d'un α -cycle est une permutation provenant d'un α -cycle par suppression de $k-1$ cycles que celui-ci contient.

Commençons par examiner ce que devient le graphe $G(\pi)$ de Bafna et Pevzner lorsqu'on tronque un α -cycle.

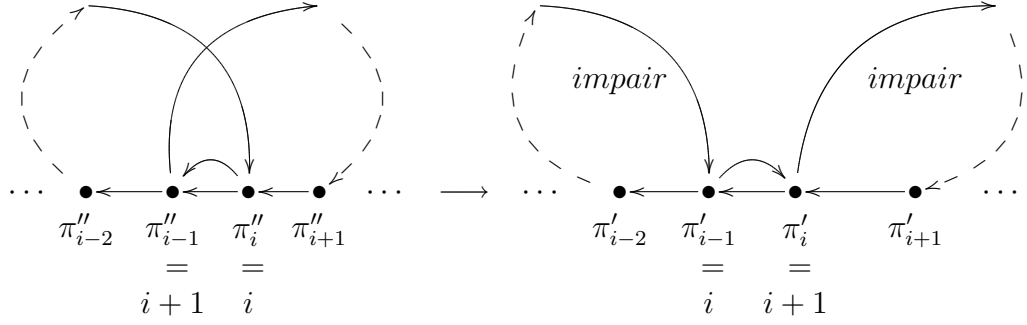
Lemme 3.8. Pour toute k -troncature π' de S_n d'un α -cycle π de S_{n+k} ($k \geq 1$) :

$$c(G(\pi')) = c_{\text{odd}}(G(\pi')) = k$$

et $G(\pi')$ est constitué exclusivement de cycles disjoints, ne se contenant pas, à l'exception d'un grand cycle contenant tous les autres.

Démonstration. Par induction. Comme d'habitude, nous ferons l'hypothèse que le cycle principal de $\Gamma(\pi)$ est orienté positivement, mais le cas négatif se vérifie tout aussi aisément.

1. cas de base ($k = 1$) : la suppression d'un élément $\pi_i = i$ consiste en fait à appliquer la transposition $\tau(i-1, i, i+1)$, puis à contracter l'adjacence ainsi créée en un seul élément qui est le minimum des deux éléments rendus consécutifs (ici, i) et enfin, à renuméroter les autres éléments (il s'agit donc d'une réduction partielle). Les deux $\frac{n+k+1}{2}$ -cycles de $G(\pi)$ se chevauchent de telle manière que τ agit sur ces deux cycles (voir l'exemple de la figure 3.10) et est donc un 0-move. Nous obtenons ainsi un $(n+k)$ -cycle et un 1-cycle ; ce dernier est ensuite supprimé, ce qui fait décroître le nombre de cycles (impairs) de 1, et la thèse est vérifiée. De plus, $G(\pi')$ ne contient qu'un cycle, donc la "disjonction" est aussi vérifiée.
2. induction (vrai pour $k-1 \Rightarrow$ vrai pour k) : pour simplifier la démonstration, nous dissociions l'application des transpositions de la suppression des adjacences qu'elles créent, c'est-à-dire que nous appliquons d'abord toutes les transpositions, et puis seulement nous supprimons les éléments désirés. Ainsi, par hypothèse d'induction, nous partons d'une permutation π'' contenant non pas $k-1$ cycles (impairs), mais bien $2(k-1)$ cycles (impairs) car nous remettons en place les adjacences supprimées. Tous ces cycles sont disjoints et impairs, ne se contiennent pas à part un grand cycle contenant tous les autres, et $k-1$ d'entre eux sont des 1-cycles. Appliquons la transposition $\tau(i-1, i, i+1)$, où i est pair ; le cycle impair auquel appartient cet élément sera découpé en trois cycles : une adjacence (1-cycle), et deux cycles impairs situés de part et d'autre de cette adjacence.



