Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Unité de recherche associée au CNRS n°1398

Pavages du plan: indécidabilité et périodicité

Cyril Allauzen
Bruno Durand

Septembre 95

Research Report N° 95-28

Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France
Téléphone : (+33) 72.72.80.00   Télécopieur : (+33) 72.72.80.80
Adresse électronique : lip@lip.ens−lyon.fr

Pavages du plan: indécidabilité et périodicité

Cyril Allauzen
Bruno Durand

Septembre 95

Abstract

We study some decision problems concerning the tiling of the plane with Wang tiles. We present a proof for the undecidability of the tiling problem for the whole plane, and also for the periodic tiling. In these poofs, an aperiodic tile set is constructed. We are interested in the second part in the link between the cardinality of possible tilings of the plane with a given tile set and the existence of a periodic tiling. We are also interested in the property of quasiperiodicity and prove that all tile sets that tile the plane, may tile the plane quasiperiodically.

Keywords: undecidability, tilings, periodicity, quasiperiodicity

Résumé

Nous nous intéressons à des problèmes de décidabilité des pavages du plan par des tules de Wang. Nous étudions le problème du pavage du plan avec une tuile imposée à l'origine et nous montrons que ce problème est indécidable. Ensuite, nous donnons une preuve de l'indécidabilité du pavage du plan; la démonstration de ce résultat nous permet d'exhiber un jeu de tuiles apériodique. Enfin, nous montrons l'indécidabilité du pavage périodique du plan.

Nous étudions dans la suite des problèmes liés à la périodicité. Dans les constructions précédentes, nous avons vu qu'il existe au moins un jeu de tuiles apériodique. Ceci nous amène à nous intéresser au lien entre la cardinalité de l'ensemble des pavages possibles pour un certain jeu de tuiles et la périodicité d'un des pavages donné par ce jeu. Finalement, nous nous intéressons à la généralisation de la notion de périodicité qu'est la quasipériodicité et nous prouvons que tout ensemble de tuiles pavant le plan permet de le paver quasipériodiquement.

Mots-clés: indécidabilité, pavages, périodicité, quasipériodicité

Pavages du plan: indécidabilité et périodicité*

Cyril Allauzen
Bruno Durand

25 octobre 1995

Introduction

L'objet de ce rapport est l'étude des pavages du plan par des tuiles de Wang. Une tuile de Wang est un carré de taille unité dont les arêtes sont colorées. Pour obtenir un pavage du plan par un jeu de tuiles donné, il suffit de placer des copies de ces tuiles côte à côte de telle sorte que deux arêtes adjacentes aient la même couleur. On ne doit ni tourner ni retourner les tuiles.

Après avoir mis au point quelques définitions et quelques méthodes de base, nous nous intéressons aux problèmes de décidabilité concernant les pavages du plan. Nous nous intéressons au problème du pavage du plan avec une tuile imposée à l'origine et nous voyons que ce problème est lui indécidable. Ensuite nous montrons que le problème du pavage du plan est indécidable et la démonstration de ce résultat nous permet d'exhiber un jeu de tuiles apériodique. Enfin, nous montrons l'indécidabilité du pavage périodique du plan.

Dans une dernière partie, nous regardons plus particulièrement les problèmes liés à la périodicité. Dans la partie précédente, nous avons vu qu'il existe au moins un jeu de tuiles apériodique. Cela nous amène à nous demander s'il existe une condition suffisante pour savoir si un jeu de tuiles donné est apériodique. Nous sommes donc amenés à nous intéresser au lien entre la cardinalité de l'ensemble des pavages possibles pour un certain jeu de tuiles et la périodicité d'un des pavages donné par ce jeu. Finalement, nous nous intéressons à une généralisation de la notion de périodicité qu'est la quasipériodicité et nous prouvons que tout ensemble de tuiles pavant le plan permet de le paver quasipériodiquement.

Le plan est de ce rapport donc le suivant :

1. Définitions et méthodes de bases.

2. Problèmes de décidabilité.

3. Périodicité et quasipériodicité.

*. Rapport de stage de 1ère année du Magistère d'Informatique de l'ENS Lyon effectué par Cyril Allauzen sous la direction de Bruno Durand

Les parties 2 et 3 utilisent certains résultats de la partie 1, mais ces deux parties sont indépendantes. Les trois sections constituant la partie 3 sont aussi indépendantes.

1 Définitions et méthodes de base

Une *tuile de Wang* est un carré unité dont les arêtes sont colorées. La tuile dont les couleurs des arêtes gauche, droite, haut et bas sont respectivement p, q, r et s est notée par le quadruplet (p, q, r, s) comme l'illustre la figure 1). Ces tuiles ont été introduites par Hao Wang dans [6]. Un *jeu de tuiles* est un ensemble fini de tuiles de Wang.

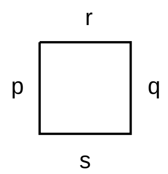

FIG. 1 - *Une tuile de Wang.*

Un *pavage* du plan est obtenu en utilisant autant de fois que souhaité, des copies des tuiles du jeu que l'on s'est fixé. On est autorisé à translater ces copies, mais aucune rotation ni symétrie des tuiles n'est permise. Les tuiles sont placées de telle sorte que leurs centres coïncident avec les points de $\mathbb{Z}^2$ et leurs arêtes doivent être orientées verticalement et horizontalement. On impose que deux arêtes adjacentes doivent avoir la même couleur. Un pavage du plan par des tuiles d'un jeu T peut être vu comme une application de $\mathbb{Z}^2$ dans T vérifiant la condition suivante : deux arêtes adjacentes sont de même couleur.

Ainsi, une application de $\mathbb{Z}^2$ dans T pave bien une partie P de $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si les tuiles associées à deux points voisins ont la même couleur sur leurs arêtes adjacentes. Une telle application est un pavage du plan si elle pave bien $P = \mathbb{Z}^2$.

Nous utiliserons souvent dans ce rapport le lemme suivant dont la démonstration nous permet d'introduire le procédé "d'extraction diagonale".

Lemme 1.1 *On peut paver le plan par les tuiles d'un jeu T si et seulement des carrés de toutes tailles peuvent être pavés.*

Preuve (Procédé d'extraction diagonale). Supposons que des carrés de toutes tailles peuvent être pavés. Superposons tous ces carrés en les centrant à l'origine. Considérons les tuiles qui sont superposées sur l'origine : elles sont en nombre infini ; or il n'y a qu'un nombre fini de tuiles distinctes dans T. Une de ces tuiles apparaît donc un nombre infini de fois. Plaçons cette tuile à l'origine et supprimons de notre famille tous les carrés où cette tuile n'apparaît pas au centre.

Parcourons maintenant le plan à l'aide d'une spirale centrée à l'origine. Supposons que l'on ait déjà pavé les n premiers points de la spirale. Considérons les tuiles qui sont superposées sur le $(n+1)$-ième point. Elles sont en nombre infini, or il n'y a qu'un nombre fini de tuiles distinctes. Une de ces tuiles apparaît donc un nombre infini de fois. Plaçons cette tuile au (n+1)ième point et supprimons de notre famille tous les carrés où cette tuile n'apparaît pas au bon endroit.

Montrons maintenant que le pavage obtenu est correct. Considérons une tuile et ses 4 voisines. Ces 5 tuiles apparaissaient à cette position dans l'un des carrés bien pavés. Les couleurs des bords en contact sont donc les mêmes.

La réciproque est triviale. $\square$

Définition 1.1 *Soit T un jeu de tuiles et $f : \mathbb{Z}^2 \to T$ un pavage. Le pavage f est* périodique *de période $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a, b > 0$ si et seulement si $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad f(x, y) = f(x+a, y) = f(x, y+b)$,* i.e. *s'il existe un rectangle d'une certaine taille qui se répète pour couvrir le plan.*

Nous avons donc défini la périodicité comme l'invariance par deux translations orientées par $[Ox)$ et $[Oy)$. On dit qu'un pavage est *simplement périodique* s'il existe une translation le laissant invariant.

Théorème 1.1 *Si un jeu fini de tuiles permet de faire un pavage simplement périodique du plan, alors il permet aussi d'en faire un périodique.*

Preuve. Soit T un jeu de tuiles et f un pavage simplement périodique par des tuiles de T. Supposons que le vecteur correspondant à la translation laissant invariant le pavage soit horizontal et ait pour coordonnées $(a, 0)$. Considérons alors l'ensemble des segments $[f(0, y), f(a-1, y)]$ pour $y \in \mathbb{Z}$. Comme f est invariant par la translation de vecteur $(a, 0)$, la couleur de l'arête de gauche de $f(0, y)$ est la même que celle de l'arête de droite de $f(a-1, y)$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de segments de longueur a distincts, cela signifie qu'il existe deux entiers relatifs y_1 et y_2 tels que les segments $[f(0, y_1), f(a-1, y_1)]$ et $[f(0, y_2), f(a-1, y_2)]$ soient identiques. On pose $b = |y_1 - y_2|$. Considérons le rectangle dont deux des sommets ont pour coordonnées $(0, y_1)$ et $(a-1, y_2)$. D'après ce que l'on a vu plus haut, les couleurs des arêtes du coté gauche du rectangle sont les mêmes que celles des arêtes du coté droit. De plus, comme les segments $[f(0, y_1), f(a-1, y_1)]$ et $[f(0, y_2), f(a-1, y_2)]$ sont identiques, les couleurs des arêtes du coté supérieur du rectangle sont les mêmes que celles des arêtes du coté inférieur. Si l'on répète ce rectangle de façon à couvrir le plan, on obtient un pavage par des tuiles de T qui est périodique de période (a, b).

