Réseaux de transport

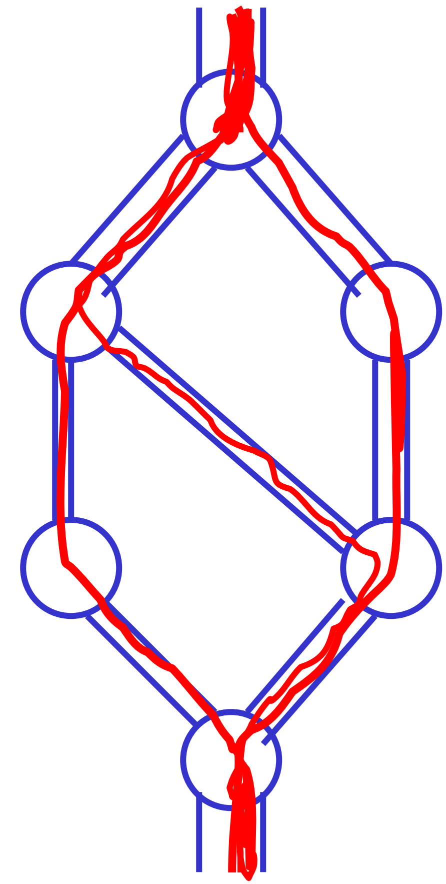
Graphe orienté valué $G = (S, A, c)$

$c(p, q)$: capacité de l'arc (p, q)
$f(p, q)$: débit ou flot de l'arc (p, q)

Exemples

Canalisations hydrauliques
Pipe-lines
Voies de circulation
Transports de marchandises,
Réseau de communication

source s



puits t

Conditions

Capacité $c : S \times S \rightarrow \mathbf{R}$ avec $c(p, q) \geq 0$

et si $(p, q) \neq A \quad c(p, q) = 0$

Flot $f : S \times S \rightarrow \mathbf{R}$

source $s \in S$, puits $t \in S$

Accessiblité

tous les sommets sont sur un chemin de s à t

Contrainte de capacité

pour tous $p, q \in S \quad f(p, q) \leq c(p, q)$

Conditions (suite)

Anti-symétrie

pour tous $p, q \in S \quad f(q, p) = - f(p, q)$

$p \xrightarrow{17} q$

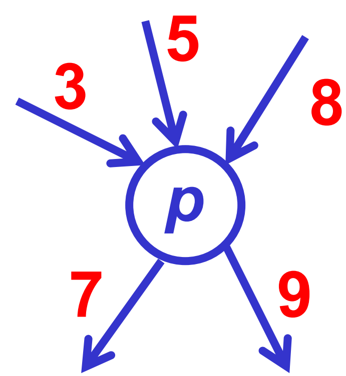
flot direct

$p \xleftarrow{-17} q$

flot prélevable

Conservation du flot

pour tout $p \in S \setminus \{s,t\} \quad \Sigma\, (f(p, q) \mid q \in S\,) = 0$



