Une Hiérarchie des Parties Rationnelles de $\mathbf{N}^2$

par

JEAN BERSTEL*

Centre de Calcul
UER de Mathématique
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67 Strasbourg, France

RÉSUMÉ

On étudie la structure d'ordre des cônes rationnels engendrés par les langages bornés sur un alphabet à deux lettres. On classifie complètement les cônes pour lesquels l'ensemble des exposants du langage générateur forment des sous-monoïdes de type fini de $\mathbf{N}^2$, et on exhibe des familles infinies de cônes rationnels deux à deux incomparables.

Introduction. Un des problèmes posés par l'étude de familles "abstraites" de langages est celui de l'examen de l'inclusion d'une famille de langages dans une autre. Plus généralement, on cherche à exhiber des ensembles de familles vérifiant, pour la relation d'inclusion, diverses propriétés, comme celles de former une chaîne ou d'être deux à deux incomparables.

Dans ce qui suit sont examinées les propriétés relatives à l'inclusion, d'une famille de *cônes rationnels* particulièrement simples puisqu'ils sont tous engendrés par un langage borné sur un alphabet à deux lettres. Les résultats auxquels nous aboutissons montrent l'existence d'une structure d'ordre étonnamment complexe: En effet, alors que les cônes engendrés par les langages bornés dont les exposants forment un sous-monoïde de $\mathbf{N}^2$ sont ordre-isomorphes à l'intervalle des nombres rationnels compris entre 0 et 1 (Théorème 5.4), les cônes engendrés par la réunion de deux tels langages sont en général incomparables. De plus, il est possible d'en "insérer" une infinité deux à deux incomparables entre deux cônes du premier type (Théorème 6.6).

Soit $X = \{x, y\}$ un alphabet fixé à deux lettres. Etant donnés deux langages $L_1 = \{x^n y^m\colon (n, m) \in L_1^0\}$ et $L_2 = \{x^n y^m\colon (n, m) \in L_2^0\}$ contenus dans x^*y^*, nous disons que L_2 est image rationnelle de L_1, et par abus de langage que $L_2^0 \subset \mathbf{N}^2$ est image rationnelle de $L_1^0 \subset \mathbf{N}^2$ lorsqu'il existe une application ou transduction rationnelle τ (au sens de [4]) telle que $L_2 = \tau L_1$. Deux langages sont rationnellement équivalents lorsqu'ils sont chacun image rationnelle de l'autre, et rationnellement incomparables lorsqu'aucun n'est image rationnelle

*Adresse actuelle: Université Paris 8, Route de la Tourelle, Paris.

MATHEMATICAL SYSTEMS THEORY, Vol. 7, No. 2.

de l'autre. En section 1, nous étudions quelques propriétés des applications rationnelles et introduisons des notations utiles dans la suite.

Nous vérifions, en section 2, que tout langage algébrique contenu dans x^*y^* est image rationelle du plus simple d'entre eux, à savoir de $S = \{x^ny^n : n \geq 0\}$, ou conformément à l'abus de langage fixé plus haut, que toute partie rationnelle de $\mathbf{N}^2$ est image rationnelle de $S^0 = (1, 1)\mathbf{N}$.

Il est prouvé en section 3 que deux sous-monoïdes quelconques de dimension 1 de $\mathbf{N}^2$, s'ils ne sont pas reconnaissables, sont rationnellement équivalent. De plus, deux unions finies non vides de translatés de tels sous-monoïdes—que nous appelons des droites—sont rationnellement équivalents (Théorème 3.2).

C'est en section 4 qu'est entamée l'étude des sous-monoïdes de dimension 2 de $\mathbf{N}^2$. Nous établissons en particulier le théorème suivant qui est la propriété fondamentale permettant l'étude ultérieure (Théorème 4.4): Tout sous-monoïde de type fini M est rationnellement équivalent à sa fermeture convexe, que nous définissons comme l'intersection, avec $\mathbf{N}^2$, de la fermeture convexe de M considéré comme partie de $\mathbf{R}^2$.

Grace à ce théorème nous pouvons, en section 5, définir le poids $\omega(M)$ d'un sous-monoïde M de type fini qui est quotient des pentes des deux droites extrémales de sa fermeture convexe. Nous prouvons alors le premier théorème fondamental de cet article, à savoir: Si M et M' sont deux sous-monoïdes de type fini de $\mathbf{N}^2$ de poids $0 < \omega(M), \omega(M') \leq 1$, alors M' est image rationnelle de M si et seulement si $\omega(M') \leq \omega(M)$ (Théorème 5.4).