Dans le cas où le vecteur de translation n'est pas parallèle à un des axes de coordonnées, une démonstration semblable mais un peu plus lourde permet de conclure de même. $\square$

Définition 1.2 *Un jeu de tuiles est* apériodique *s'il existe un pavage du plan par ces tuiles, mais aucun pavage périodique.*

2 Problèmes de décidabilité

On appelle problème du pavage du plan (resp. du pavage périodique du plan) le problème qui consiste à savoir si un jeu de tuiles permet de paver (resp.

de paver périodiquement) le plan. Dans [7], Wang énonça la conjecture, qui s'est révélée depuis fausse, que n'importe quel jeu de tuiles permettant de paver le plan permet aussi d'obtenir un pavage périodique. Il y aurait alors une méthode de décision pour savoir si un jeu de tuiles permet de paver le plan. En effet, dans ce cas, il y a une méthode de décision pour déterminer si un jeu de tuiles donné permet de paver le plan. Il suffit de former tous les carrés possibles à partir de ce jeu de tuiles, en commençant par les carrés les plus petits jusqu'à ce que l'on trouve un carré avec lequel on peut paver le plan périodiquement, ou que l'on trouve un carré qui ne peut pas être pavé. Le premier cas se produit si et seulement si l'on peut paver le plan périodiquement, le second si et seulement si l'on ne peut pas paver le plan. On en déduit donc le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Si le problème du pavage du plan est indécidable, alors il existe un jeu de tuiles apériodique.*

En fait, on a aussi le résultat suivant, établit par Robert Berger dans [1] :

Théorème 2.2 (Berger) *Le problème du pavage du plan par des tuiles de Wang est indécidable.*

Pour mener à bien cette preuve, Berger a eu besoin de trouver un jeu de tuiles apériodique. Ce jeu contenait plus de 30000 tuiles. La preuve était donc très complexe et a été simplifiée depuis par Robinson dans [5]. C'est cette preuve que nous allons étudier. Le jeu apériodique qu'elle fait intervenir ne contient que 56 tuiles. Ce jeu de tuiles nous permettra aussi de démontrer l'indécidabilité du problème du pavage périodique du plan.

Avant de nous lancer dans la démonstration du théorème de Berger, nous allons d'abord nous intéresser au problème du pavage du plan lorsque la tuile posée à l'origine est imposée. Ceci nous permettra d'établir un lien entre les pavages et les machines de Turing.

2.1 Pavages et machines de Turing

Nous considérons maintenant le problème du pavage du plan à l'origine imposée, problème qui consiste à savoir si l'on peut paver le plan avec un jeu de tuiles donné, une tuile particulière ayant déjà été posée à l'origine. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Wang) *Le problème du pavage du plan avec une origine imposée est indécidable.*

Preuve. La démonstration de l'indécidabilité de ce problème consiste à se ramener à l'indécidabilité du problème de l'arrêt des machines de Turing sur l'entrée vide. Considérons une machine de Turing à un ruban bi-infini. Soit $Q = \{q_o, q_1, ...\}$ l'ensemble fini des états de la machine, soit $q_0 \in Q$ l'état initial et $Q_f \subset Q$ l'ensemble des états finaux. Soit $S = \{s_0, s_1, ...\}$ l'ensemble fini des symboles et $s_0 \in S$ le symbole blanc. Soit $M = \{L, R\}$ l'ensemble des mouvements possibles de la tête de lecture. A chaque instant, la tête de lecture/écriture lit une des cases du ruban. L'action de la machine est déterminée par la fonction de transition $\gamma : (Q - Q_f) \times S \to S \times M \times Q$. Le fait que

$$\gamma(q_i, s_j) = (s_k, L, q_l) \text{ ou } (s_k, R, q_l)$$

indique que si la machine est dans l'état q_i et lit le symbole s_j, alors elle écrit s_k, se déplace vers la gauche ou la droite, et passe dans l'état q_l. Lorsque la machine arrive dans un état final $q \in Q_f$, elle s'arrête. Le problème de l'arrêt se formule ainsi : il n'existe pas d'algorithme pour décider si une machine de Turing donnée s'arrête lorsqu'elle a commencé son calcul sur un ruban blanc.

Nous allons voir comment on peut déduire d'une machine de Turing un pavage du plan. Le ruban de la machine de Turing sera représenté horizontalement et le temps verticalement.

La configuration de la machine(ruban, tête de lecture, état) à deux instants consécutifs sera représenté sur les arêtes inférieures et supérieures d'une ligne de tuile. Le jeu de tuiles utilisé est celui formé par les tuiles des figures 2 à 4.

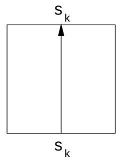

FIG. 2 - *Tuile alphabet*

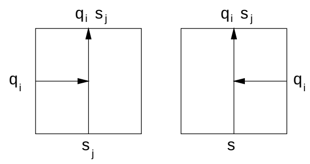

FIG. 3 - *Tuiles de fusion*

La couleur d'une arête est le couple formé par l'étiquette de l'arête et la direction de la flèche associée à cette arête.

La tuile alphabet (figure 2) transmet sans le modifier le symbole s_k, elle est utilisée pour tout k. Les tuiles de fusion (figure 3) combinent un état q_i avec un symbole s_j. Elles sont autorisées pour tous i et j, bien que certaines de ces tuiles ne seront pas utilisées. La première ou la seconde tuile de la figure 4 sont autorisées si et seulement si $\gamma(q_i, s_j) = (s_k, L, q_l)$ ou (s_k, R, q_l) .

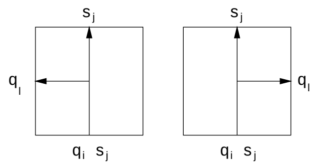

FIG. 4 - *Tuiles d'action*

Supposons que l'on ait une ligne de tuiles dont les arêtes supérieures représentent la configuration de la machine à l'instant t. Une de ces arêtes a une flèche vers le haut étiquetée par $q_i s_j$, et les autres ont des flèches vers le haut avec des étiquettes du type s_k. Alors la ligne de tuile au dessus de la ligne donnée est déterminée de façon unique et ces arêtes supérieures représentent nécessairement la configuration de la machine à l'instant $t+1$. Bien sûr, le pavage de cette ligne n'est possible que si la machine ne s'est pas arrêtée au temps t.

On suppose maintenant que la machine de Turing commence son calcul sur un ruban blanc. On utilise alors les tuiles de la figure 5 pour représenter la configuration initiale de la machine.

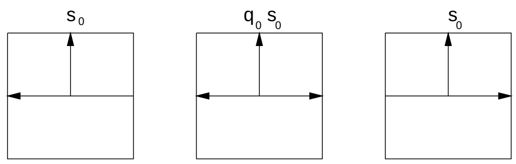

FIG. 5 - *Tuiles de départ*

On considère le jeu de tuiles formé par les tuiles des figures 2 à 5 et de la tuile blanche. On suppose que l'on impose la présence de la seconde tuile de la figure 5 à l'origine. Alors la gauche (resp. droite) de la ligne de départ est nécessairement constituée avec la première (resp. troisième) tuile de la figure 5. Alors on doit nécessairement paver le demi-plan inférieur avec la tuile blanche. Les arêtes supérieures de la ligne 0 représente la configuration initiale de la machine. 0n peut donc paver le demi-plan supérieur (et donc le plan grâce au théorème 1.1) si et seulement si la machine de Turing ne s'arrête pas.

On en déduit qu'il n'existe pas de méthode pour décider si l'on peut paver le plan avec un jeu de tuiles en imposant qu'une certaine tuile apparaisse à l'origine. $\square$

Intéressons-nous maintenant au problème du pavage fini du plan. On se donne un jeu de tuiles T et une tuile blanche $b \notin T$. Ce problème consiste à savoir si l'on peut paver le plan avec le jeu de tuiles $T \cup \{b\}$ de telle façon qu'il n'y ait qu'un nombre fini non nul de points du plan qui soient associés à une tuile de T. Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 2.4 *Le problème du pavage fini du plan est indécidable.*

Preuve. Pour démonter ce résultat nous allons considérer le jeu de tuiles constitué des tuiles des figures 2 à 5 auquel on ajoute les tuiles des figures 6 et 7.

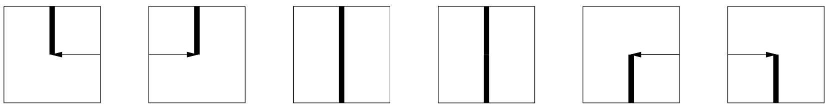

FIG. 6 -

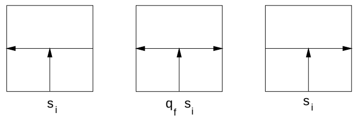

FIG. 7 -

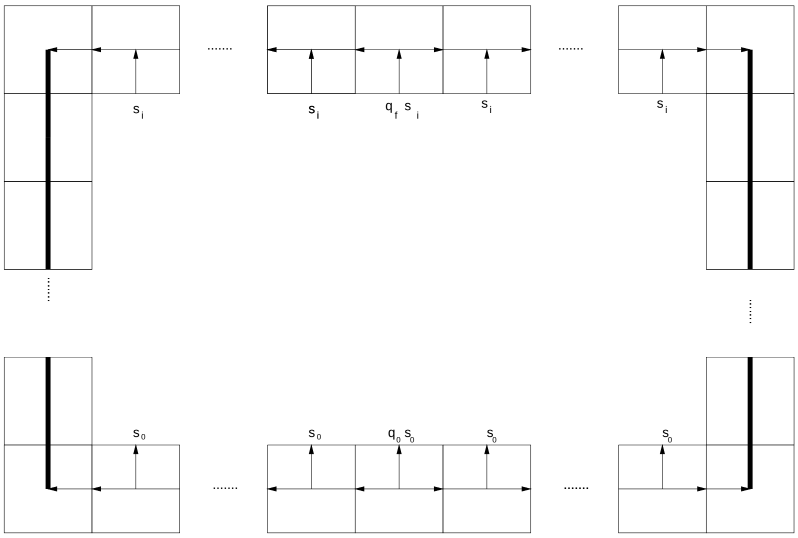

FIG. 8 -

Les tuiles de la figure 7 existent pour tout $s_i \in S$ et pour tout $q_f \in Q_f$.

Si on a un pavage fini, alors il est nécessairement de la forme montrée à la figure 8 et donc la machine s'arrête.

On en déduit que l'on peut faire un pavage fini du plan avec le jeu de tuiles proposé seulement si la machine de Turing s'arrête. Le problème du pavage fini du plan est donc indécidable. □

2.2 Le jeu de tuiles apériodique de Robinson

Le jeu de tuiles de Robinson est constitué des 6 tuiles de la figure 9 et des images de ces tuiles par toutes les rotations et symétries possibles. Comme on va le montrer dans la suite, ce jeu ne permet de construire que des pavages non périodiques du plan. Ces tuiles ne sont pas exactement des tuiles de Wang car il y a un marquage par des encoches et des ergots des côtés et des coins. Le marquage des côtés pourra se traduire sans problème en un marquage de Wang mais il sera plus difficile de la faire pour le marquage des coins. On verra dans la suite que l'on peut déduire de ce jeu un jeu de tuiles de Wang.

Considérons les tuiles obtenues en supprimant le marquage des coins des tuiles de la figure 9. Les deux tuiles de la première colonne sont alors identiques. On représente alors les pointes par des têtes de flèches et les encoches par leurs queues. Les pointes et encoches symétriques sont représentées par une flèche centrale, les antisymétriques par une double flèche, une au centre et une décalée sur le côté. On obtient alors les tuiles de la figure 10.

