Reductions polynomiales

Marie-Pierre Béal

Université Paris-Est. L3 Informatique

Bibliographie

- Algorithm Design by Jon Kleinberg and Éva Tardos.
  Addison-Wesley, 2005.
  `http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/`

Réduction polynomiale

Définition

Un problème X se réduit en temps polynomial à un problème Y si et seulement si des instances du problème X peuvent être résolues avec un nombre polynomial de calculs élémentaires et un nombre polynomial d'appels à des oracles (solveurs) qui résolvent le problème Y.

Notation : $X \leq_P Y$

Attention : dans la réduction, les instances de Y doivent être de taille polynomiale.

Réduction polynomiale

Proposition

Si Y est un problème que l'on peut résoudre en temps polynomial et si X se réduit en temps polynomial à Y, alors X peut se résoudre en temps polynomial.

Proposition

Si X est un problème que l'on ne peut pas résoudre en temps polynomial et si X se réduit en temps polynomial à Y, alors Y ne peut pas se résoudre en temps polynomial non plus.

Quelques problèmes classiques sur les graphes

- Ensemble de sommets indépendents (Independent set)
- Couverture (Vertex cover)
- Famille d'ensembles recouvrante (Set cover)

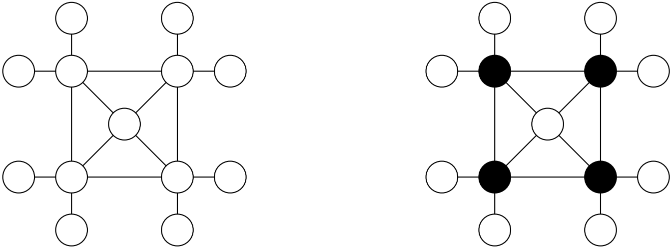
Independent set

Definition

Soit $G = (V, A)$ un graphe non orienté. Un independent set est sous-ensemble S de V tel que pour chaque arc dans A, au plus une extrémité de cet arc appartient à S.

Par exemple, l'ensemble vide ou un singleton est un *independent set*.

Independent set



Quelle est la taille maximale d'un independent set pour ce graphe ?

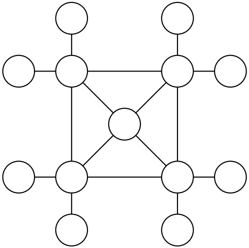
Couverture

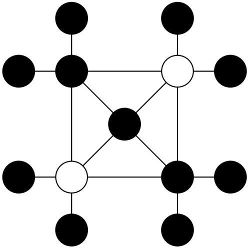
Définition

Soit $G = (V, A)$ un graphe non orienté. Une couverture est sous-ensemble S de V tel que pour chaque arc dans A, au moins une extrémité de cet arc appartient à S.

Par exemple, l'ensemble V est une *couverture*.

Couverture





Quelle est la taille minimale d'une couverture pour ce graphe ?

Vertex cover et Independent set

Problème Independent set

Étant donnés

- $G = (V, A)$ un graphe non orienté.
- un entier k

existe-t-il un independent set de taille (le nombre de sommets) k ?

Problème Vertex cover

Étant donnés

- $G = (V, A)$ un graphe non orienté.
- un entier k

existe-t-il un vertex cover de taille (le nombre de sommets) k ?

Vertex cover et Independent set sont $\equiv_P$-équivalents

Théorème

Vertex-cover $\leq_P$ Independent-set et Independent-set $\leq_P$ Vertex-cover

Démonstration.

On montre que si S est un independent set de taille k alors $V - S$ est une couverture de taille $n - k$, où n est le nombre de sommets de S.

- Soit S un independent set.
- Soit (i, j) un arc dans A, alors i ou j n'appartient pas à S. Supposons que c'est i.
- Si $i \notin S$, alors $i \in V - S$.
- Donc $V - S$ est une couverture.

$\square$

Vertex cover et Independent set sont $\equiv_P$-équivalents

Théorème

Vertex-cover $\leq_P$ Independent-set et Independent-set $\leq_P$ Vertex-cover

Démonstration.

Réciproquement, si $V - S$ est une couverture de taille $n - k$, alors S est un independent set de taille k.

- Soit $V - S$ une couverture.
- Soit (i, j) un arc dans A, alors i ou j appartient à $V - S$. Supposons que c'est i.
- Si $i \in V - S$, alors $i \notin S$.
- Donc S est un independent set.

$\square$

Set cover

Definition

Soient U un ensemble d'éléments et $S_1, S_2, \ldots, S_m$ ensemble de sous-ensembles de U. Une set cover est une partie de ces ensembles dont la réunion est égale à U.

Si la réunion de tous les S_i est strictement incluse dans U, il n'existe pas de set cover.

Problème Set cover

Étant donnés

- U un ensemble d'éléments
- $S_1, S_2, \ldots, S_m$ ensemble de sous-ensembles de U
- un entier k

existe-t-il un set cover de taille (le nombre d'ensembles) au plus k ?

Application : boites de lego

Application : boites de lego

Soient

- U un ensemble de composants lego nécessaires pour construire un objet (on supppose ici que les composants sont distincts).
- Chaque boite de base lego S_i pour $1 \leq m \leq i$ comprend un certains nombres de composants.
- Trouver le nombre minimal de boîtes nécessaires pour construire l'objet.

Application : boites de lego

Exemple

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $S_1 = \{2, 6\}$
- $S_2 = \{1, 4\}$
- $S_3 = \{2, 3, 4, 5\}$
- $S_4 = \{3\}$
- $S_5 = \{1, 5, 6, 7\}$

Application : boites de lego

Exemple

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $S_1 = \{2, 6\}$
- $S_2 = \{1, 4\}$
- $S_3 = \{2, 3, 4, 5\}$
- $S_4 = \{3\}$
- $S_5 = \{1, 5, 6, 7\}$
- Le nombre minimal de boîtes nécessaires pour construire l'objet est 2.