En section 6, nous étudions les unions de deux monoïdes convexes que nous avons appelés bimonoïdes. Nous vérifions d'abord qu'un bimonoïde n'est jamais rationnellement équivalent à un sous-monoïde, avant de prouver le deuxième théorème fondamental (Théorème 6.6): Si P et Q sont deux sous-monoïdes vérifiant $1 > \omega(P)^2 > \omega(Q)$, alors tout bimonoïde B satisfaisant à une condition arithmétique simple est image rationnelle de P et a Q pour image rationnelle. De plus, deux tels bimonoïdes sont rationnellement incomparables.

Le dernier paragraphe est consacré aux complémentaires de sous-monoïdes, qui sont tous images rationnelles des sous-monoïdes et des bimonoïdes. Nous prouvons qu'une partie de la forme $\mathbf{N}^2 \backslash M$ est image rationnelle de $\mathbf{N}^2 \backslash M'$, où M, M' sont des sous-monoïdes si et seulement si M' est image rationnelle de M. Nous terminons par quelques exemples montrant que les résultats établis ne sont plus vrais lorsque les parties de $\mathbf{N}^2$ ne sont pas convexes ou ne sont pas des sous-monoïdes de type fini.

On utilise librement la terminologie de [4].

1. Relations Rationnelles. Une *relation rationnelle* T entre deux monoïdes M et M' est une partie rationnelle du monoïde $M \times M'$, donc un élément $T \in \operatorname{Rat}(M \times M')$. A une relation rationnelle T on associe une application $\tau : M \to \mathcal{P}(M')$ en posant, pour $m \in M$,

$$\tau m = \{m' : (m, m') \in T\}.$$

L'application τ s'étend en une application de $\mathcal{P}(M)$ dans $\mathcal{P}(M')$, encore notée τ, en posant, pour toute partie $L \subset M$: $\tau L = \bigcup \{\tau m : m \in L\}$. Cette application sera appelée, par abus de langage, *l'application ou transduction rationnelle* associée à la relation rationnelle T.

Définition. Soient M et M' deux monoïdes. Une partie $L' \subset M'$ est *image rationnelle* de la partie $L \subset M$, noté $L \rightsquigarrow L'$, si il existe une application rationnelle τ de M dans M' telle que $L' = \tau L$. L et L' sont rationnellement équivalent, noté $L \approx L'$, si et seulement si $L \rightsquigarrow L'$ et $L' \rightsquigarrow L$. Elles sont rationnellement comparables (resp. incomparables) si $L \rightsquigarrow L'$ ou $L' \rightsquigarrow L$ (resp. si ni $L \rightsquigarrow L'$ ni $L' \rightsquigarrow L$).

Etant donnés $\varnothing \neq L \subset M$, et $L' \in \mathrm{Rat}\,(M')$, on a $L \rightsquigarrow L'$. En particulier, deux parties rationnelles non vides sont rationnellement équivalentes. Soit en effet $m \in L$; alors $\{m\} \times L'$ est une partie rationnelle de $M \times M'$, et l'application rationnelle τ associée vérifie $\tau L = L'$.

Si τ est une application rationnelle de M dans M', et τ' une application rationnelle de M' dans M'', l'application $\tau'' = \tau' \circ \tau$ de M dans M'' est rationnelle si le monoïde M' est libre [4]. Qu'il n'en est pas ainsi en général montre l'exemple suivant: Soient $M = \{x, \ y\}^*$, $M' = x^* \times y^*$, $M'' = \{x\}^*$, et définissons les parties rationnelles $T \in \mathrm{Rat}\,(M \times M')$ et $T' \in \mathrm{Rat}\,(M' \times M'')$ par:

$$T = (x, (1, y))^*(y, (x, 1))^* = \{(x^n y^p, (x^p, y^n)) : n, p \geq 0\},$$

$$T' = ((x, y), x)^* = \{((x^n, y^n), x^n) : n \geq 0\},$$

de sorte que

$$T'' = \{(f, g) \in M \times M'' : \exists\, h \in M' : (f, h) \in T \text{ et } (h, g) \in M''\}$$

est l'ensemble $T'' = \{(x^n y^n, x^n) : n \geq 0\}$, qui n'est pas une partie rationnelle de $M \times M''$, sinon sa première projection serait une partie rationnelle de M ce qui n'est pas.

Dorénavent, tous les monoïdes seront supposés libres et finiment engendrés. La relation $\rightsquigarrow$ entre parties de monoïdes libres est alors un préordre, i.e. réflexif et transitif.