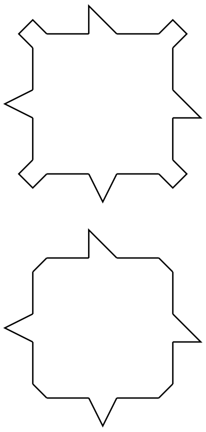

Fig. 9 - *Le jeu de tuiles apériodique de Robinson*

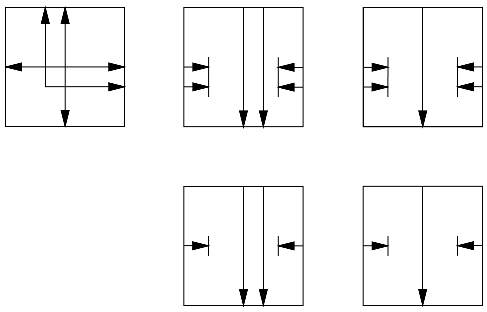

Fig. 10 - *Les cinq tuiles de base*

Considérons le jeu de tuiles constitué par les tuiles de la figure 10 et leurs images par toutes les rotations et symétries. Le jeu ainsi constitué est un jeu de tuiles de Wang si l'on considère que la couleur de chaque arête est l'ensemble des couples formés par la position et la direction des flèches qui sont sur cette arête.

Les tuiles semblables à la première tuile de la figure 10 seront appelées des "croix", les autres tuiles des "bras". La croix dessinée sur la figure 10 est considérée comme orientée vers le haut et la droite. Chaque bras a une flèche principale, la flèche centrale qui traverse la tuile d'un côté au côté opposé. Un bras est considéré comme pointant la direction de sa flèche principale. Nous allons aussi utiliser les symboles abrégés de la figure 11. Le premier carré représente une croix dont l'orientation est quelconque, le deuxième carré représente n'importe quel bras dont la flèche principale est comme indiquée.

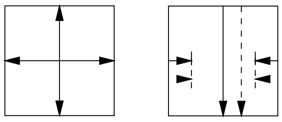

FIG. 11 - *Notation abrégée des croix et bras*

D'un autre côté, si l'on enlève plutôt le marquage des côtés des tuiles de la figure 9, on obtient deux polygones que l'on appellera tuile ergotée et tuile érodée (voir figure 12).

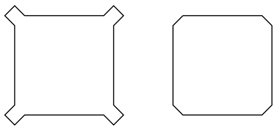

FIG. 12 - *Tuile ergotée et tuile érodée*

Si le plan est pavé par ces polygones, alors à chaque coin une tuile ergotée et trois tuiles érodées doivent se rencontrer. Cette propriété constitue une condition nécessaire et suffisante. Nous allons montrer qu'elle implique que la tuile ergotée n'apparait que sur une ligne sur deux et le long de cette ligne une fois sur deux, ou alors sur une colonne sur deux et le long de cette colonne une fois sur deux.

Si les deux conditions sont vérifiées, on a un motif régulier comme sur la figure 13 : les tuiles ergotées apparaissent aux positions dont les deux coordonnées sont impaires si l'on a bien choisit son repère.

Essayons de voir s'il y a d'autres possibilités et considérons deux lignes adjacentes ; si, le long d'une ligne, des tuiles ergotées apparaissent une fois sur deux, alors l'autre ligne est uniquement constituée de tuiles érodées. De plus si les tuiles ergotées apparaissent une fois sur deux le long d'une ligne, il en sera de même pour une ligne sur deux. On montre de même que si le long d'une colonne les tuiles ergotées apparaissent une fois sur deux, alors elles apparaîtront sur une colonne sur deux.

Supposons que l'on ait un pavage qui ne soit pas complètement régulier,

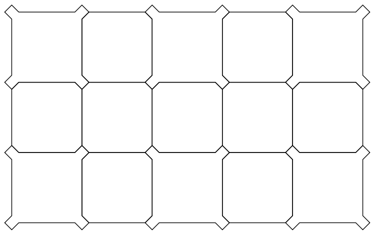

FIG. 13 -

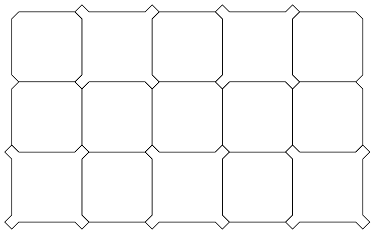

FIG. 14 -

alors on peut trouver trois carrés consécutifs dans une ligne ou une colonne dont le premier est ergoté et les deux autres érodés. Plaçons ces trois carrés au centre de la figure 14 (cela équivaut à faire une rotation d'un multiple de $\pi/2$). Alors cela impose la présence des deux tuiles ergotées du haut, ce qui impose alors la présence des tuiles érodées des deux lignes supérieures puis des deux tuiles ergotées de la ligne inférieure. On a donc nécessairement le motif de la figure 14. Cela signifie que les tuiles ergotées doivent apparaître une fois sur deux le long de la ligne inférieure et de la ligne supérieure. Comme on l'a vu précédemment cela signifie que les tuiles ergotées apparaissent une fois sur deux le long d'une ligne sur deux (à une rotation près). On a donc bien montré que la tuile ergotée n'apparaît que sur une ligne sur deux et le long de cette ligne une fois sur deux, ou alors sur une colonne sur deux et le long de cette colonne une fois sur deux.

Considérons un pavage quelconque du plan par les tuiles de base. Nous allons essayer de voir ce qui se passe dans une direction à partir d'une croix, par exemple vers la droite, avant de rencontrer une autre croix. En général, une croix sera suivie d'une suite finie (éventuellement vide) de bras droits, d'un bras vertical, d'une suite finie (éventuellement vide) de bras gauches et finalement de la croix suivante. La seule exception se produit lorsque l'une des suites de bras est infinie.

Deux croix consécutives dans une même ligne ou colonne sont nécessairement face-à-face ou dos-à-dos. Considérons deux croix face-à-face, alors le bras vertical qui se trouve entre les deux croix pointe nécessairement vers le bas car il ne peut y avoir de flèche du côté de la queue de la flèche principale d'un bras. Un motif possible est celui de la figure 15. Chaque croix est nécessairement l'image de l'autre dans un miroir.

Considérons maintenant deux croix dos-à-dos. Le bras vertical qui se trouve au centre peut pointer aussi bien vers le haut que vers le bas et les deux croix

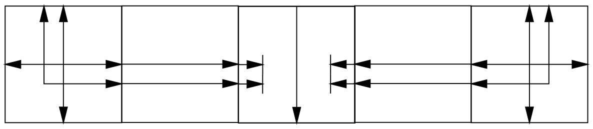

FIG. 15 - *Croix face-à-face*

n'ont plus nécessairement leurs doubles flèches verticales dans le même sens. Un motif possible est celui de la figure 16.

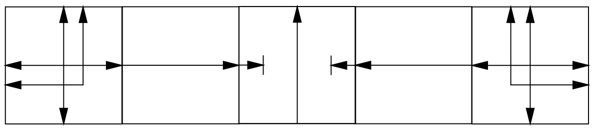

FIG. 16 - *Croix dos-à-dos*

La distance entre deux croix face-à-face est nécessairement impaire. En effet, supposons, par exemple, que les deux croix soient orientées vers le haut (voir figure 17) alors toutes les tuiles entre les deux croix ont des queues de flèche sur leur côté supérieur (ces tuiles sont soit des bras horizontaux soit des bras verticaux), on en déduit que les tuiles au dessus de ces tuiles sont nécessairement alternativement des croix et des bras vers le bas. La tuile au dessus de la croix de gauche (resp. droite) est nécessairement un bras vers la gauche (resp. droite) car cette tuile possède une queue à gauche (resp. droite) sur son côté inférieur, la tuile immédiatement à droite (resp. gauche) possède donc des têtes de flèche sur ses côtés bas et droites c'est donc une croix. Cette suite de croix et de bras vers le bas commence et termine obligatoirement par des croix. On a donc un nombre impair de tuiles entre nos deux croix face-à-face.

Considérons maintenant un pavage par des tuiles de Robinson, on a alors la contrainte selon laquelle sur une ligne sur deux, une tuile sur deux doit être une croix. Ces croix sont en fait la superposition d'une croix et d'une tuile ergotée, on les appellera des 1-carré.

Donnons-nous un 1-carré, alors il fait face à un autre 1-carré à deux unités de distance. Cette paire de croix et le bras entre les deux forment la ligne du dessus ou du dessous de la figure 18. La présence d'une croix est alors imposée au centre (mais son orientation ne l'est pas), et on obtient alors nécessairement la situation de la figure 18. Le 3-carré est imposé par chacun des 1-carrés qu'il a dans ses coins.

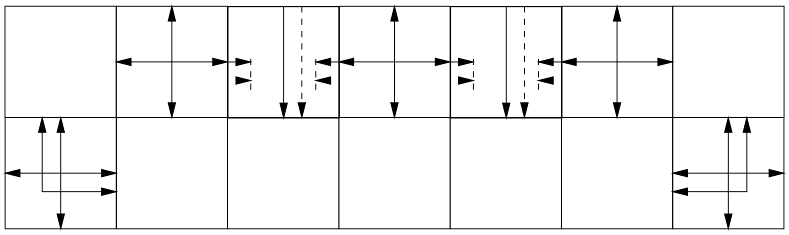

FIG. 17 - *Motif imposé par deux croix face-à-face*

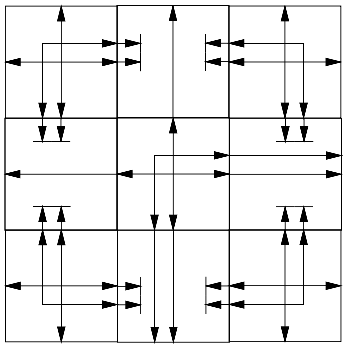

FIG. 18 - *Un 3-carré*

On peut étendre n'importe quel 3-carré dans la direction de sa croix centrale. Supposons que cette croix centrale soit orientée vers le haut et la droite. Le 3-carré peut être pris comme la partie inférieure gauche de la figure 19 et alors le seul moyen de compléter correctement est celui montré sur cette figure 19.

De même, on peut étendre un 7-carré dans la direction de sa croix centrale en un 15-carré, et ainsi de suite. On peut donc construire un $(2^n - 1)$-carré pour tout $n \in \mathbb{N}$. Du lemme 1.1, on déduit que l'on peut paver le plan.

Montrons que tous les pavages par les tuiles de base qui vérifient la contrainte des ergots sont non périodiques.