Flot

Valeur du flot

$| f | = \Sigma \, \mathbf{(} f\,(s, q) \mid q \in S \,\mathbf{)}$

ce qui part de la source

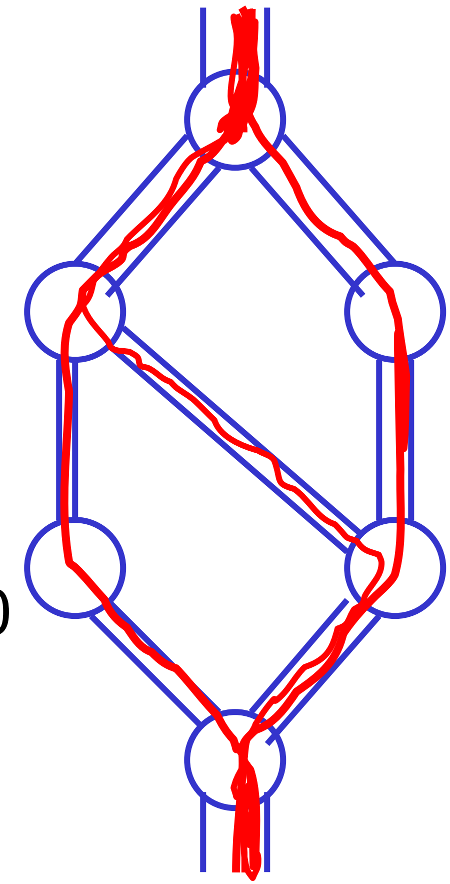
Propriétés

pour tout $p \in S \quad f\,(p, p) = 0$

pour tout $q \in S \setminus \{s,t\} \; \Sigma \, \mathbf{(} f\,(p, q) \mid p \in S \,\mathbf{)} = 0$

$| f | = \Sigma \, \mathbf{(} f\,(p, t) \mid p \in S \,\mathbf{)}$

ce qui arrive au puits



Représentations

Matrices d 'adjacence

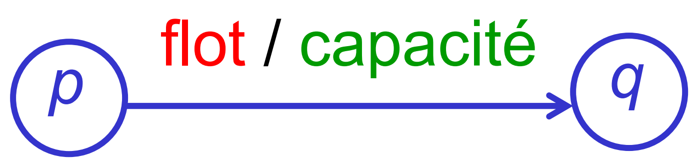
matrice des capacités

matrice des flots

Listes des successeurs

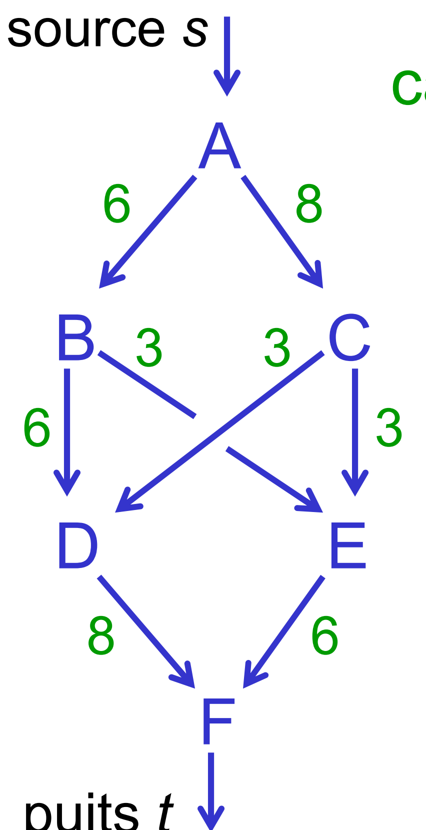
avec capacités et flots

Graphique



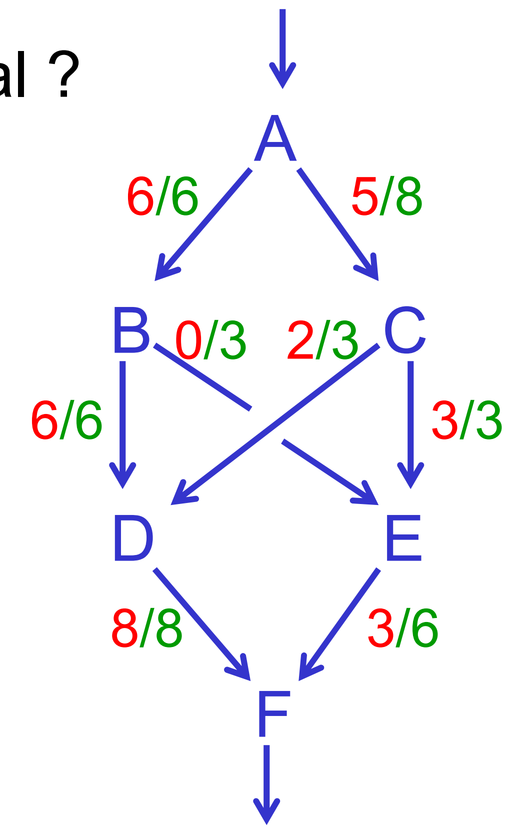
Problème

Graphe orienté valué $G = (S, A, c)$
Calculer le **flot maximum**,
i.e. un flot f dont la valeur est maximale