Soit Y un alphabet infini, et identifions l'alphabet fini X d'un monoïde X^* libre à une partie de Y. Le *cône* $\mathscr{C}(L)$ engendré par un langage $L \subset X^*$ est la famille de toutes les parties $L' \subset Y^*$ qui sont images rationnelles du langage L. Avec des identifications évidentes, on a donc, pour $L \subset X^*$, $L' \subset X'^*$: $L \rightsquigarrow L'$ si et seulement si $\mathscr{C}(L) \supset \mathscr{C}(L')$, et $L \approx L'$ si et seulement si $\mathscr{C}(L) = \mathscr{C}(L')$.

On a la caractérisation suivante des relations rationnelles.

PROPOSITION 1.1. *Un ensemble R est une relation rationnelle dans $X^* \times Y^*$ si et seulement si il existe un monoïde libre Z^*, deux homomorphismes θ: $Z^* \to X^*$, φ: $Z^* \to Y^*$, et une partie rationnelle $K \in \mathrm{Rat}(Z^*)$ tels que $R = \{(\theta f, \varphi f) : f \in K\}$. De plus, θ et φ peuvent être choisis de manière à satisfaire les deux conditions suivantes: (i) θ et φ sont alphabétiques, i.e. $|\theta z| \leq 1$ pour $z \in Z$ et de même pour φ; (ii) $\{z \in Z : \theta z = 1_X$ et $\varphi z = 1_Y\} = \varnothing$.*

Preuve. La première partie de l'éconcé et la condition (i) ont été établis en [4], il ne reste donc qu'à vérifier la condition (ii). Soit $U = \{z \in Z : \theta z = 1_X$ et $\varphi z = 1_Y\}$, posons $V = Z \backslash U$, et soit $\rho : Z^* \to V^*$ l'homomorphisme défini par

$$\rho z = \begin{cases} z \text{ pour } z \in V; \\ 1_V \text{ pour } z \in U. \end{cases}$$

Les applications θ': $V^* \to X^*$ et φ': $V^* \to Y^*$ définies par $\theta = \rho \circ \theta'$ et $\varphi = \rho \circ \varphi'$ sont des homomorphismes alphabétiques, et l'on a $R = \{(\theta' f, \varphi' f)$: $f \in K'\}$ avec $K' = \rho K$. D'où la proposition.

Il en découle que $L' \subset Y^*$ est image rationnelle de $L \subset X^*$ si et seulement si L' se met sous la forme

$$L' = \varphi(\theta^{-1} L \cap K), \tag{1.1}$$

où φ, θ, K ont la signification de la Proposition 1.1. Ceci montre que le cône $\mathscr{C}(S)$ engendré par une partie S d'un monoïde libre X^* est fermé par homomorphisme, homomorphisme inverse, et intersection avec un langage rationnel. Il l'est également par réunion, comme on le vérifie aisément.

2. Le Cone Engendré par $\{x^n y^n : n \in \mathbf{N}\}$. Le but de ce qui suit est d'étudier la partie du cône $\mathscr{C}(S)$ engendré par $S = \{x^n y^n : n \in \mathbf{N}\}$ formée par les langages contenus dans $x^* y^*$. Il résulte de (1.1) que $\mathscr{C}(S)$ est constitué de langages algébriques. Nous utiliserons par la suite la bijection de $x^* y^*$ sur $\mathbf{N}^2$ définie en associant au mot $x^n y^m$ le point (n, m).

Pour toute partie $L \subset x^* y^*$, nous écrirons $L^0 = \{(n, m) \in \mathbf{N}^2 : x^n y^m \in L\}$, et si $L \subset \mathbf{N}^2$, nous poserons $L^+ = \{x^n y^m : (n, m) \in L\}$, de sorte que $(L^+)^0 = L$ si $L \subset \mathbf{N}^2$ et $(L^0)^+ = L$ si $L \subset x^* y^*$. Ceci nous permettra d'employer un langage géométrique. Remarquons que les parties de $x^* y^*$ et les ensembles de points de $\mathbf{N}^2$ correspondants sont liés:

PROPOSITION 2.1. *Le langage $L \subset x^* y^*$ est algébrique dans $\{x, y\}^*$ si et seulement si $L^0 \in$ Rat $(\mathbf{N}^2)$, et L est rationnel si et seulement si L^0 est reconnaissable.*

Preuve. D'après [3, Corollaire 5.3.1], L est en effet algébrique si et seulement si L^0 est un ensemble semi-linéaire, i.e. une union finie d'ensembles de la forme $a + B^*$, où $a \in \mathbf{N}^2$ et B^* est un sous-monoïde de type fini de $\mathbf{N}^2$. Or d'après [1, Section 2] ceci est précisément la forme des parties rationnelles de $\mathbf{N}^2$. D'autre part, le langage L est clairement rationnel si et seulement s'il est union finie de langages de la forme RS, où $R \subset \{x\}^*$ et $S \subset \{y\}^*$ sont des langages rationnels. Comme enfin, d'après un résultat de Mezei (cf. par exemple [2]), les parties reconnaissables de $\mathbf{N}^2$ sont des unions finies de produits $R^0 \times S^0$, où R^0 et S^0 sont des parties reconnaissables de $\mathbf{N}$, la proposition est établie.