Prenons un pavage par les tuiles de base qui vérifie la contrainte. Chaque 1-carré de ce pavage détermine de façon unique le 3-carré, le 7-carré, le 15-carré, le 31-carré, etc. auquel il appartient. On en déduit que pour tout $n > 0$, il apparaît dans le pavage au moins un $2^n - 1$-carré (comme le pavage vérifie la contrainte, des 1-carrés y apparaissent, on prend un 1-carré, il détermine un $2^n - 1$-carré). Et donc il existe dans le pavage une croix qui fait face à une autre croix à la distance 2^n pour tout $n > 0$: elle est au centre d'un $2^n - 1$-carré. On en déduit que le pavage ne peut être périodique et que le jeu de tuiles de Robinson est apériodique.

Mais ce jeu de tuiles de Robinson n'est pas strictement un jeu de tuiles de Wang car le jeu de tuiles formé par les deux tuiles de la figure 12 n'en est pas un, mais on peut trouver un jeu de tuiles de Wang à peu près équivalent. Considérons le jeu de tuiles de la figure 20. C'est un jeu de tuiles de Wang si l'on considère que la couleur de chaque arête est l'ensemble des couples formés par la position et la direction des flèches qui sont sur cette arête. Si on appelle la première tuile de ce jeu tuile ergotée et les trois autres tuiles érodées, alors, les pavages par des tuiles de ce jeu vérifie la contrainte sur la tuile érodée énoncée ci-dessus et même plus car le seul pavage possible par ce nouveau jeu de tuiles est le pavage régulier de la figure 13.

Si l'on superpose les tuiles de base et les quatre tuiles précédentes de la façon suivante, on obtient alors un jeu de tuiles de Wang globalement équivalent au jeu de Robinson. On ne superpose sur la première tuile de la figure 20 (la tuile ergotée) que des croix. Alors il est inutile de superposer des croix sur les deuxième et troisième tuiles car deux croix ne peuvent être côte à côte. On superpose sur la dernière tuile toutes les tuiles de base. On obtient ainsi un jeu

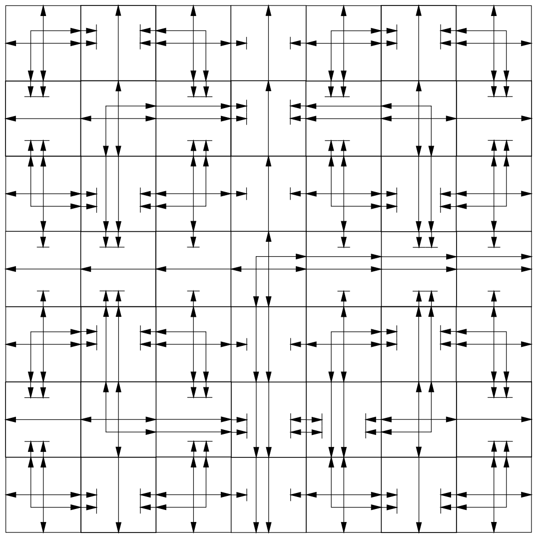

Fig. 19 - *Un 7-carré*

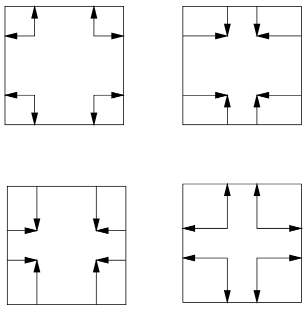

Fig. 20 -

de 56 tuiles. Le jeu ainsi obtenu est bien un jeu de tuiles de Wang. Il vérifie aussi la contrainte sur l'apparition de la croix puisqu'il vérifie même une contrainte plus forte. Comme le jeu de Robinson est apériodique, on en déduit que ce jeu l'est aussi. On a donc bien un jeu de 56 tuiles de Wang apériodique.

2.3 Preuve du théorème de Berger

L'idée de la démonstration est de trouver dans tous les pavages possibles à partir d'un certain jeu de tuiles des zones finies aussi grandes que l'on veut dans lequel on pourra effectuer des calculs d'une certaine machine de Turing. De telles zones seront appelées zones de calcul. On pourra paver une certaine zone de calcul si et seulement si le calcul de la machine de Turing ne s'arrête pas dans cette zone. Ainsi, on pourra paver toutes ces zones de calcul arbitrairement grandes si et seulement si cette machine de Turing ne s'arrête jamais.

Considérons de nouveau les pavages obtenus à partir des cinq tuiles de base (figure 10) en autorisant translations, rotations, et réflexions, mais en imposant la contrainte que la croix doit au moins apparaître dans une ligne sur deux et le long de cette ligne, une fois sur deux.

Comme nous l'avons montré dans le paragraphe 2.2, chaque $(2^{n+1}-1)$-carré a une croix en son centre et un (2^n-1)-carré en a un en chacun de ses coins. Aux centres de chacun des ces (2^n-1)-carrés, il y a 4 croix, chaque croix étant face à deux autres à la distance 2^n. Ces croix délimitent un carré de dimension extérieure 2^n+1 et de dimension intérieure 2^n-1. Ce carré sera appelé une bordure de taille 2^n ou une 2^n-bordure. Chaque paire de croix qui se font face à une distance de 2^n sont deux coins d'une 2^n-bordure.

La seule croix dans un $(2^{n+1}-1)$-carré qui n'est pas face à une autre croix de ce carré est celle qui est au centre. N'importe quelle autre croix détermine une 2^k-bordure avec $k \leq n$, et $k = n$ seulement pour la bordure décrite ci-dessus. Cette 2^n-bordure n'intersecte donc aucune autre 2^n-bordure, et la seule bordure plus grande qu'elle intersecte est la 2^{n+1}-bordure dont un des coins est le centre de la 2^n-bordure. On en déduit que deux bordures s'intersectent si et seulement si la taille de l'une est deux fois celle de l'autre. Pour chaque bordure, il existe une bordure deux fois plus grande et dont un des coins est le centre de la bordure que l'on s'est donnée. Inversement, si l'on a une bordure d'une taille supérieure à 4, alors chacun des coins de cette bordure est le centre d'une bordure de taille deux fois moindre.

Nous allons maintenant modifier les cinq tuiles de bases en coloriant les flèches décalées sur le côté en rouge ou en vert. Il y a une tuile qui n'est pas modifiée. On colorie les 4 autres en suivant les règles suivantes : sur une même tuile on doit utiliser au plus une couleur pour les flèches verticales (resp. horizontales) ; pour une croix, la même couleur doit être utilisée horizontalement et verticalement ; pour un bras, on doit utiliser deux couleurs différentes pour les flèches horizontales et les flèches verticales (la couleur d'un bras est celle de la flèche parallèle à sa flèche principale). On obtient ainsi 9 tuiles que l'on appelle les tuiles de base colorées.

Nous considérons maintenant les pavages du plan par des copies des tuiles de base colorées obtenues par translations, rotations et réflexions, qui vérifient la contrainte que la croix verte doit apparaître au moins dans une ligne sur deux et le long d'une telle ligne au moins une fois sur deux. Si l'on fait abstraction des couleurs, on obtient les mêmes pavages que précédemment.

Il est important de remarquer que chaque bordure est soit constituée de tuiles rouges, soit de tuiles vertes. La couleur d'une bordure est alors celle des tuiles qui la constitue. Deux bordures qui s'intersectent sont donc de couleurs différentes. La contrainte sur les croix vertes fait que les 2-bordures sont nécessairement vertes. On en déduit qu'une 2^n-bordure est verte si n est impair et rouge si n est pair.

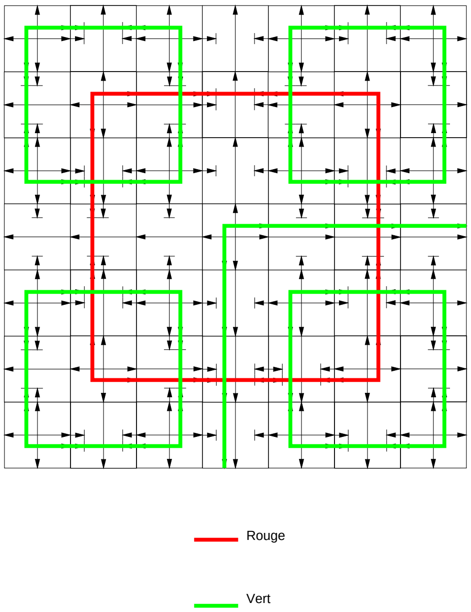

FIG. 21 - *Une 4-zone*

A partir d'un pavage du plan par les cinq tuiles de base vérifiant la contrainte sur la croix, on peut déduire un pavage du plan par les neuf tuiles de base colorées vérifiant la contrainte sur la croix verte. Il suffit de colorier les bordures 2^n avec du vert quand n est impair et avec du rouge quand n est pair. Si, en dehors de toute bordure, il y a un ou deux corridors de bras ayant des flèches décalées, on les colorie indifféremment avec l'une des deux couleurs.

On ne considère maintenant plus que les bordures rouges. Elles ont des tailles de la forme 4^n. Deux bordures rouges ne peuvent s'intersecter. Chaque pavage contient une suite finie arbitrairement longue de bordures de taille 4, 4^2, 4^3, ..., 4^n, chaque bordure étant incluse dans la suivante.

La région à l'intérieur d'une bordure mais à l'extérieur de toutes les bordures contenues dans cette bordure sera appelée une zone. Dans une zone, nous allons nous intéresser aux lignes et aux colonnes libres ; ce sont les lignes ou les colonnes qui traversent la zone de part en part sans jamais traverser les zones qu'elle contient.