capacités

un flot maximal ?
$| f | = 11$



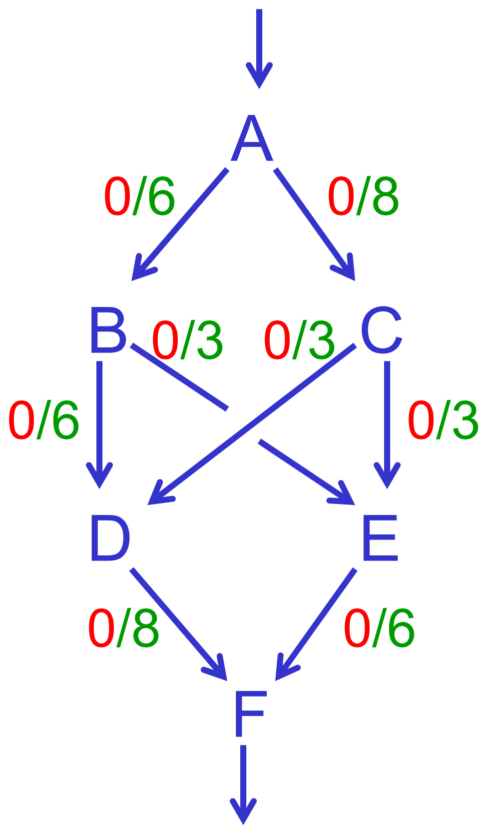
Méthode de Ford et Fulkerson

1 initialiser le flot *f* à 0 ;
2 **`tant qu`**'il existe un chemin de *s* à *t* sous-utilisé **`faire`**
     augmenter le flot *f* sur ce chemin ;
3 **`retour`** le flot *f*

Théorème

si tout chemin ($s, \ldots, p, q, \ldots, p', q', \ldots, t$) possède
un arc avant plein, $f(p, q) = c(p, q)$,
ou un arc arrière vide, $f(q', p') = 0$,
alors le flot est maximum