Nous dirons, par abus de langage, qu'une partie $A \subset \mathbf{N}^2$ est image rationnelle de $B \subset \mathbf{N}^2$ lorsque A^+ est image rationnelle de B^+. Si A^+ et B^+ sont, comme éléments de $\mathscr{C}(S)$, algébriques, alors A, B sont rationnels dans $\mathbf{N}^2$. Ceci ne peut prêter à confusion puisque, comme nous l'avons remarqué en Section 1, deux parties rationnelles non vides sont toujours rationnellement équivalentes. Nous nous servirons de la structure de semi-anneau de $\mathbf{N}^2$, et en particulier de la multiplication définie par $(a, a')(b, b') = (ab, a'b')$, pour tout (a, a'), $(b, b') \in \mathbf{N}^2$. Donnons un premier lemme qui servira constamment par la suite avec $k = 2$:

LEMME 2.2. *Soient A, $B \in \mathbf{N}^k$ tels que $A = a + cB$, avec a, $c \in \mathbf{N}^k$, $c = (c_1, c_2, \cdots, c_k)$, $c_1 c_2 \cdots c_k \neq 0$. Alors A et B sont rationnellement équivalents.*

Preuve. Posons $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$, soit $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, et définissons la relation $T \subset X^* \times X^*$ par:

$$T = (1, x_1^{a_1})(x_1, x_1^{c_1})^*(1, x_2^{a_2})(x_2, x_2^{c_2})^* \cdots (1, x_k^{a_k})(x_k, x_k^{c_k})^*$$
$$= \{(x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}, x_1^{a_1+n_1c_1}x_2^{a_2+n_2c_2}\cdots x_k^{a_k+n_kc_k}) : (n_1, n_2, \cdots, n_k) \in \mathbf{N}^k\}.$$

C'est une relation rationnelle, et l'application rationnelle τ associée à T vérifie $\tau B^+ = A^+$. Réciproquement, l'application rationnelle τ' associée à la relation $T' = \{(f, g) : (g, f) \in T\}$, également rationnelle vérifie $\tau' A^+ = B^+$, car $c_1 c_2 \cdots c_k \neq 0$, ce qui prouve le lemme.

THÉORÈME 2.3. *Tout langage algébrique $L \subset x^*y^*$ est image rationnelle de S.*

Joint à la remarque que les images rationnelles de S sont des langages algébriques, et à la Proposition 2.1, ceci montre que $L \subset x^*y^*$ vérifie $L \in \mathscr{C}(S)$ si et seulement si $L^0 \in \mathrm{Rat}\,(\mathbf{N}^2)$.

LEMME 2.4. *Soient $P = (c, a)\mathbf{N} + (c, b)\mathbf{N}$ et $P' = (a, c)\mathbf{N} + (b, c)\mathbf{N}$, avec $c \in \mathbf{N}$, $0 \leq a < b$, deux sous-monoïdes libres de $\mathbf{N}^2$. Alors $S^0 \rightsquigarrow P$ et $S^0 \rightsquigarrow P'$.*

Preuve. La relation $R \subset \{x, y\}^* \times \{x, y\}^*$ définie par

$$R = (x, x^c)^*\{(y, y^a), (y, y^b)\}^* = \{(x^n y^{k+l}, x^{cn} y^{ak+bl}) : n, k, l \in \mathbf{N}\}$$

est rationnelle. Soit τ l'application rationnelle associée à R. Alors pour tout n,

$$(\tau(x^n y^n))^0 = \{(cn, ak+bl) : k, l \in N, k+l = n\}$$

d'où $(\tau S)^0 = P$. La deuxième assertion se démontre de façon symétrique.