Il y a 2^n+1 colonnes et lignes libres dans une (4^n-1)-zone. En effet, soit F_n le nombre de colonnes (ou lignes) libres dans une (4^n-1)-zone. Les positions

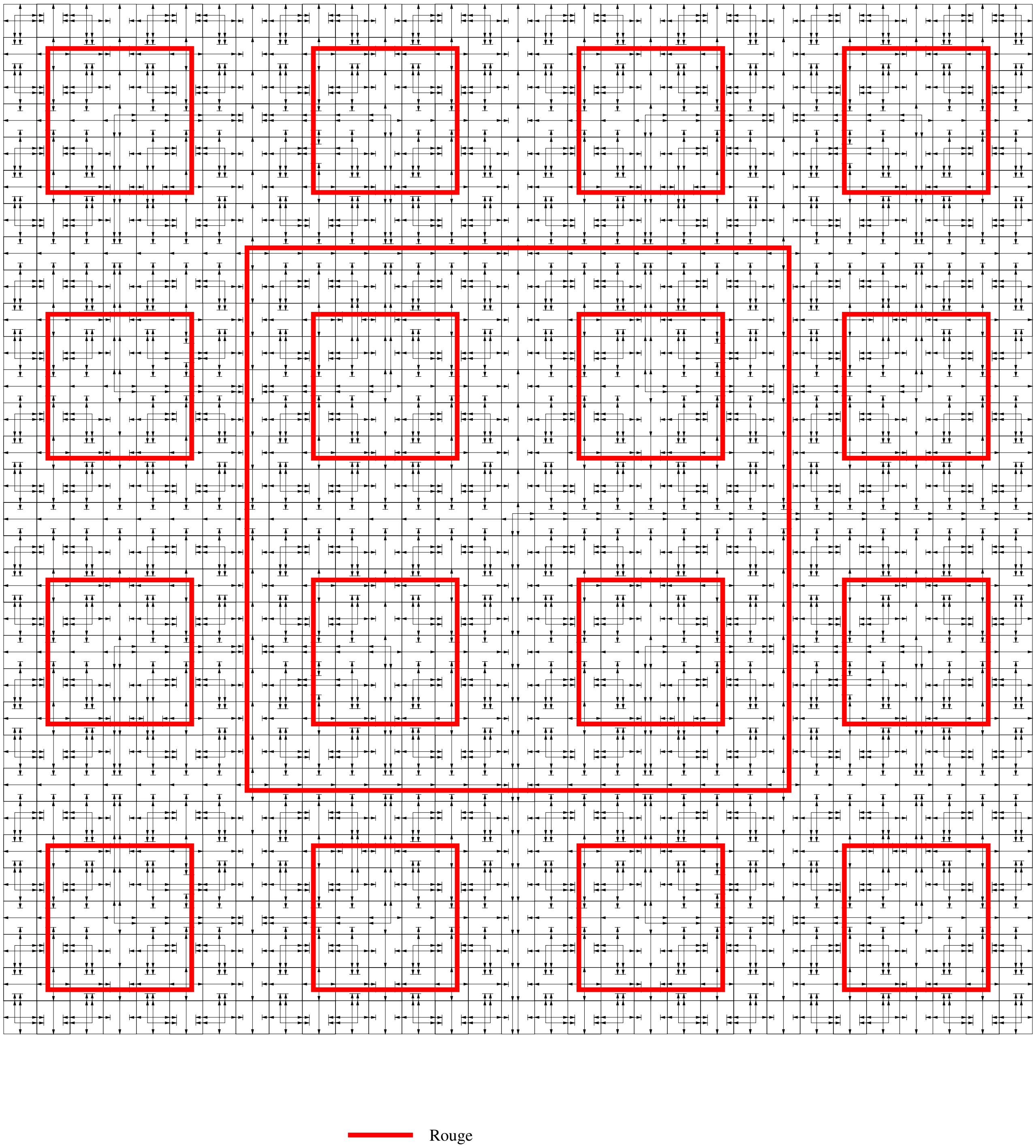

FIG. 22 - *Une 16-zone*

des 4^k-bordure se répètent avec une période $2 \cdot 4^k$. Ainsi le motif des colonnes et lignes libres d'une $(4^{n-1} - 1)$-zone se retrouve au centre d'une $(4^n - 1)$-zone. Si l'on enlève la colonne centrale, les deux demi-motifs se retrouvent sur les côtés. On en déduit $F_n = 2F_{n-1} - 1$. Comme $F_1 = 3$, on a $F_n = 2^n + 1$.

Pour localiser les colonnes libres, nous allons utiliser un nouveau marquage. Nous allons voir ce marquage comme un signal se propageant le long des lignes et des colonnes, le signal d'obstruction. Ce signal sera émis et absorbé par les bordures rouges. Plus particulièrement, une arête extérieure d'une tuile d'une bordure peut émettre ou absorber un signal, alors qu'une arête intérieure ne peut qu'absorber un signal.

Il apparaît alors clairement qu'une ligne (resp. colonne) est libre si et seulement si aucun signal d'obstruction ne la traverse horizontalement (resp. verticalement). En effet si une tuile est dans une ligne libre, alors les arêtes des bordures les plus proches de cette tuile à droite comme à gauche sont toutes deux intérieures. Donc aucun signal d'obstruction horizontal ne peut la traverser. Réciproquement, si une tuile est dans une colonne non libre, cela signifie que l'arête de la bordure la plus proche de cette tuile à droite ou à gauche est extérieure et donc un signal d'obstruction peut aller de l'une des arêtes à l'autre.

Donnons-nous une machine de Turing, sur chaque tuile libre (*i.e.* qui ne contient aucun signal d'obstruction). Nous allons superposer chacun des signaux de Turing des figures 2 à 4. Les tuiles qui sont libres dans une seule direction transmettront les signaux de Turing inchangés dans cette direction. Une 4^n-zone se comporte alors comme un carré de taille $2^n - 1$, les colonnes et lignes libres étant contiguës. Nous imposons de plus que tout bras horizontal avec un marquage rouge horizontal en dessous de son centre qui n'absorbe pas un signal d'obstruction sur son arête supérieure émet sur cette arête le signal de Turing s_0. De même, tout bras vertical avec un marquage rouge horizontal en dessous de son centre qui n'absorbe pas un signal d'obstruction sur son arête supérieure émet sur cette arête le signal de Turing $q_0 s_0$. Nous imposons ainsi que la tuile au centre de la bordure inférieure d'une zone émet sur son arête supérieure le signal $q_0 s_0$ et que toutes les autres tuiles en bas d'une colonne libre émettent sur leurs arêtes supérieures le signal s_0. De plus, nous marquons les autres tuiles des parties gauche, droite et supérieure de la bordure de telle façon qu'elles puissent absorber n'importe quel signal de Turing sur leurs arêtes intérieures.

Sous ces conditions, on peut paver des zones arbitrairement grandes si et seulement si la machine de Turing ne s'arrête pas. On a donc obtenu un jeu de tuiles qui pave le plan si et seulement si cette machine de Turing ne s'arrête pas. On a donc bien démontré le théorème de Berger.

Nous pouvons aussi déduire de cette construction le résultat suivant :

Théorème 2.5 (Gurevich et Koriakov [3]) *Le problème du pavage périodique du plan est indécidable.*

En effet, nous allons modifier le jeu de tuiles précédent de telle sorte qu'il pave le plan périodiquement si et seulement si la machine de Turing correspondante s'arrête.

On autorise maintenant un signal $q_f s_i$ (où $q_f \in Q_f$) à se propager jusqu'à ce qu'il rencontre une bordure rouge. Ce signal est alors absorbé par la bordure mais cette absorption entraîne l'émission de deux signaux violets le long de la bordure rouge, un vers la gauche et un vers la droite. Ces deux signaux se propagent jusqu'à arriver en sens contraire au coin bas gauche de la bordure où ils fusionnent.

Un signal violet ne peut être traversé par aucun autre signal. Prenons une tuile comportant un signal violet vertical (ou horizontal), alors le côté intérieur de la tuile comporte les signaux habituels (ceux modélisant les encoches et ergots, les signaux d'obstruction et les signaux de Turing) alors que le côté extérieur est entièrement vierge. Dans un coin, si un signal violet entre à droite et sort en bas, alors la seule couleur que porteront les côtés haut et gauche sera la couleur bleue.

On délimite ainsi un rectangle dont les côtés sont blancs et les coins bleus si et seulement si la machine s'arrête. Si on a ce rectangle, le seul moyen de le compléter en un pavage du plan est de le reproduire pour paver le plan périodiquement. De plus si la machine ne s'arrête pas on retrouve le pavage apériodique vu plus haut.

Le jeu de tuiles ainsi formé donne un pavage apériodique si et seulement si la machine de Turing ne s'arrête pas et un pavage périodique si et seulement si elle s'arrête. Le problème du pavage périodique du plan est donc indécidable.

3 Périodicité et quasipériodicité

On sait donc d'après les théorèmes 2.1 et 2.2 qu'il existe des jeux de tuiles apériodiques. On en a même exhibé un dans la partie 2.2. Les jeux de tuiles apériodiques ont intéressé beaucoup de logiciens, physiciens théoriciens, géomètres, et il y a eu une sorte de compétition pour réduire leur taille. Le jeu de Berger comporte 20426 tuiles et celui de Robinson 56 tuiles. Le record est actuellement détenu par Kari et Čulik qui ont exhibé dans [4] un jeu apériodique de 13 tuiles dont nous allons voir la construction dans la partie 3.1.

Dolbilin a démontré un résultat dans [2] concernant le lien entre la cardinalité de l'ensemble des pavages que donne un jeu de tuiles fixé et la périodicité d'un des pavages obtenu par ce jeu de tuiles. Il a affirmé dans un cadre plus général que celui des tuiles de Wang que si l'ensemble des pavages donnés par un certain jeu de tuiles est au plus dénombrable, alors ce jeu de tuiles donne au moins un pavage périodique. Nous allons voir dans la partie 3.2 une démonstration plus simple de ce résultat dans le cadre particulier des pavages par des tuiles de Wang.

Il est intéressant de noter que la plupart des jeux de tuiles apériodiques exhibés, comme celui de Robinson par exemple, donne toujours des pavages qui ont une certaine forme de régularité. Cela nous a amené à nous pencher sur le problème de la quasipériodicité qui est une forme de régularité qui généralise la notion de périodicité. Nous nous attarderons donc sur cette notion dans la partie 3.3.

3.1 Le jeu de tuiles apériodique de Kari et Čulik

Soit r un réel, on notera par $\lfloor r \rfloor$ sa partie entière. Pour mener à bien notre preuve nous allons introduire une représentation particulière des réels, la représentation équilibrée. Soit α un réel, on introduit d'abord la suite bi-infinie d'entiers $A(\alpha)$ constituée des parties entières des multiples de α :

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad A(\alpha)_i = \lfloor i \cdot \alpha \rfloor.$$

On définit alors la suite bi-infinie $B(\alpha)$ par

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad B(\alpha)_i = A(\alpha)_i - A(\alpha)_{i-1}.$$

Cette suite bi-infinie sera appelée la représentation équilibrée de α. Cette représentation équilibrée est en fait une suite de deux entiers, en effet, si $k \leq \alpha \leq k+1$ alors $B(\alpha)$ est une suite de k et de $k+1$. De plus, les moyennes des sous-suites finies de $B(\alpha)$ tendent vers α quand les longueurs de ces sous-suites tendent vers l'infini. On a par exemple :

$$\begin{aligned} B(1.5) &= \ldots 121212\ldots \\ B(\frac{1}{3}) &= \ldots 001001\ldots \\ B(\frac{8}{3}) &= \ldots 223223\ldots \end{aligned}$$

Nous allons maintenant introduire des machines séquentielles qui définissent des relations sur des chaînes de caractères bi-infinies. Nous les utiliserons pour multiplier des réels en représentation équilibrée et plus tard nous montrerons qu'elles sont isomorphes à des jeux de tuiles.