En effet, le cycle découpé étant impair, les deux cycles encadrant le 1-cycle doivent être tous deux pairs ou impairs ; et pour montrer qu'ils sont tous les deux impairs, il suffit donc de montrer qu'un seul des deux l'est. Or, ceci est bien le cas : en effet, le nombre d'arcs noirs situés à droite de l'élément i appartenant au cycle découpé est impair, car ce cycle se prolonge jusqu'à ce que l'on tombe sur une adjacence, causée par un élément pair en position impaire, et le nombre d'arcs noirs compris entre une position paire et une position impaire est impair. Ainsi, les trois nouveaux cycles sont bien impairs, et on obtient la permutation π' avec $c(G(\pi')) = c_{\text{odd}}(G(\pi')) = 2k$, dont on élimine à présent les k 1-cycles créés par les transpositions appliquées pour compléter les éliminations des éléments fixés, et nous retombons bien sur la thèse. Le seul cas particulier se produit dans le cas où la transposition appliquée découpe le cycle contenant tous les autres, car le nombre d'arcs noirs situés soit à droite soit à gauche de celui qui sera éliminé pourrait être pair ; mais dans ce cas, ces arcs feront toujours partie d'un cycle surplombant les autres, qui sera également impair.

□

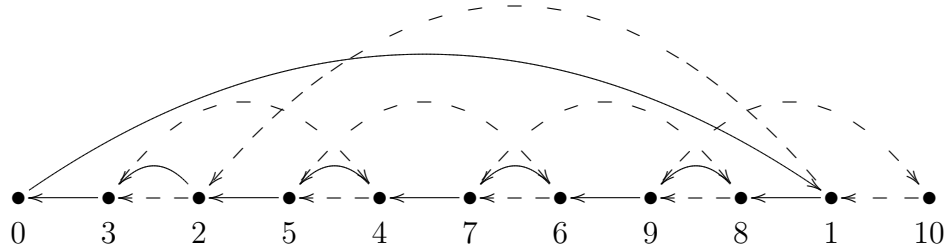


FIG. 3.10 – Le graphe des cycles de l' α -permutation (3 2 5 4 7 6 9 8 1)

Nous en déduisons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.2. *Pour toute k -troncature $\pi' \in S_n$ d'un α -cycle de S_{n+k} :*

$$d(\pi') = \frac{n+k+1}{2} - k.$$

Démonstration. La minoration de $\frac{n+k+1}{2} - k$ se déduit immédiatement du Lemme 3.8 et du Théorème 3.1. Comme dans la démonstration du Lemme 3.8, considérons plutôt la permutation $\pi'' \in S_{n+k}$ dans laquelle les k adjacences créées n'ont pas encore été supprimées. Nous pouvons partitionner π'' en intervalles de la façon suivante :

1. chaque adjacence que nous avons créée est un intervalle de longueur 2 ;
2. l'intervalle constitué de l'élément $\pi''_{n+k} = 1$ est de longueur 1 ;
3. tout autre morceau de la permutation, situé avant une adjacence, entre deux adjacences ou entre une adjacence et l'intervalle de longueur 1 est un intervalle.

Ainsi, tous ces intervalles sont de longueur paire, sauf l'intervalle contenant uniquement $\pi''_{n+k} = 1$. Comme chaque intervalle créé peut être trié par un nombre de transpositions égal à la moitié de sa longueur, nous pouvons ramener π'' à la permutation $(2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \dots \ n+k-2 \ n+k-1 \ n+k \ 1)$ en $\frac{n+k-1-2k}{2}$ transpositions, et le résultat est à distance 1 de ι . Nous appliquons donc au total

$$\frac{n+k-1-2k}{2} + 1 = \frac{n+k-1-2k+2}{2} = \frac{n+k+1}{2} - k$$

transpositions, ce qui achève la preuve. $\square$

Nous avons envie de réexprimer cette distance en utilisant les cycles de $\Gamma(\pi)$, et nous reformulons donc le résultat précédent dans le lemme suivant.