Démonstration du Théorème 2.3. Soit $L \subset x^*y^*$ un langage algébrique. D'après la Proposition 2.1, L^0 s'écrit sous la forme:

$$L^0 = \bigcup (a_i + B_i^*), \tag{2.1}$$

où $a_i \in \mathbf{N}^2$, B_i^* est une sous-monoïde de type fini, et où l'union est finie. Il suffit donc de montrer que $L^0 \rightsquigarrow a_i + B_i^*$ pour tout i, et par le Lemme 2.2, que $L^0 \rightsquigarrow B_i^*$ pour tout i. Nous démontrerons plus loin (Corollaire 4.6) que tout sous-monoïde B^* de $\mathbf{N}^2$ est rationnellement équivalent soit à une partie reconnaissable, soit à S^0, soit à l'un des deux sous-monoïdes P ou P' du Lemme 2.4. L'application de ce lemme achève donc la démonstration.

PROPOSITION 2.5. *Deux langages algébriques non vides $L \subset X^*$ et $L' \subset X'^*$ sont algébriquement équivalents. Plus précisément tout langage algébrique $L' \subset X'^*$ est image algébrique de tout langage non vide $L \subset X^*$.*

La preuve est analogue à celle du cas rationnel. Soit $L \subset X^*$ non vide, et $f \in L$; alors la partie $T = \{f\} \times L'$ est une partie algébrique de $X^* \times X'^*$. Soit τ la transduction algébrique associée à T. Alors $\tau L = L'$.

Il résulte de cette proposition que l'étude des parties rationnelles de $\mathbf{N}^2$ du point de vue de l'équivalence algébrique est triviale.

3. Les Droites. Les parties rationnelles les plus simples de $\mathbf{N}^2$ sont celles où les sous-monoïdes B_i de l'union (2.1) sont engendrés par un seul élément.

Définition. Une *droite* D est une partie de N^2 de la forme $D = a+B^*$, où B^* est un sous-monoïde libre de N^2 engendré par un seul élément $b = (b_1, b_2)$, avec $b_1 b_2 \neq 0$.

Une droite peut donc s'écrire $D = a+bN$. La condition $b_1 b_2 \neq 0$ est imposée pour exclure le cas où D serait une partie reconnaissable de N^2.

PROPOSITION 3.1. *Deux droites sont rationnellement équivalentes.*

Toute droite D s'écrit en effet sous la forme $D = a+bS^0$, avec $b = (b_1, b_2)$, $b_1 b_2 \neq 0$, et est donc rationnellement équivalente à S^0 par le Lemme 2.2. La proposition s'en déduit par transitivité.

Par la Proposition 3.1, une union finie de droites est image de toute droite, donc de S^0. Nous allons démontrer la réciproque:

THÉORÈME 3.2. *Toute union finie non vide de droites est rationnellement équivalent à toute droite.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de la notion de réseau: Un *réseau* R est une partie de N^2 de la forme $R = c+aN \times bN = c+(a, b)N^2$ ($c \in N^2$, a, $b \in N \backslash \{0\}$). Comme R est une partie reconnaissable de N^2, donc R^+ un langage rationnel de $\{x, y\}^*$, on a $A \rightsquigarrow A \cap R$ pour toute partie $A \subset N^2$.

LEMME 3.3. *L'intersection d'une droite et d'un réseau est soit vide, soit une droite.*

En effet, soit $D = aN+b$ une droite et $R = t+s'N \times s''N$ un réseau, et supposons que $D \cap R \neq \varnothing$. Soit $x \in D \cap R$. Il existe donc des entiers n, k', $k'' \in N$ tels que

$$x = an+b = t+(s'k', s''k''). \tag{3.1}$$

Soit n_0 le plus petit des entiers $n \in N$ tels que $an+b \in R$. Posons $a = (a', a'')$, $b = (b', b'')$, $t = (t', t'')$. L'égalité (3.1) s'écrit encore:

$$a'n+b' = t'+s'k', \qquad a''n+b'' = t''+s''k'', \tag{3.2}$$

ce qui montre que $an+b \in D \cap R$ si et seulement si $n \geq n_0$, et n est solution du système de congruences:

$$\begin{cases} a'n+b' \equiv t' \pmod{s'} \\ a''n+b'' \equiv t'' \pmod{s''}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ce système a la solution n_0, et d'après le théorème des restes chinois, ses solutions sont exactement les entiers $n \equiv n_0 \pmod m$ pour un certain entier m. Ceci, joint à la condition $n \geq n_0$, montre que $D \cap R = a(mN)+an_0+b$ est une droite, et prouve le lemme.