Vertex cover se réduit à set cover

Théorème

Vertex-cover $\leq_P$ Set-cover.

Démonstration.

Soit $G = (V, A)$, on construit $U, (S_1, \dots, S_m)$ tel que G a un vertex cover de taille k si et seulement si $U, (S_1, \dots, S_m)$ a un set cover de taille k.

On pose

- $U = A$
- Pour $q \in V$, $S_q = \{ij \in A \mid i = q \text{ ou } j = q\}$

Si S est un vertex cover de taille k pour G. Alors $(S_q)_{q \in S}$ est un set cover de taille k.

Réciproquement, soit T une partie de $(S_q)_{q \in V}$ qui est une set cover de taille k. Alors $S = \{q \mid S_q \in T\}$ est un vertex cover pour G. $\square$

3-SAT

Définition

- x_i est une variable booléenne (qui vaut vrai ou faux)
- $\overline{x_i}$ est sa négation
- x_i et $\overline{x_i}$ sont des littéraux.
- Une clause une disjonction de littéraux, par exemple $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
- Une forme normale conjonctive est une conjonction de clauses, par exemple $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$

Problème SAT

Étant donnée une formule ϕ sous forme normale conjonctive (CNF), existe-t-il un assignement des variables booléennes (vrai ou faux) tel que ϕ soit vrai (ϕ est satisfiable) ?

3-SAT

3-SAT

Chaque clause a exactement 3 littéraux (et les littéraux ont des variables différentes).

$$\phi = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

3-SAT se réduit à Independent set

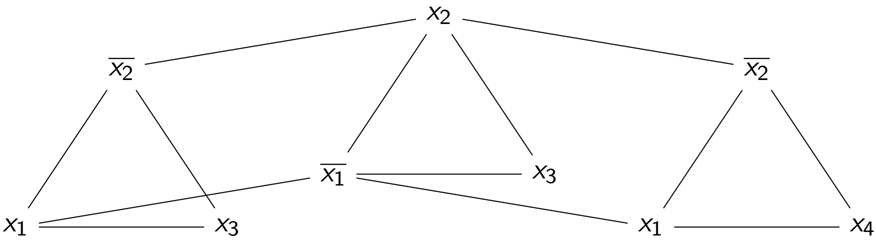
Théorème

3-SAT $\leq_P$ Independent set.

Démonstration.

Soit ϕ une instance de 3-SAT. On construit une instance (G, k) de Independent set tel que (G, k) a un independent set de taille k si et seulement si ϕ est satisfiable.
On construit avec 3 sommets pour chaque clause, chacun d'eux représentant un littéral de la clause. On relit par des arcs ces trois sommets. On relit aussi chaque littéral avec sa négation □

3-SAT se réduit à Independent set



$$\phi = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$

3-SAT se réduit à Independent set

Lemme

Le graphe G contient un independent set de taille k égal au nombre de clauses de ϕ si et seulement si ϕ est satisfiable.

Démonstration.

Soit S in independent set de G de taille k. Alors S a un sommet dans chaque triangle. On met ce sommet à vrai. Cet assignement est correct et chaque clause est vrai. Donc ϕ est vrai.
Réciproquement, on part d'un assignment des variables booléennes qui rend ϕ vrai. On choisit un littéral vrai dans chaque triangle. C'est un independent set pour G. $\square$

Application : matching triparti

Matching 3D

On considère

- n professeurs
- n cours
- n horaires
- une liste de cours et horaires possibles pour un professeur.

Est-il possible d'assigner chaque cours à un professeur de telle sorte que les cours soient programmés à des horaires différents et que chaque professeur ait un seul cours à faire ?

Application : matching triparti

Professeur	Cours	Horaire
Béal	Algo	14h-16h
Béal	Java	8h30-12h30
Béal	Java	14h-16h
David	Java	16h-18h
David	Logique	16h-18h
Perrin	Algo	16h-18h
Perrin	Algo	8h30-12h30
Perrin	Java	8h30-12h30

Application : matching triparti

Professeur	Cours	Horaire
Béal	Algo	14h-16h
Béal	Java	8h30-12h30
Béal	Java	14h-16h
David	Java	16h-18h
David	Logique	16h-18h
Perrin	Algo	16h-18h
Perrin	Algo	8h30-12h30
Perrin	Java	8h30-12h30

Matching 3D

Problème de matching 3D

On considère trois ensembles X, Y, Z disjoints de taille n et un ensemble T de triplets (x, y, z) avec $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. Existe-t-il n de ces triplets tels que chaque élément de X (resp. Y, Z) apparaît exactement une fois dans ces n triplets ?

Théorème

3-SAT $\leq_P$ Maching 3D.

Problèmes vérifiables en temps polynomial

Problème vérifiable en temps polynomial

On considère

- un problème X est un ensemble de chaînes de caractères
- une instance du problème est une de ces chaînes
- un algorithme A resout X si $A(s)$ (A avec l'entrée s) donne oui si et seulement si $s \in X$.
- un algorithme C est une certifieur pour X si pour toute chaîne s, $s \in X$ si et seulement s'il existe une chaîne t avec $C(s, t)$ donne oui. La chaîne t est un certificat pour s.

Problèmes vérifiables en temps polynomial

Problème vérifiable en temps polynomial

La classe NP est la classe de problème pour lesquels il existe un certifieur en temps polynomial.

- Le temps de calcul de $C(s, t)$ est polynomial en la taille des données.
- La taille de t est polynomiale en la taille de s.

Exemples

Quels sont les problèmes vérifiables en temps polynomial parmi les problèmes précédents ?