Lemme 3.9. *Pour toute k -troncature $\pi \in S_n$ d'un α -cycle de S_{n+k} :*

$$d(\pi) = n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) - k + \left(\frac{n+k+1}{2} \bmod 2 \right).$$

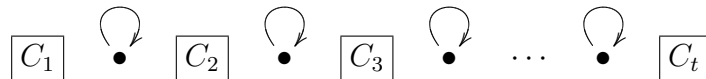
Démonstration. Soit σ l' α -cycle dont provient π ; alors :

$$\begin{aligned} d(\pi) &= \frac{n+k+1}{2} - k \\ &= \frac{n+k+1}{2} - k - \left(\frac{n+k+1}{2} \bmod 2 \right) + \left(\frac{n+k+1}{2} \bmod 2 \right) \\ &= d(\sigma) - k + \left(\frac{n+k+1}{2} \bmod 2 \right) \\ &= n+k - c_{\text{odd}}(\Gamma(\sigma)) - k + \left(\frac{n+k+1}{2} \bmod 2 \right) \\ &= n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\sigma)) + \left(\frac{n+k+1}{2} \bmod 2 \right) \\ &= n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) - k + \left(\frac{n+k+1}{2} \bmod 2 \right). \end{aligned}$$

$\square$

Examinons maintenant une configuration particulière.

Proposition 3.13. *Soit $\pi \in S_n$ une permutation dont le Γ -graphe est de la forme suivante :*



où les t cycles C_i sont des k_i -troncatures d' α -cycles ; alors :

$$d(\pi) = \frac{n+1-K}{2}$$

où K est le nombre d'arcs de longueur 1 dans $\Gamma(\pi)$.

Démonstration. Comme chaque suppression de 1-cycle crée un arc de longueur 1 dans une troncature d' α -cycle, par le Lemme 3.8 et le Théorème 3.1, nous avons

$$d(\pi) \geq \frac{n+1-\sum_{i=1}^t k_i}{2} = \frac{n+1-K}{2}.$$

Notons n_i le nombre d'éléments de $\text{span}(C_i)$; on a $n = t-1 + \sum_{i=1}^t n_i$, et le Lemme 3.6 et le Corollaire 3.2 nous donnent :

$$\begin{aligned} d(\pi) &\leq \sum_{i=1}^t d(C_i) = \sum_{i=1}^t \left(\frac{n_i + k_i + 1}{2} - k_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (n_i - k_i + 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^t n_i - \sum_{i=1}^t k_i + \sum_{i=1}^t 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} (n - (t-1) - K + t) \\ &= \frac{n+1-K}{2} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Remarquons que les $t-1$ 1-cycles séparant nos t troncatures d' α -cycles peuvent être éliminés sans que cela ne modifie la distance de la permutation ainsi obtenue. En effet, nous trions chacun des C_i séparément, donc l'élimination de $1 \leq s \leq t$ des 1-cycles "séparateurs" ne modifie pas la majoration obtenue sur la distance. De plus, éliminer un de ces 1-cycles revient à appliquer un 0-move créant une adjacence dans le graphe G puis à réduire la permutation résultante, ce qui fait décroître le nombre d'éléments et le nombre de cycles de G de la même quantité, donc la minoration ne bouge pas non plus et la distance se calcule de la même manière. Comme le but visé est de resserrer notre majoration, il faut exprimer la distance de toutes ces permutations par la formule obtenue précédemment.

Proposition 3.14. *Pour toute permutation π de S_n constituée de t troncatures d' α -cycles et de 1-cycles :*

$$d(\pi) \leq n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) - K + \sum_{i=1}^t \left(\frac{n_i + k_i + 1}{2} \bmod 2 \right)$$

où n_i est la longueur de la portée du cycle C_i , k_i le nombre d'arcs de longueur 1 du cycle C_i et K le nombre total d'arcs de longueur 1 de $\Gamma(\pi)$.