Soient $D_1, D_2, \cdots, D_r$ r droites ($r > 1$) et soit R un réseau.

$$(D_1 \cup \cdots \cup D_r) \cap R = (D_1 \cap R) \cup \cdots \cup (D_r \cap R) \tag{3.4}$$

est, d'après le Lemme 3.3, union de r' droites, avec $0 \leq r' \leq r$. Pour établir le Théorème 3.2 par récurrence sur r, il suffit de prouver qu'il existe un réseau R tel que l'ensemble (3.4) soit union de r' droites avec $0 < r' < r$. Or ceci découle du lemme suivant.

LEMME 3.4. *Soient D_1 et D_2 deux droites. Il existe un réseau R tel que $(D_1 \cup D_2) \cap R$ soit formé d'exactement une droite.*

Démonstration. Soient $D_1 = a\mathbf{N}+b$, $D_2 = c\mathbf{N}+d$. Posons $R_0 = a\mathbf{N}^2+b$. Clairement, $R_0 \cap D_1 = D_1$. Si $R_0 \cap D_2 = \varnothing$ le lemme est prouvé. Supposons donc $R_0 \cap D_2 \neq \varnothing$. Il existe par conséquent $x_0 = (x_0', x_0'') \in \mathbf{N}^2$, et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $ax_0+b = cn_0+d$. Posant $a = (a', a'')$, $b = (b', b'')$, $c = (c', c'')$, $d = (d', d'')$, ceci s'écrit:

$$(3.5) \qquad \begin{cases} a'x_0'+b' = c'n_0+d' \\ a''x_0''+b'' = c''n_0+d''. \end{cases}$$

Posons alors

$$(3.6) \qquad \begin{cases} s = (s', s'') = (a'c', a'') \\ t = (t', t'') = (a'(x_0'+1), 1)+b \\ R_1 = s\mathbf{N}^2+t. \end{cases}$$

Comme $s(0, x_0'+1)+t = a(x_0'+1)+b$, on a $R_1 \cap D_1 \neq \varnothing$. Si $R_1 \cap D_2 = \varnothing$, le lemme est démontré. Sinon, il existe $x_1 = (x_1', x_2'') \in \mathbf{N}^2$, $n_1 \in \mathbf{N}$ tels que $sx_1+t = cn_1+d$. En particulier, on a $a'c'x_1'+a'(x_0'+1)+b' = c'n_1+d'$, et $a'(x_0'+1)+b' \equiv d' \pmod{c'}$. Comparant cette équation à la première de (3.5), prise (mod c'), on en déduit:

$$(3.7) \qquad a' \equiv 0 \pmod{c'}, \qquad b' \equiv d' \pmod{c'}.$$

En échangeant le rôle des lettres primées, on démontre de même que le lemme est vrai, sauf si $a'' \equiv 0 \pmod{c''}$, $b'' \equiv d'' \pmod{c''}$.

Comme D_1 et D_2 jouent un rôle symétrique, on voit que le lemme est démontré dans tous les cas, sauf si $a = c$, et $b' \equiv d' \pmod{a'}$, $b'' \equiv d'' \pmod{a''}$.

Si $b = d$, alors $D_1 = D_2$, et le lemme est trivial. Supposons donc par exemple $b'' > d''$, et soient $n' \in \mathbf{Z}$, $n'' \in \mathbf{N}$ tels que

$$(3.8) \qquad \begin{cases} b'' = d''+a''n'' \\ b' = d'+a'n'. \end{cases}$$

Si $n' = n''$, alors $D_1 \subset D_2$ et le lemme est également trivial. Supposons donc par exemple $n' < n''$, posons $q = n''-n'$, et $R_2 = (q+1)a\mathbf{N}^2+b$. Il est clair que $R_2 \cap D_1 \neq \varnothing$. Si on avait $R_2 \cap D_2 \neq \varnothing$, il existerait $y = (y', y'') \in \mathbf{N}^2$, $n \in \mathbf{N}$ tels que $(q+1)ay+b = an+d$, donc

$$\begin{cases} (q+1)a'y'+b' = a'n+d' \\ (q+1)a''y''+b'' = a''n+d'', \end{cases}$$

ce qui donnerait, en vertu de (3.8) $(q+1)\,(y'-y'') = (n-n')-(n-n'') = -q$, donc $q \equiv 0 \pmod{q+1}$, ce qui est impossible car $q > 0$. Le cas où $n' > n''$ se traite de manière analogue en changeant q en $-q$. Le lemme est donc complètement démontré.