Une machine séquentielle est un quadruplet $M = (K, \Sigma, \Delta, \gamma)$ où K est l'ensemble des états, Σ est l'alphabet d'entrée, Δ est l'alphabet de sortie, et $\gamma \subset K \times \Sigma \times \Delta \times K$ est l'ensemble des transitions. La machine M peut être représentée par un graphe orienté étiqueté avec pour sommets les éléments de K et avec une arête du sommet q vers le sommet p étiquetée par (a, b) pour chaque (q, a, b, p) dans γ.

La machine M calcule une relation $\rho(M)$ entre des suites bi-infinies de symboles. Une suite bi-infinie x sur un ensemble S est une fonction $x : \mathbb{Z} \to S$. On notera $x(i)$ par x_i. Des suites bi-infinies x et y respectivement sur les alphabets d'entrée et de sortie sont en relation par $\rho(M)$ si et seulement s'il existe une suite bi-infinie s d'états de M telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il y a une transition de s_{i-1} vers s_i étiquetée par (x_i, y_i).

Pour un rationnel positif donné $q = \frac{n}{m}$, construisons une machine séquentielle M_q qui multiplie un réel en représentation équilibrée $B(\alpha)$ par q. Les états de M_q représenteront toutes les valeurs possibles de $q\lfloor r \rfloor - \lfloor qr \rfloor$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Comme

$$q\lfloor r \rfloor - 1 \leq qr - 1 < \lfloor qr \rfloor \leq qr < q(\lfloor r \rfloor + 1),$$

on a

$$-q < q\lfloor r \rfloor - \lfloor qr \rfloor < 1.$$

Comme les valeurs possibles de $q\lfloor r\rfloor - \lfloor qr\rfloor$ sont des multiples de $\frac{1}{m}$, elles sont parmi les $n+m-1$ éléments de

$$S = \{-\frac{n-1}{m}, -\frac{n-2}{m}, ..., \frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m}\}.$$

On choisit S comme ensemble des états de M_q.

Construisons maintenant les transitions de M_q. Il y a une transition de l'état $s \in S$ avec le symbole d'entrée a et le symbole de sortie b vers l'état $s + qa - b$ si un tel état existe. S'il n'y a pas d'état $s + qa - b$ alors aucune transition de s avec l'étiquette (a, b) n'est nécessaire. Après avoir lu les entrées $...B(\alpha)_{i-2}B(\alpha)_{i-1}$ et écrit les sorties $...B(q\alpha)_{i-2}B(q\alpha)_{i-1}$, la machine est dans l'état $s_{i-1} = qA(\alpha)_{i-1} - A(q\alpha)_{i-1} \in S$. Sur l'entrée du symbole $B(\alpha)_i$, la machine sort $B(q\alpha)_i$ et passe dans l'état

$$\begin{aligned} s_{i-1} + qB(\alpha)_i - B(q\alpha)_i &= qA(\alpha)_{i-1} + qB(\alpha)_i - (A(q\alpha)_{i-1} + B(q\alpha)_i) \\ &= qA(\alpha)_i - A(q\alpha)_i \\ &= s_i \in S \end{aligned}$$

La machine est construite de telle façon que cette transition est possible. Cela montre que si $B(\alpha)$ est une suite sur les symboles d'entrée et $B(q\alpha)$ une suite sur ceux de sortie, alors $B(\alpha)$ et $B(q\alpha)$ sont en relation par $\rho(M_q)$.

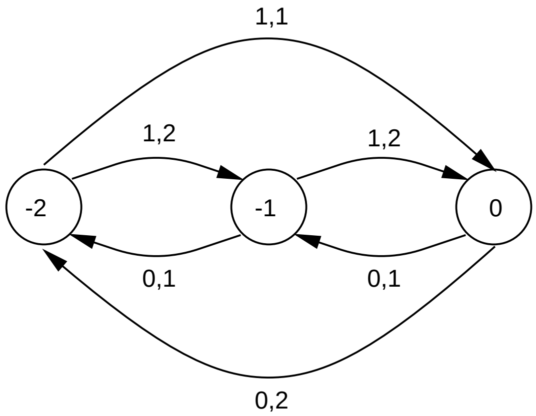

FIG. 23 - *La machine séquentielle M_3.*

La machine séquentielle M_3 de la figure 23 est construite de cette façon pour multiplier par 3, en utilisant $\{0, 1\}$ comme alphabet d'entrée et $\{1, 2\}$ comme alphabet de sortie. Cela signifie que $B(\alpha)$ et $B(3\alpha)$ sont en relation par $\rho(M_3)$ pour tout réel α vérifiant $0 \leq \alpha \leq 1$ et $1 \leq 3\alpha \leq 2$, c'est à dire, pour tout réel $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. De même, $M_{\frac{1}{2}}$, représentée sur la figure 24, est construite avec $\{0, 1, 2\}$ comme alphabet d'entrée et $\{0, 1\}$ comme alphabet de sortie. $B(\alpha)$ et $B(\frac{1}{2}\alpha)$ sont en relation par $\rho(M_{\frac{1}{2}})$ pour tout $\alpha \in [0, 2]$.

Notre but est d'itérer les machines M_3 et $M_{\frac{1}{2}}$ en empêchant $M_{\frac{1}{2}}$ d'être utilisée plus de deux fois consécutives. Pour cela, il faut modifier $M_{\frac{1}{2}}$ en introduisant un nouveau symbole d'entrée/sortie 0' et en changeant son diagramme en celui de la figure 25. La machine ainsi obtenue est appelée $M'_{\frac{1}{2}}$. On renomme aussi 0'

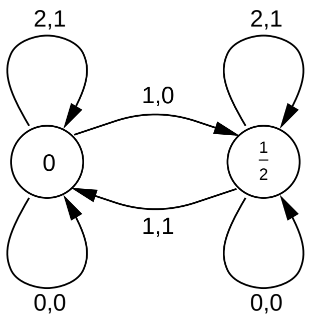

FIG. 24 - *La machine séquentielle* $M_{\frac{1}{2}}$.

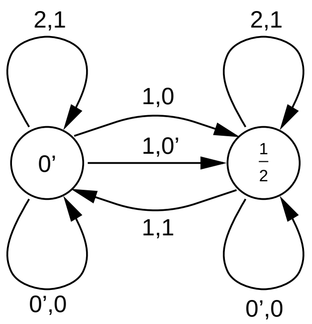

FIG. 25 - *La machine séquentielle* $M'_{\frac{1}{2}}$.

l'état 0 pour que les ensembles des états de M_3 et $M'_{\frac{1}{2}}$ soient disjoints. Ainsi, on peut considérer la réunion de M_3 et $M'_{\frac{1}{2}}$ comme une seule machine séquentielle M.

Il suffit maintenant de construire une bijection entre les jeux de tuiles et les machines séquentielles qui traduit les propriétés des jeux de tuiles en des propriétés des calculs des machines séquentielles.

Un jeu T de tuiles dont les arêtes gauche et droite sont dans C_{gd} et les arêtes haut et bas sont dans C_{hb} sera représenté par la machine séquentielle $M = (C_{gd}, C_{hb}, C_{hb}, \gamma)$ où $(s, a, b, t) \in \gamma$ si et seulement si la tuile (s, a, b, t) est dans T (voir figure 26).

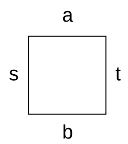

FIG. 26 - *La tuile* (s, a, b, t) *correspondant à la transition* $s \xrightarrow{a,b} t$

Deux suites bi-infinies x et y sont en relation par $\rho(M)$ si et seulement s'il existe une ligne de tuile dont les arêtes supérieures forment la suite x et les arêtes inférieures la suite y. Ainsi il y a une bijection entre les pavages du plan et les itérations bi-infinies de la machine séquentielle sur des suites bi-infinies.

Nous dirons que la tuile de la figure 26 multiplie par q si $aq + s = b + t$.

Notons T_3 et $T_{\frac{1}{2}}$ les jeux de tuiles représentant les machines M_3 et $M'_{\frac{1}{2}}$.

Les tuiles de T_3 (resp. $T_{\frac{1}{2}}$) multiplient par 3 (resp. par $\frac{1}{2}$). Le jeu de tuiles $T_{13} = T_3 \cup T_{\frac{1}{2}}$ contient les 13 tuiles de la figure 27.

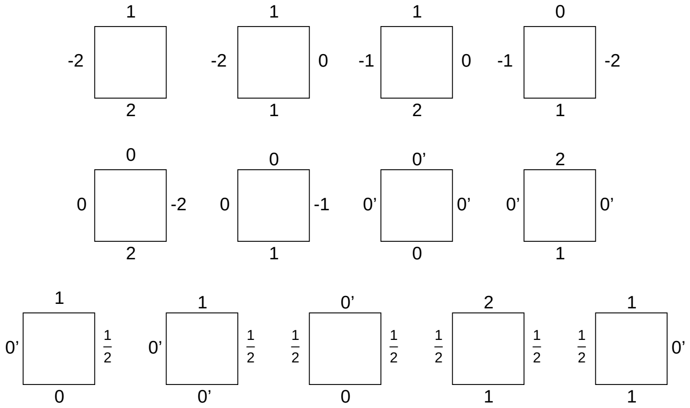

FIG. 27 - *Un jeu apériodique de 13 tuiles*

Théorème 3.1 (Kari-Čulik) *Le jeu de tuiles T_{13} est apériodique.*

Preuve. Montrons d'abord que l'on peut paver le plan avec des tuiles de T_{13}. A partir d'une entrée $B(\alpha)$ pour $\alpha \in [\frac{1}{3}, 2]$, la machine séquentielle M calcule $B(3\alpha)$ si $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $B(\frac{\alpha}{2})$ si $\alpha \in [\frac{2}{3}, 2]$. Dans les deux cas la machine peut être appliquée à nouveau en prenant pour entrée la sortie précédente, et ce, autant de fois que l'on veut. Inversement, si $\alpha \in [\frac{1}{3}, 2]$ alors il existe une entrée $B(\frac{\alpha}{3})$ ou $B(2\alpha)$ qui est en relation par $\rho(M)$ avec $B(\alpha)$. On choisit comme entrée $B(\frac{\alpha}{3})$ si $\alpha \geq 1$ et $B(2\alpha)$ si $\alpha \leq 1$. On peut ainsi itérer autant de fois la « réciproque » de M. On en déduit que l'on peut construire un pavage du plan par des tuiles de T_{13} à partir de n'importe quelle suite bi-infinie $B(\alpha)$ avec $\alpha \in [\frac{1}{3}, 2]$.