Démonstration. Pour chaque k_i -troncature C_i d' α -cycle de $\Gamma(\pi)$, notons σ_i la sous-permutation correspondante et s le nombre de 1-cycles n'étant contenu dans aucun des C_i . Alors :

$$\begin{aligned}
d(\pi) &\leq \sum_{i=1}^t d(\sigma_i) \\
&= \sum_{i=1}^t \left(n_i - c_{\text{odd}}(\Gamma(\sigma_i)) - k_i + \left(\frac{n_i + k_i + 1}{2} \bmod 2 \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^t n_i - \sum_{i=1}^t c_{\text{odd}}(\Gamma(\sigma_i)) - \sum_{i=1}^t k_i + \sum_{i=1}^t \left(\frac{n_i + k_i + 1}{2} \bmod 2 \right) \\
&= (n - s) - (c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) - s) - K + \sum_{i=1}^t \left(\frac{n_i + k_i + 1}{2} \bmod 2 \right) \\
&= n - c_{\text{odd}}(\Gamma(\pi)) - K + \sum_{i=1}^t \left(\frac{n_i + k_i + 1}{2} \bmod 2 \right).
\end{aligned}$$

□

Cette majoration reste bien entendu valide dans le cas des γ -permutations, mais surestime leur distance (à cause de la somme). Ce n'est toutefois pas bien grave, puisque nous pouvons identifier les γ -permutations et que nous avons une formule exacte pour calculer leur distance.

Cas des cycles non orientés

Définition 3.30. *Un β -cycle dans un Γ -graphe est un cycle dont la portée est une sous- β -permutation.*

Définition 3.31. *Une k -troncature (ou plus simplement, la troncature) d'un β -cycle est une permutation provenant d'un β -cycle par suppression de k 1-cycles que celui-ci contient.*

L'analyse effectuée dans le cas des troncatures d' α -cycles semble plus compliquée dans le cas des troncatures de β -cycles, et nous poursuivons notre travail sur ces cycles. Remarquons qu'il suffit ici de montrer que la majoration obtenue plus haut marche pour un β -cycle tronqué ; si c'est le cas, alors elle marche aussi dans le cas où on en a plusieurs (puisque'on peut les éliminer séparément) et dans celui où la permutation contient les deux types de cycles.

3.8 Problème de dénombrement lié au torisme

Hultman [12] propose de définir un analogue des nombres de Stirling de première espèce en prenant plutôt en compte le graphe des cycles :

$$c_P(n, k) = |\{\pi \in S_n \mid c(G(\pi)) = k\}|.$$

Il n'obtient pas de caractérisation complète de ces nombres, mais remarque que :

1. $c_P(n, n+1) = 1$ puisque ι est la seule permutation dont le graphe G contient $n+1$ cycles ;
2. $c_P(n, n-1) = \binom{n+2}{4}$.

Nous pouvons évidemment ajouter à cette liste $c_P(n, m) = 0 \ \forall m \notin [1, n+1]$, puisque $G(\pi)$ contient toujours au moins un cycle quelle que soit π , et au plus $n+1$ cycles (l'identité étant le seul tel cas).

Lemme 3.10. $[12] \ \forall \pi \in S_n :$

$$c(G(\pi)) \text{ est } \begin{cases} \text{impair} & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \text{pair} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Nous pouvons immédiatement déduire du Lemme 3.10 le corollaire suivant.

Corollaire 3.3. *Pour tous n, k de parités différentes : $c_P(n, k) = 0$.*

Et en conjonction avec le Lemme 3.1, nous pouvons encore déduire le corollaire suivant.

Corollaire 3.4. $\forall n : c_P(n, n) = 0$.

Notons $a(n)$ le nombre de manières de décomposer un cycle de longueur $2n+1$ dans S_{2n+1} en le produit de deux cycles de longueur $2n+1$. Nous avons (cf. [16], séquence A060593) :

$$a(n) = \frac{(2n)!}{n+1}.$$

Nous avons constaté empiriquement, pour $n \leq 11$, l'égalité $c_P(n, 1) = a(\frac{n}{2})$.

Conjecture 3.1. $\forall n \text{ pair} : c_P(n, 1) = a(\frac{n}{2}) = 2 \frac{n!}{n+2}$.