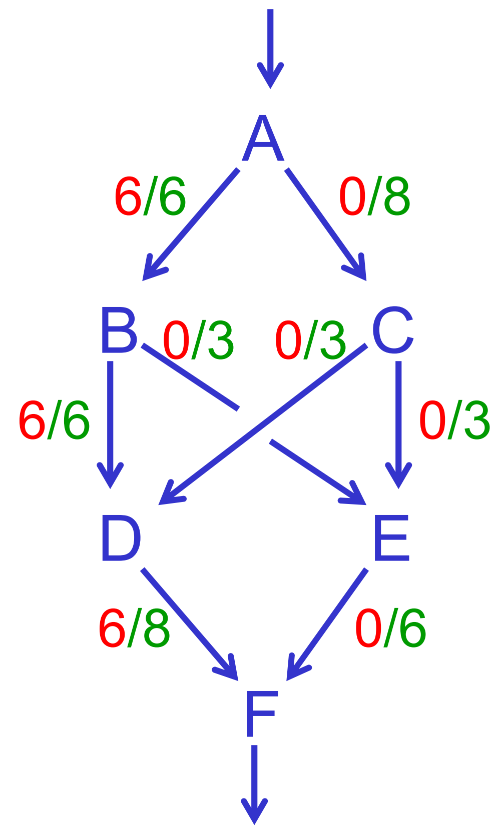
Exemple



$|f| = 0$

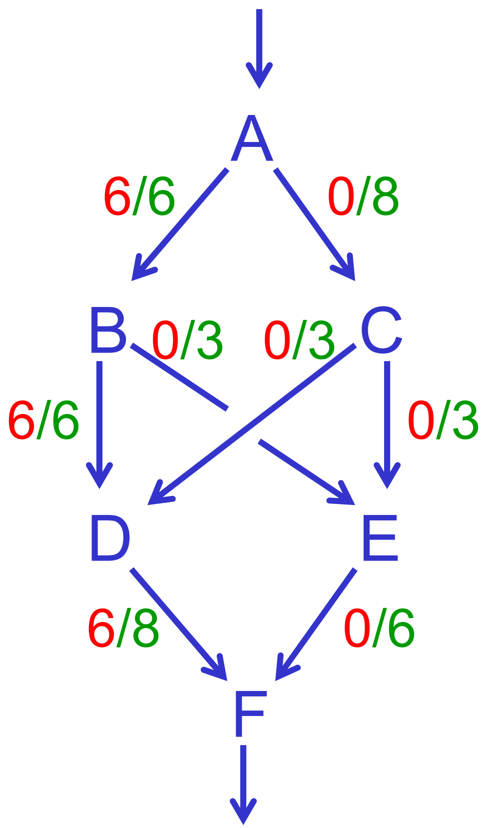
ABDF
sous-utilisé

augmentation
du flot sur ABDF



$|f| = 6$

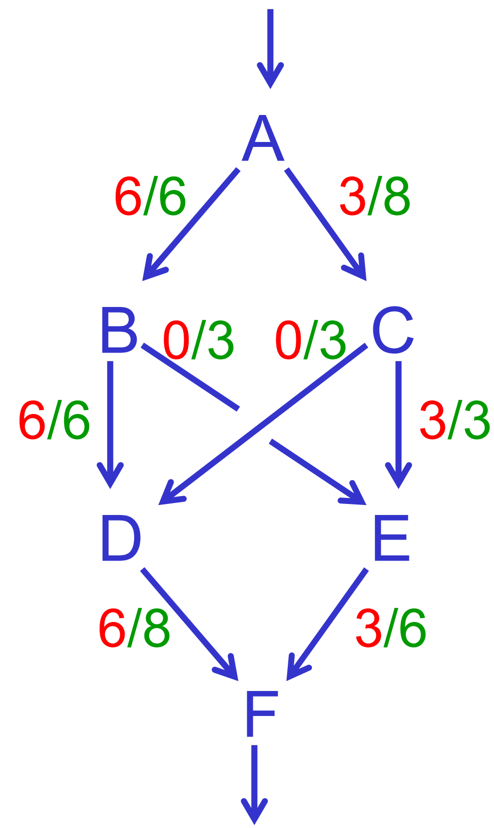
Exemple (suite)