Montrons maintenant qu'aucun de ces pavages peut être périodique. Supposons en effet que l'on ait un pavage périodique f de période horizontale a et de période verticale b. On peut vérifier qu'il n'y a pas de pavages pour $b = 1$ ou 2. On peut donc supposer que $b \geq 3$. Comme au plus deux lignes successives de tuiles peuvent être constituées de tuiles de $T_{\frac{1}{2}}$, on peut supposer que la ligne 0 est faite de tuiles de T_3. Notons n_i la somme des couleurs des arêtes supérieures des tuiles $f(1, i)$, $f(2, i)$, ..., $f(a, i)$. Comme a est la période horizontale de f, la couleur de l'arête gauche de $f(1, i)$ est la même que celle de la tuile $f(a, i)$ et donc $n_{i+1} = q_i n_i$ où $q_i = 3$ si les tuiles de la ligne i sont dans T_3 et $q_i = \frac{1}{2}$ si elles sont dans $T_{\frac{1}{2}}$. Comme b est la période verticale de f,

$$n_0 = n_b = q_0 q_1 ... q_{b-1} \cdot n_0 \ .$$

Comme des tuiles de T_3 sont utilisées dans la ligne 0 et comme il n'y a pas de 0 sur les arêtes supérieures des tuiles de T_3, alors $n_0 \neq 0$. On a donc $q_0 q_1 ... q_{b-1} = 1$, ce qui est impossible car un produit de 3 et de $\frac{1}{2}$ ne peut valoir 1.

Le jeu T_{13} est donc apériodique. $\square$

3.2 Cardinalité d'une famille de pavages et périodicité

Dans cette partie, nous démontrons, dans le cadre des pavages par des tuiles de Wang, le résultat de Dolbilin (théorème 3.2) qui dit que si l'ensemble des pavages donnés par un certain jeu de tuiles est au plus dénombrable, alors ce jeu de tuiles donne au moins un pavage périodique. Dans le même genre d'idées, nous donnons un résultat légèrement plus fort que celui de Dolbilin, le théorème 3.3, qui dit que si on a un jeu de tuiles et un motif qui apparaît dans un nombre au plus dénombrable de pavages obtenus à partir de ce jeu de tuiles, alors un des pavages donnés par ce jeu est périodique.

Soit T un ensemble de tuiles de Wang, soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des pavages du plan obtenus (à une translation près) avec des tuiles de T. On appelle k-carré un carré bien pavé de taille $(2k+1) \times (2k+1)$. On note $\mathcal{C}_f^k$ l'ensemble des k-carrés qui apparaissent dans le pavage f et $\mathcal{C}_\mathcal{T}^k$ l'ensemble des k-carrés qui apparaissent dans un pavage de $\mathcal{T}$. Un s-carré C^s est stable si et seulement si pour tous points P, P' où C^s apparaît, on a :

$$\forall k \geq s \quad (C^k \text{ apparaît en } P \iff C^k \text{ apparaît en } P')$$

Soient k, l deux entiers tel que $k < l$ et C^k,C^l deux carrés, $C^k \prec C^l$ si et seulement s'il existe un point P tel que C^k et C^l apparaissent en P.

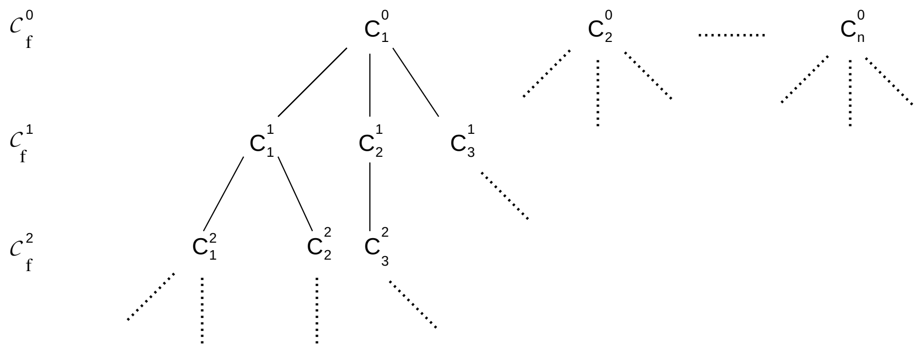

FIG. 28 - *La forêt G_f d'un pavage f.*

Introduisons le graphe orienté infini G_f dont les sommets sont dans $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_\mathcal{T}^k$. Il y a une arrête de C^k vers C^l si et seulement si $l = k+1$ et $C^k \prec C^l$. Le graphe orienté G_f est une forêt finie d'arbres infinis dont les racines sont les tuiles de T apparaissant dans f (figure 28). Le sous-arbre au dessous d'un carré stable dans G_f est une chaîne infinie sans branches.

Lemme 3.1 *Si f' est un pavage extrait de f alors le graphe $G_{f'}$ est un sous-graphe de G_f.*

Preuve. A partir de chaque chaîne infinie dans G_f, on peut construire un pavage f' extrait de f dont le graphe contient cette chaîne. Inversement à partir de chaque pavage extrait de f, on peut construire une chaîne infinie incluse dans G_f. □

Lemme 3.2 *Supposons que $\mathcal{T}$ est au plus dénombrable. Soit $f \in \mathcal{T}$. Alors il y a un nombre dénombrable de chaînes infinies dans G_f.*

Preuve. Supposons qu'il existe un pavage f tel qu'il existe un nombre non dénombrable de chemins dans G_f. Considérons une famille $(c_x)_{x\in\mathbb{R}}$ de chemins distincts dans G_f :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad c_x = C_x^0 \prec C_x^1 \prec \ldots \prec C_x^k \prec \ldots$$

A partir de chaque chaîne c_x, on peut construire un pavage f_x par le procédé d'extraction diagonale. Ce pavage est nécessairement égal, à une translation près, à un autre pavage de $\mathcal{T}$. Soit ϕ la fonction qui à x associe le couple formé par cet autre pavage et par la translation qui permet de passer de f_x à ce pavage. La fonction ϕ va de $\mathbb{R}$ dans un ensemble dénombrable, elle est donc nécessairement non injective. Donc il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$ et $\phi(x) = \phi(y)$ alors on a $\forall k \in \mathbb{N} \quad C_x^k = C_y^k$ soit $c_x = c_y$. On arrive donc a une contradiction car toutes les chaînes c_x étaient distinctes. $\square$

Corollaire 3.1 *Supposons que $\mathcal{T}$ est au plus dénombrable. Soit $f \in \mathcal{T}$. Alors pour tout carré $C^k \in \mathcal{C}_f^k$, il existe un carré stable $C^s \in \mathcal{C}_f^s$ tel que $C^k \prec C^s$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un pavage f et un carré $C^k \in \mathcal{C}_f^k$ qui n'admet pas d'extension stable. Alors pour un carré C^l tel que $C^k \prec C^l$, il existe deux carrés distincts C^{l+1} et C'^{l+1} tel que $C^l \prec C^{l+1}$ et $C^l \prec C'^{l+1}$. Ceci implique que C^k a une infinité non dénombrable de chaînes d'extensions distinctes : $C^k \prec C^{k+1} \prec \ldots \prec \ldots$ ce qui est en contradiction avec le résultat du lemme 3.2. $\square$

Lemme 3.3 *Si un carré C^s stable apparaît une seule fois dans un pavage f, alors on peut construire un pavage f' extrait de f où C^s n'apparaît pas.*

Preuve. Comme C^s apparaît une seule fois dans f, on peut construire des motifs carrés de plus en plus grands qui ne contiennent pas C^s. Appliquons le procédé d'extraction diagonale à cette famille de motifs (*cf.* la démonstration du lemme 1.1). On obtient alors un pavage f' où C^s n'apparaît pas. Soit $C^k \in \mathcal{C}_{f'}^k$, alors il existe un motif carré de f qui contient C^k et donc $C^k \in \mathcal{C}_f^k$. $\square$

Remarque. Soit $C^k \in \mathcal{C}_{f'}^k$, alors il existe un motif carré de f qui contiennent C^k et donc $C^k \in \mathcal{C}_f^k$. La forêt $G_{f'}$ est alors une sous-forêt de G_f : $G_{f'} \subset G_f$. On en déduit que si C est stable pour f et apparaît dans f' alors C est stable pour f'.

Lemme 3.4 *Si $\mathcal{T}$ est au plus dénombrable, il existe un pavage et un carré stable dans ce pavage qui apparaît au moins deux fois.*

Preuve. Soit f un pavage et G_f son graphe associé. S'il existe un carré stable de f qui apparaît au moins deux fois alors le lemme es vérifié ; considérons donc le cas où toutes les classes stables de f apparaissent une seule fois dans f. On construit alors une suite de pavages (f_α) indexée par des ordinaux.

- $f_0 = f$

- si α a un prédécesseur et si tous les carrés stables de $f_{\alpha-1}$ n'apparaissent qu'une seule fois dans $f_{\alpha-1}$ alors f_α est le pavage obtenu en appliquant le lemme 3.3 au pavage $f_{\alpha-1}$ et à son carré stable de profondeur minimale dans le graphe $G_{f_{\alpha-1}}$ (on sait que ce carré existe d'après le corollaire 3.1).

- si α est un ordinal limite et si f_β est défini pour tout $\beta < \alpha$, alors f_α est le point d'accumulation de la famille $(f_\beta)_{\beta<\alpha}$ dont le graphe est $G_{f_\alpha} \subset \bigcap_{\beta<\alpha} G_{f_\beta}$.