3.9 Problèmes ouverts

Nous concluons ce chapitre en passant en revue divers problèmes ouverts concernant le tri par transpositions. Le problème le plus important est certainement celui de la complexité du calcul de la distance des transpositions, ainsi que de la recherche d'une séquence optimale. En effet, on ne sait pas si le problème est soluble en temps polynomial, et seules des approximations polynomiales sont pour l'instant disponibles, la meilleure ayant un taux d'approximation de 1.375 (voir Elias et Hartman [7]). Remarquons également qu'aucun algorithme basé sur ce graphe n'utilise de -2 -moves, car il semble assez intuitif qu'un -2 -move augmenterait la distance, mais il n'a jamais été démontré formellement qu'il n'existait pas de séquence optimale contenant un -2 -move ! Une autre structure que le graphe de Bafna et Pevzner a été proposée par Dias et autres [6], mais l'algorithme qu'ils en déduisent est une 2.25-approximation, et personne n'a à ce jour répondu à leur question de

n	$c_P(n, 1)$	$c_P(n, 2)$	$c_P(n, 3)$	$c_P(n, 4)$	$c_P(n, 5)$	$c_P(n, 6)$	$c_P(n, 7)$	$c_P(n, 8)$	$c_P(n, 9)$	$c_P(n, 10)$	$c_P(n, 11)$
1	0	1									
2	1	0	1								
3	0	5	0	1							
4	8	0	15	0	1						
5	0	84	0	35	0	1					
6	180	0	469	0	70	0	1				
7	0	3044	0	1869	0	126	0	1			
8	8064	0	26060	0	5985	0	210	0	1		
9	0	193248	0	152900	0	16401	0	330	0	1	
10	604800	0	2286636	0	696905	0	39963	0	495	0	1
11	0	19056960	0	18128396	0	2641925	0	88803	0	715	0

TAB. 3.4 – Quelques valeurs expérimentales de $c_P(n, k)$

savoir s'il était possible de faire mieux en utilisant leur structure, ni s'il existait des permutations atteignant la majoration qu'ils en déduisent (celle du Théorème 3.4 page 11).

La question du diamètre de S_n sous l'opération de transposition est également ouverte : quelle est la valeur maximale que peut atteindre $d(\pi)$? En combinant les résultats de divers auteurs, on sait que cette valeur appartient, pour n fixé, à $[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \frac{2n}{3}]$. Peut-être notre nouvelle majoration pourrait-elle être un autre point de départ pour aider à la résolution de ce problème ?

Une remarque judicieuse faite par Elias et Hartman [7] est qu'il est difficile d'obtenir des minoration sur la distance des transpositions. Les seules connues sont celles de Bafna et Pevzner, données au Lemme 3.3 et au Théorème 3.1. Christie [3] a quelque peu amélioré cette dernière minoration, mais remarque que le paramètre qu'il y rajoute n'est pas toujours facile à calculer ; de plus, on perd la symétrie avec la permutation inverse : le paramètre de Christie peut prendre une valeur différente pour π et pour π^{-1} , alors que la distance de ces deux permutations est la même. Christie demande également s'il est possible de caractériser toutes les permutations atteignant la minoration du Lemme 3.3.

Index

Symboles	
$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$	4
$E(G)$	6
$G(\pi)$	9
N_i	13
S_n	5
$V(G)$	6
$[n]$	4
$\Gamma(\pi)$	14
χ	13
$\circ$	5
$\equiv_r$	11
$\mathcal{T}_n$	8
$\bar{x}^m$	28
π°	28
π^{-1}	5
π°	28
$\tau, \tau(i, j, k)$	7
$\underline{x}^m$	28
$b(\pi)$	10
$c(G(\pi))$	9
$c(\Gamma(\pi))$	17
$c_P(n, k)$	36
$c_{even}((\Gamma(\pi)))$	17
$c_{even}(G(\pi))$	9
$c_{odd}((\Gamma(\pi)))$	17
$c_{odd}(G(\pi))$	9
$d(\pi)$	8
$exc(i, j)$	23
$gl(\pi)$	11
$m(\pi)$	13
$\binom{n}{k}$	5
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	14
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	5
A	
Adjacence	10
Arc	6
chevauchement (dans Γ)	24
extrémités d'un	6
longueur d'un	17
Arrangement	4
B	
Bande	11
C	
Coefficient binomial	5
k -cycle	17
Cycle	
α -cycle	31
β -cycle	35
k -troncature	31
chevauchement	20
d'une permutation	5
dans un graphe	6
disjonction	20
impair (de Γ)	17
impair (de G)	9
inclusion	20
pair (de Γ)	17
pair (de G)	9
portée d'un	20
D	
Distance	5
invariante à droite	5
invariante à gauche	5
E	
Echange	23
G	
Graphe	6
Γ -graphe	14
des cycles	9
ordre d'un	6
simple	6
Groupe symétrique	5