4. Les Sous-Monoïdes. Il ressort de la forme (2.1) des parties rationnelles que leurs constituants "essentiels" sont les sous-monoïdes de type fini. Les sous-monoïdes libres—nécessairement de type fini—sont de deux sortes: ceux de dimension 1, qui sont des droites particulières de la forme $D = a\mathbf{N}$ ($a = (a', a'') \neq (0, 0)$), sauf si $a'a'' = 0$, et les sous-monoïdes de dimension 2, de la forme $P^* = a\mathbf{N}+b\mathbf{N}$, avec $a = (a', a'')$, $b = (b', b'')$ non nuls et tels que $b'a'' \neq a'b''$.

On sait [1] que tout sous-monoïde M de type fini est, à un nombre fini d'éléments près, union (disjointe) de translatés de sous-monoïdes libres. Nous allons démontrer un résultat analogue prouvant la:

PROPOSITION 4.1. *Soit M^* un sous-monoïde de type fini. Il existe un sous-monoïde libre P^* de même fermeture convexe que M^* et une partie finie $D \subset M^*$ contenant* 0 *tel que $M^* = \bigcup \{d+P^*: d \in D\}$.*

La *fermeture convexe* $\hat{A}$ d'une partie $A \subset \mathbf{N}^2$ est l'intersection, avec $\mathbf{N}^2$, de la fermeture convexe de A dans $\mathbf{R}^2$.

Preuve. Supposons d'abord M^* de dimension 1, posons $M^* = a\mathbf{N}+b_1\mathbf{N} +\cdots+b_p\mathbf{N}$. Pour chaque i, on a, en posant $a = (a', a'')$, $b_i = (b_i', b_i'')$:

$$a'b_i'' = a''b_i'. \tag{4.1}$$

Posons $P^* = a\mathbf{N}$. Pour chaque $i \in [p]$, soit $L_i \in \mathbf{N}$ plus petit entier tel que $L_ib_i \in P^*$. Cet entier existe puisque $a'b_i = (a'b_i', a''b_i') = b_i'a \in P^*$ par (4.1). Soit alors

$$D = \left\{d = \sum_{i=1}^{p} l_ib_i : 0 \leq l_i < L_i, i \in [p]\right\}.$$

On a $M^* = \bigcup \{d+P^*: d \in D\}$. Pour tout $d \in D$, on a en effet $d+P^* \subset M^*$. Réciproquement, soit $x = na+n_1b_1+\cdots+n_pb_p \in M^*$. Chaque n_i ($i \in [p]$) s'écrit sous la forme $n_i = q_iL_i+l_i$, avec $q_i \in \mathbf{N}$ et $0 \leq l_i < L_i$; alors $x = y+d$, où $y = na + \sum q_iL_ib_i \in P^*$ et $d = l_1b_1+\cdots+l_pb_p \in D$. Ceci prouve l'inclusion dans l'autre sens.

Si M^* est de dimension 2, il s'écrit

$$M^* = a\mathbf{N}+b_1\mathbf{N}+\cdots+b_p\mathbf{N}+c\mathbf{N},$$

où les générateurs sont numérotés de sorte qu'en posant $c = (c', c'')$, on ait

$$b_i'a'' \leq a'b_i'',\ c''b_i' \leq b_i'c''\ (i \in [p]) \text{ et } c'a'' < a'c''. \tag{4.2}$$

En vertu de ces inégalités, il existe, pour chaque $i \in [p]$, des entiers non négatifs n_i, m_i non tous deux nuls, tels que

$$n_i(a'b_i''-a''b_i') = m_i(b_i'c''-b_i''c')$$

ou encore

$$b_i''(n_ia'+m_ic') = b_i'(n_ia'+mc'') = K_i, \tag{4.3}$$

d'où l'on déduit que $K_ib_i = (b_i'b_i''n_i)a+(b_i'b_i''m)c \in P^*$. Si $K_i \neq 0$, il existe un plus petit entier positif L_i tel que $L_ib_i \in P^*$.

Si $K_i = 0$, alors d'après (4.3) soit $b_i' = 0$, soit $b_i'' = 0$. Dans le premier cas, en vertu de (4.2), $c' = 0$, dans le deuxième cas $a'' = 0$, et on montre comme précédemment l'existence d'un entier $L_i > 0$ tel que soit $L_ib_i \in c\mathbf{N}$, soit $L_ib_i \in a\mathbf{N}$.

L'existence des entiers L_i ainsi établie, le reste de la preuve est identique au cas de la dimension 1.

La proposition ci-dessus montre qu'un sous-monoïde M^* de dimension 2 contenant des éléments de la forme $(0, b)$ et $(a, 0)$ est une union finie de réseaux, donc que $(M^*)^+$ est une partie rationnelle de $\{x, y\}^*$.