Supposons que $f_{\aleph_1}$ soit défini, alors $G_{f_{\aleph_1}} \neq \emptyset$. Lorsque l'on passe de $G_{f_{\alpha-1}}$ à G_{f_α} on enlève au moins un sommet. Pour passer de f à $f_{\aleph_1}$ on a donc enlevé un nombre non dénombrable de sommets, ce qui signifie que l'on a un nombre non dénombrable de sommets dans G_f, ce qui est en contradiction avec le fait qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de chemins dans G_f (lemme 3.2). Donc il existe $\beta < \aleph_1$ tel que f_β ait un carré stable qui apparaît 2 fois. □

Théorème 3.2 *Si $\mathcal{T}$ est au plus dénombrable, il existe un pavage de $\mathcal{T}$ qui est périodique.*

Preuve. Comme $\mathcal{T}$ est au plus dénombrable, il existe un pavage $f \in \mathcal{T}$ et un carré C stable dans f qui apparaît en deux points distincts P, Q. Alors comme C est stable, la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$ laisse invariant le pavage. On sait d'après le théorème 1.1 qu'il existe alors un pavage périodique. □

La réciproque de ce théorème est bien sûr fausse. En effet, il suffit de prendre un jeu de tuiles apériodique, celui de Kari et Čulik par exemple, et d'y ajouter un jeu de tuiles donnant au moins un pavage périodique, une tuile blanche par exemple. On a alors un jeu de tuiles donnant un nombre non dénombrable de pavages mais dont l'un d'eux est périodique. Ceci nous amène à affiner le résultat précédent pour tenir compte de ce genre de cas de figure. On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 3.3 *Si un motif M apparaît dans un nombre au plus dénombrable (mais non nul) de pavages de $\mathcal{T}$, alors il existe un pavage de $\mathcal{T}$ qui est périodique.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{T}$ un pavage où M apparaît. Supposons que M soit un k-carré. Considérons le sous-arbre G_f^M de G_f de racine M. Comme il existe un nombre au plus dénombrable de pavages contenant M on sait qu'il y a un nombre au plus dénombrable de chaînes infinies dans ce sous-arbre G_f^M. Il suffit de reprendre la démonstration du lemme 3.2 en ne considérant que le sous-arbre issu de M. On en déduit alors que pour tout carré $C^k \in \mathcal{C}_f^k$ tel que $M \prec C^k$, il existe un carré stable C^s tel que $C^k \prec C^s$ (*cf.* la démonstration du corollaire 3.1). On va essayer de construire un pavage de $\mathcal{T}$ qui contienne M et qui possède un carré stable contenant M qui apparaisse deux fois. Si f satisfait cette propriété, on a notre pavage, sinon on construit une suite de pavages (f_α) indexée par des ordinaux.

- $f_0 = f$

– si α a un prédécesseur et si tous les carrés stables de $f_{\alpha-1}$ n'apparaissent qu'une seule fois dans $f_{\alpha-1}$ alors il existe un carré stable C_α tel que $M \prec C_\alpha$ et qui est minimal (au sens de la profondeur) pour cette propriété. f_α est le pavage obtenu en appliquant le lemme 3.3 au pavage $f_{\alpha-1}$ et au carré stable C_α.

– si α est un ordinal limite et si f_β est défini pour tout $\beta < \alpha$, alors f_α est le point d'accumulation de la famille $(f_\beta)_{\beta<\alpha}$ contenant M dont le graphe est $G_{f_\alpha} \subset \bigcap_{\beta<\alpha} G_{f_\beta}$.

Supposons que $f_{\aleph_1}$ soit défini, alors $G^M_{f_{\aleph_1}} \neq \emptyset$. Lorsque l'on passe de $G^M_{f_{\alpha-1}}$ à $G^M_{f_\alpha}$ on enlève au moins un sommet. Pour passer de f à $f_{\aleph_1}$ on a donc enlevé un nombre non dénombrable de sommets ; ce qui signifie que l'on a un nombre non dénombrable de sommets dans G^M_f, ce qui est en contradiction avec le fait qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de chemins issus de M. Donc il existe $\beta < \aleph_1$ tel que f_β a un carré stable contenant M qui apparaît 2 fois. On en déduit que l'on peut construire un pavage périodique contenant M. □

3.3 Quasipériodicité

Nous introduisons donc une généralisation de la notion de périodicité qu'est la quasipériodicité et que nous définissons ci-dessous. Le résultat important que nous démontrons dans cette partie est le théorème 3.4 qui dit que tout jeu de tuiles donne au moins un pavage quasipériodique. Cela signifie que pour un jeu de tuiles donné, il existe toujours un pavage présentant une certaine régularité.

Définition 3.1 *Un pavage est* quasipériodique *si et seulement si pour tout motif apparaissant dans le pavage, il existe un entier N tel que tout carré de taille $N \times N$ contient ce motif.*

Un pavage est alors non quasipériodique si et seulement s'il existe un motif tel que pour tout entier N, il existe un carré de taille $N \times N$ qui ne contient pas ce motif. Un tel motif est appelé motif critique.

Lemme 3.5 *Soit T un jeu de tuiles et f un pavage non quasipériodique dont un des motifs critiques est A, alors il existe un pavage f_A avec des tuiles de T dans lequel le motif A n'apparaît pas.*

Preuve. D'après la définition, si f est non quasipériodique alors il existe une famille de carrés de taille $n \times n$ pour $n \in \mathbb{N}$ qui ne contiennent pas le motif A. En appliquant le processus d'extraction diagonale à cette famille de carrés, on obtient un pavage du plan avec des tuiles de T qui ne contient pas le motif A (*cf.* la démonstration du lemme 1.1). □

Lemme 3.6 *Soit f un pavage non quasipériodique, A un motif critique de a, et B un motif qui ne contient pas A. On a alors les propriétés suivantes :*

(i) *si B apparaît dans f_A, alors il apparaît dans f,* *(ii) si B est critique dans f_A, alors il l'est dans f.*

Preuve. Si B apparaît dans f_A, cela signifie qu'il existe un carré de a qui contient B et donc B apparaît dans f. On a donc (i). Si B est critique dans f_A, alors B apparaît dans f (d'après (i)) et si $N \in \mathbb{N}$, il existe un carré de taille $N \times N$ dans f_A où B n'apparaît pas ; or ce carré, d'après (i), apparaît aussi dans f. On en déduit que B est critique pour f. □

Théorème 3.4 *Tout jeu de tuiles donne au moins un pavage quasipériodique.*

Preuve. Soit T un jeu de tuiles qui n'admet que des pavages non quasipériodiques. Considérons un pavage f par des tuiles de T, ce pavage est non quasipériodique. Considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des motifs critiques minimaux de f (qui ne contiennent aucun autre motif critique) : cet ensemble est au plus dénombrable (car l'ensemble des motifs est dénombrable). Considérons une énumération récursive et croissante avec la taille des motifs de $\mathcal{A}$: $A_1, ..., A_n, ...$ Construisons la suite :

$$\begin{aligned} f_0 &= f \\ f_n &= f_{n-1_{A_{F(n-1)}}} \end{aligned}$$

où $F(n) = \min(k|A_k$ critique dans $a_n)$. On a $F(0) = 1$ et $F(n) \geq n + 1$.

Supposons que $\mathcal{A}$ est fini de cardinal N, alors la suite (f_n) a au plus N éléments. Le dernier pavage de la suite ne contient aucun des A_k, il ne peut donc pas être non quasipériodique (Lemme 3.6). $\mathcal{A}$ est donc nécessairement infini.

Soit ϕ un point d'accumulation de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ϕ est un pavage convenable du plan avec des tuiles de T. Supposons que ϕ soit non quasipériodique. Soit B un motif critique de ϕ. Comme ϕ est point d'accumulation, il existe k tel que $B \in f_k$, alors d'après le lemme 3.6 $B \in f_0$.

Soit N un entier naturel, comme B est critique pour ϕ, il existe un carré de taille $N \times N$ de α qui ne contient pas B ; de plus comme ϕ est point d'accumulation, il existe k' tel que $f_{k'}$ contient ce carré, alors d'après le lemme 3.6 , ce carré apparaît aussi dans f_0. On en déduit que B est un motif critique de f_0.

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $A_\lambda \subset B$. Pour tout $l \geq \lambda$, A_λ n'apparaît pas dans f_l (car $F(l) \geq \lambda + 1$), alors A_λ n'apparaît pas dans ϕ, ce qui contredit le fait que ϕ est point d'accumulation. Donc ϕ est quasipériodique. □

Conclusion

Nous avons donc vu au cours de cette étude deux jeux de tuiles périodiques. Ces deux jeux de tuiles ont chacun leur propre intérêt. En effet, ils sont construits de deux manières complètement différentes et ils sont pas périodiques pour des raisons fondamentalement différentes. La construction du jeu de Robinson est purement géométrique alors que celle de Kari et Čulik est basée sur des propriétés arithmétiques des nombres réels. On peut aussi remarquer que les pavages qu'ils fournissent ne sont pas du tout semblables. Les pavages de Robinson présentent une grande régularité car ils sont auto-similaires (ils sont en particulier tous quasipériodiques), ce qui n'est peut-être pas le cas des pavages de Kari et Čulik qui sont beaucoup moins réguliers.

Dans la partie consacrée aux problèmes de dénombrements, on a introduit une façon d'associer à un pavage une forêt dont on peut déduire un arbre (la racine de cette arbre est l'ensemble vide et les fils de cette racine sont les racines des arbres qui constituent la forêt). Si l'on se donne maintenant un jeu de tuiles, on peut lui associer l'arbre obtenu en fusionnant les arbres associés à chacun des pavages que nous donne ce jeu de tuiles. Ces arbres sont un outil puissant que l'on n'a pas tout à fait fini d'exploiter pour étudier les pavages. En effet, il reste quelques problèmes ouverts. Peut-on avoir n'importe quelle forme d'arbres? Si non, qu'est-ce qui caractérise un arbre obtenu à partir d'un jeu de tuiles? Peut-on obtenir un arbre récursif dont toutes les branches infinies sont non récursives? Si oui, cela signifierait que l'on peut obtenir un jeu de tuiles qui ne donne que des pavages non récursifs.

Nous avons aussi vu que tout jeu de tuiles donne au moins un pavage quasi-périodique. Pour chaque jeu de tuiles, il existe une fonction qui, à chaque motif (fait de tuiles de ce jeu), associe le minimum sur tous les pavages quasipériodiques de la taille des carrés où ce motif apparaît toujours. Nous nous sommes demandé si cette fonction est récursive. Si elle l'était, cela signifierait qu'il existe une preuve constructive de ce que l'on a démontré de façon non constructive dans la partie 3.3 consacrée à la quasipériodicité. Si au contraire la réponse était non, cela signifierait que les pavages quasipériodiques que l'on obtient ne sont pas très réguliers même s'ils ne sont pas chaotiques.

Références

[1] R. Berger. The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 66 :201–213, 1966.

[2] N. Dolbilin. The countability of a tilling family and the periodicity of a tilling. *Discrete and Computational Geometry*, 13 :405–414, 1995.

[3] Y. Gurevich and I. Koriakov. A remark on Berger's paper on the domino problem. *Siberian Journal of Mathematics*, 13 :459–463, 1972. (in Russian).

[4] J. Kari and K. Cullik. An aperiodic set of wang cubes. 1995.

[5] R. Robinson. Undecidability and nonperiodicity of tilling of the plane. *Iventiones math.*, 12 :177–209, 1971.

[6] H. Wang. Proving thorems by patern recognition-II. *Bell System Tech. J.*, 40 :1–41, 1961.

[7] H. Wang. Dominoes and the AEA case of the decision problem. In *Mathematical theory of automata*, pages 23–55. Polytechnic Press, 1963.