$| f | = 6$

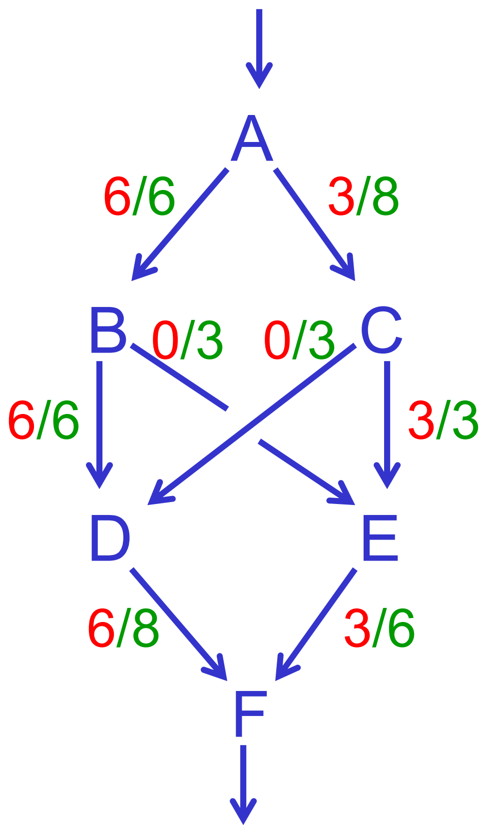
ACEF
sous-utilisé

augmentation
du flot sur ACEF



$| f | = 9$

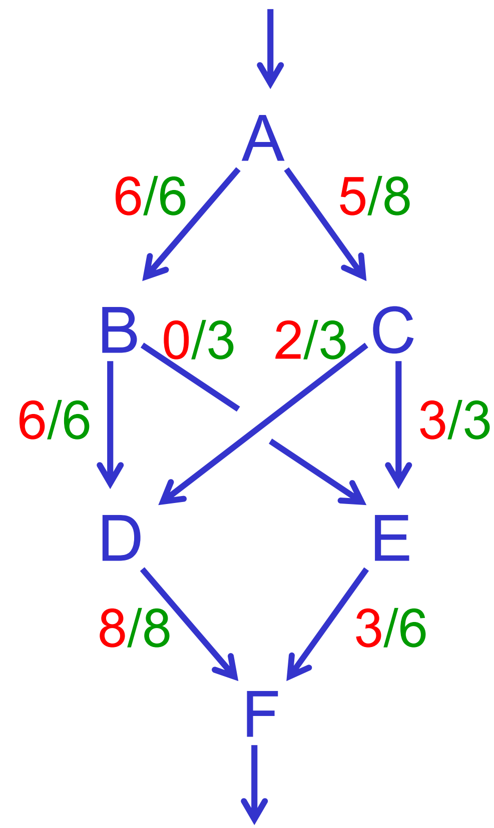
Exemple (suite)



$| f | = 9$

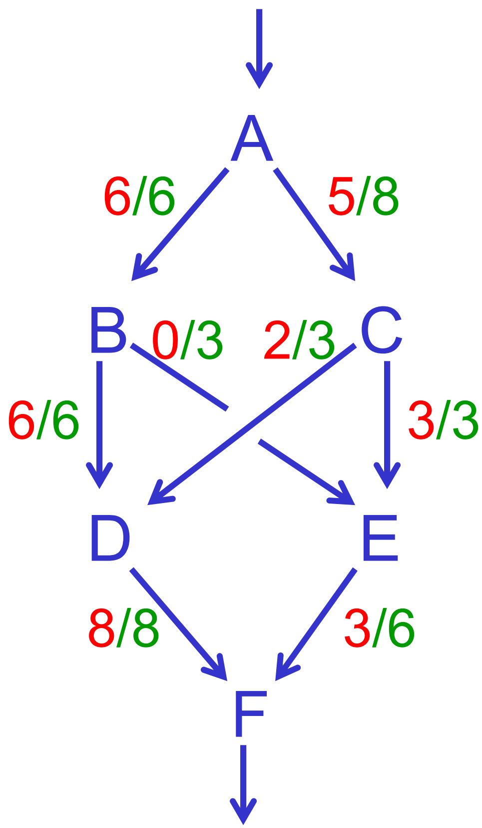
ACDF
sous-utilisé

augmentation
du flot sur ACDF



$| f | = 11$

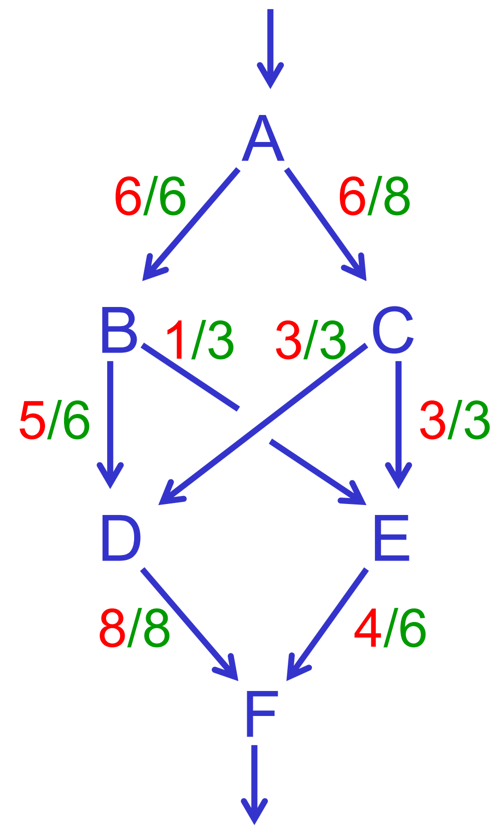
Exemple (suite)