I	
Indice	
d'un sommet de Γ	17
N	
Nombre	
de Stirling de première espèce ...	5
O	
Orientation	
d'un cycle de $\Gamma(\pi)$	17
P	
Permutation	4
α -permutation	21
β -permutation	23
γ -permutation	18
éléments d'une	5
équivalente par réduction	11
circulaire	28
conjuguée d'une	13
inverse	5
miroir d'une	17
réduite	11
renversée	3
sous-	31
torique	28
Point de rupture	10
S	
Sommet	6
T	
Translation droite	7
Transposition	7
x -move	9
échangeable	17
action d'une	9
indépendante	17

Bibliographie

- [1] V. BAFNA AND P. A. PEVZNER, *Sorting by transpositions*, SIAM J. Discrete Math., 11 (1998), pp. 224–240 (electronic).
- [2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1973. Deuxième édition, Collection Dunod Université, Série Violette, No. 604.
- [3] D. A. CHRISTIE, *Genome Rearrangement Problems*, PhD thesis, University of Glasgow, Scotland, 1998.
- [4] Z. DIAS AND J. MEIDANIS, *An Alternative Algebraic Formalism for Genome Rearrangements*, Comparative Genomics, (2000), pp. 213–223.
- [5] —, *Genome Rearrangements Distance by Fusion, Fission, and Transposition is Easy*, in Proceedings of SPIRE'2001 - String Processing and Information Retrieval, 2001, pp. 250–253.
- [6] Z. DIAS, J. MEIDANIS, AND M. E. M. T. WALTER, *A New Approach for Approximating The Transposition Distance*, in Proceedings of SPIRE'2000 - String Processing and Information Retrieval, La Coruna, Espagne, Septembre 2000.
- [7] I. ELIAS AND T. HARTMAN, *A 1.375-Approximation Algorithm for Sorting by Transpositions*, Soumis à WABI 2005 (5th Workshop on Algorithms in Bioinformatics).
- [8] H. ERIKSSON, K. ERIKSSON, J. KARLANDER, L. SVENSSON, AND J. WÄSTLUND, *Sorting a bridge hand*, Discrete Mathematics, 241 (2001), pp. 289–300. Selected papers in honor of Helge Tverberg.
- [9] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH, AND O. PATASHNIK, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994.
- [10] S. A. GUYER, L. S. HEATH, AND J. P. VERGARA, *Subsequence and run heuristics for sorting by transpositions*, in Fourth DIMACS Algorithm Implementation Challenge, Rutgers University, Août 1995.
- [11] T. HARTMAN, *A simpler 1.5-approximation algorithm for sorting by transpositions*, in Combinatorial pattern matching, vol. 2676 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, 2003, pp. 156–169.
- [12] A. HULTMAN, *Toric Permutations*, Master's thesis, Dept. of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden, 1999.
- [13] A. LABARRE, *A New Tight Upper Bound on the Transposition Distance*, Soumis.

- [14] J. MEIDANIS AND J. SETUBAL, *Introduction to Computational Molecular Biology*, Brooks-Cole, 1997.
- [15] P. A. PEVZNER, *Computational molecular biology*, Computational Molecular Biology, MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
- [16] N. J. A. SLOANE, *The on-line encyclopedia of integer sequences* (<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>).
- [17] J. P. C. VERGARA, *Sorting by Bounded Permutations*, PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, Virginia, USA, Avril 1997.
- [18] M. E. M. T. WALTER, L. R. A. F. CURADO, AND A. G. OLIVEIRA, *Working on the problem of sorting by transpositions on genome rearrangements*, in Combinatorial pattern matching, vol. 2676 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, 2003, pp. 372–383.