| *f* | = 11

ACDBEF
sous-utilisé

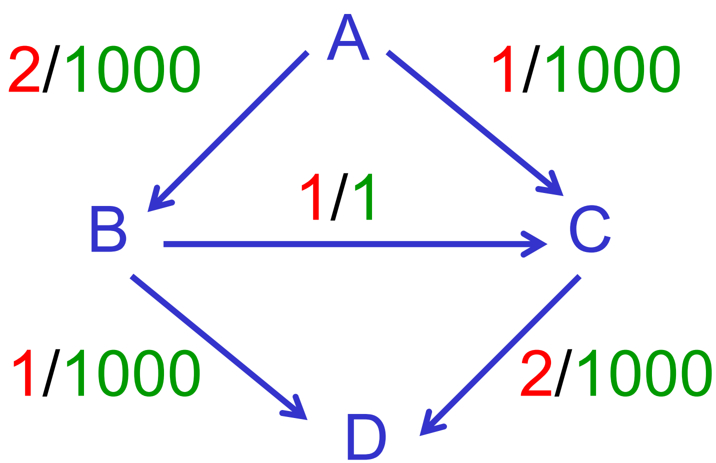
augmentation
du flot sur ACDBEF

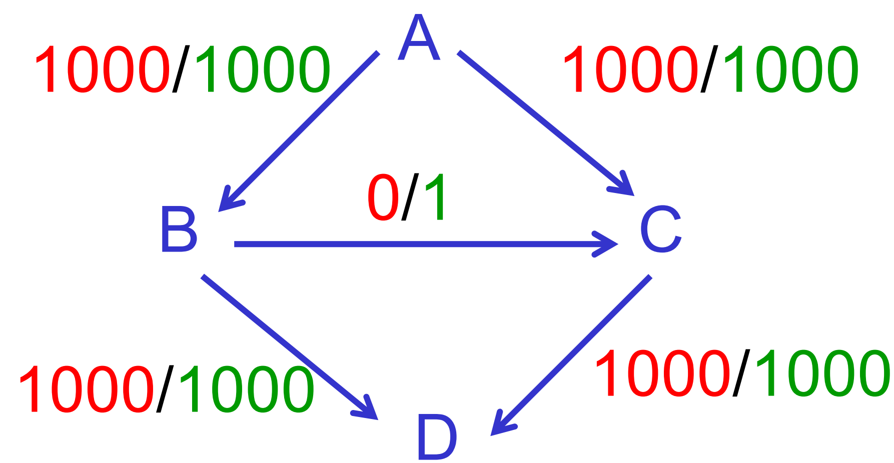


| *f* | = 12
maximum

Exemple

Le nombre d'itérations dépend du choix des chemins





augmentations	chemins
1	ABCD
1	ACBD
1	ABCD
etc.	

augmentations	chemins
1000	ABD
1000	ACD
flot maximum	

Stratégie 1

Pour augmenter le flot :

choisir le plus court chemin sous-utilisé

Théorème

le calcul du flot maximum obtenu avec cette stratégie nécessite l'examen de moins de card$S$.card$A$ chemins.

Stratégie 2

Pour augmenter le flot :

choisir le chemin qui a la plus forte capacité disponible
[augmentation maximum du flot à cette itération]
Choix du chemin : problème dual du plus court chemin
de *s* à *t*

Réalisation :

en utilisant une file de priorité sur les sommets

Coupure

$(X,\ Y)$ coupure de $G = (S, A, c)$:

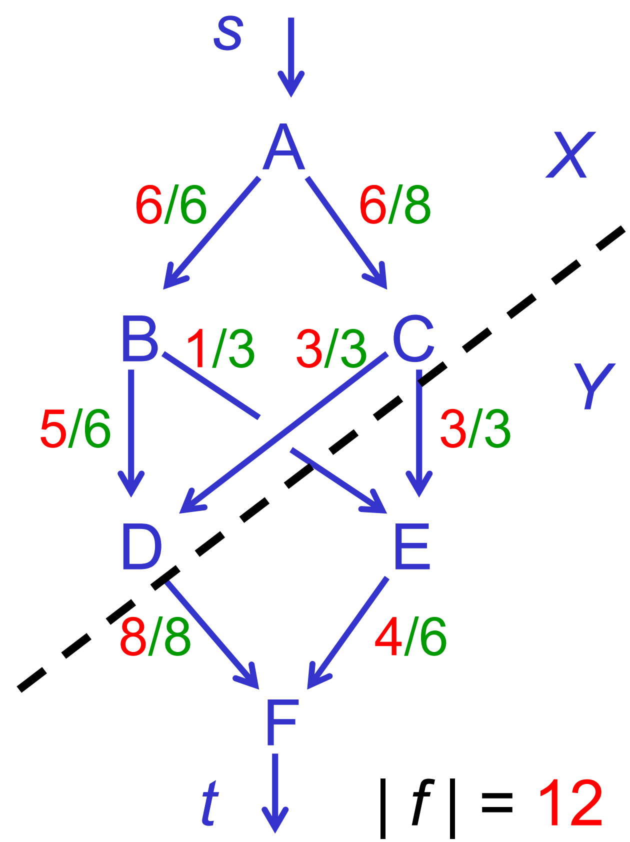
$(X,\ Y)$ partition de S avec $s \in X$, $t \in Y$

capacité

$$c(X,\ Y) = \Sigma\ \mathbf{(}\ c(x,\ y) \mid x \in X,\ y \in Y\ \mathbf{)}$$

flot

$$f\,(X,\ Y) = \Sigma\ \mathbf{(}\ f\,(x,\ y) \mid x \in X,\ y \in Y\ \mathbf{)}$$



$X = \{A,B,C,D\}$ $Y = \{E,F\}$ $c(X, Y) = 14$ $f\,(X, Y) = 12$

Propriétés (X, Y) coupure

1 $f(X,Y) = |f|$

2 $f(X,Y) \leq c(X,Y)$

Le flot maximum est borné par le minimum des capacités des coupures

3 f est un flot maximal ssi
$|f| = c(X',Y')$ pour une coupure (X',Y')

Coupure optimale

$X' = \{A,C\}$

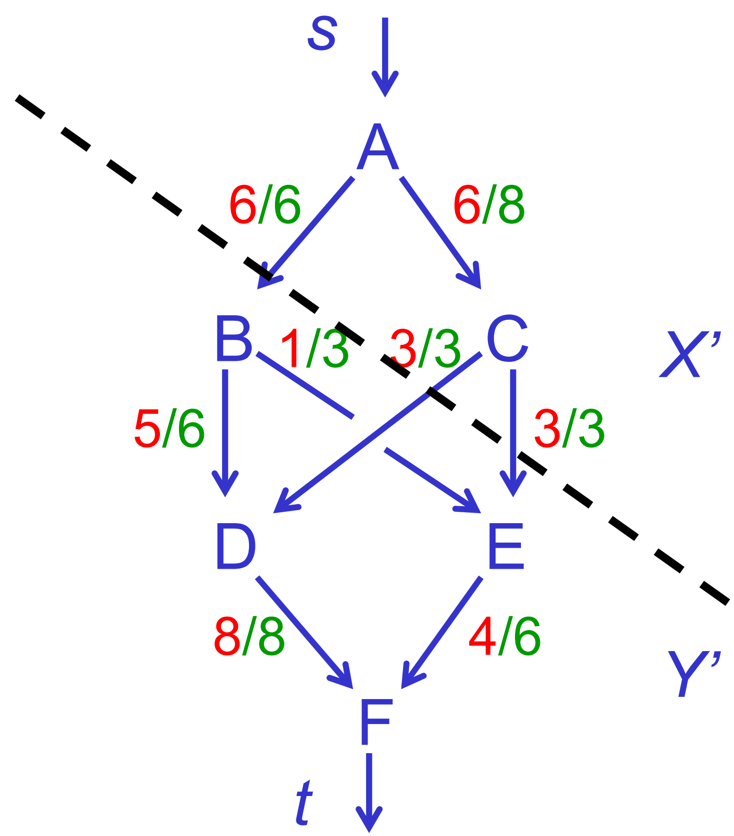
$Y' = \{B,D,E,F\}$

$c(X',Y') = 12$

(X',Y') de capacité minimale

$f\,(X',Y') = 12$

flot maximum



$|\,f\,| = 12$