Il en découle également le

COROLLAIRE 4.2. *Soit M^* un sous-monoïde de dimension 1. Alors ou bien $(M^*)^+$ est une partie rationnelle de $\{x, y\}^*$, ou bien M^* est une union finie de droites.*

Ainsi les sous-monoïdes de dimension 1 ne peuvent appartenir, pour la relation $\rightsquigarrow$, qu'à deux classes: soit à la classe des parties rationnelles de $\{x, y\}^*$, soit à la classe des droites (Théorème 3.2).

Un sous-monoïde M^* qui est une partie reconnaissable de $\mathbf{N}^2$, donc tel que $(M^*)^+$ est une partie rationnelle de $\{x, y\}^*$ sera appelé *impropre*. Cette terminologie se justifie parce que un sous-monoïde impropre est rationnellement équivalent au monoïde $\mathbf{N}^2$. Un sous-monoïde de type fini qui n'est pas impropre sera dit *propre*. Si le sous-monoïde libre $P^* = (a', a'')\mathbf{N}+(b', b'')\mathbf{N}$ de dimension 2 est propre, alors $a'b' \neq 0$ ou $a''b'' \neq 0$. Si en effet les deux produits étaient nuls, avec par exemple $a' = 0$, alors $a'' = 0$ impliquerait que P^* est de dimension 1, et $b'' = 0$ que P^* est un réseau, donc impropre.

Un sous-monoïde libre $P^* = (a', a'')\mathbf{N}+(b', b'')\mathbf{N}$ est *réduit à gauche* (resp. *à droite*) si et seulement si $a' = b' \neq 0$ (resp. $a'' = b'' \neq 0$) et $(a', a'') \neq (b', b'')$. Il est *réduit* s'il est réduit à droite ou à gauche. Un sous-monoïde réduit est donc nécessairement propre et de dimension 2.

PROPOSITION 4.3. *Tout sous-monoïde libre propre, de dimension 2, est rationnellement équivalent à un sous-monoïde réduit de même fermeture convexe.*

Preuve. Soit $Q^* = c\mathbf{N}+d\mathbf{N}$ un sous-monoïde libre, propre, de dimension 2, posons $c = (c', c'')$, $d = (d', d'')$, et supposons par exemple $c'd' \neq 0$. Soit K le plus petit entier positif pour lequel il existe un entier L vérifiant $Kc' = Ld'$, et posons $a = (Kc', Kc'')$, $b = (Ld', Ld'')$ et $P^* = a\mathbf{N}+b\mathbf{N}$.

P^* est un sous-monoïde réduit à gauche. Nous allons montrer que $P^* \approx Q^*$. Considérons l'intersection de Q^* avec le réseau $R = (Kc', 1)\mathbf{N}^2$. $x = (x', x'') \in Q^* \cap R$ si et seulement si $x = nc+md$, avec $x' = nc'+md'$ multiple de Kc'. Par conséquent c' divise md', il existe donc un entier q vérifiant $qc' = md'$. En vertu de la minimalité de K, K divise q, donc L divise m, ce qui implique que K divise n. Par conséquent $x \in P^*$, et $Q^* \cap R \subset P^*$. Réciproquement, on a évidemment $P^* \subset Q^* \cap R$, donc P^* est image rationnelle de Q^*.

Pour démontrer la réciproque, soit $D = \{kc+ld\colon 0 \leq k < K, 0 \leq l < L\}$. Vérifions que $Q^* = \bigcup \{e+P^*\colon e \in D\}$ ce qui démontrera que Q^* est image rationnelle de P^*.

Clairement $e+P^* \subset Q^*$ pour tout $e \in D$. Réciproquement, soit $x = nc+md \in Q^*$. Effectuons la division avec reste, on obtient $n = qK+r$, $m = q'L+s$, $0 \leq r < K$, $0 \leq s < L$, donc $x = y+e$, avec $y = qKc+q'Ld = qa+q'b \in P^*$ et $e = rc+sd \in D$. Donc $x \in e+P^*$ et l'égalité cherchée est établie. Il est clair que $\hat{P}^* = \hat{Q}^*$.

Remarque. La construction de la démonstration montre qu'un sous-monoïde M libre, propre, de dimension 2, est *réductible à gauche* (i.e. rationnellement équivalent à un sous-monoïde réduit à gauche) si et seulement si M ne contient pas de point de la forme $(x', 0)$, $x' \in N\backslash\{0\}$, et *réductible à droite* si et seulement si il ne contient pas de point de la forme $(0, x'')$, $x'' \in N\backslash\{0\}$.

Ainsi, la fermeture convexe d'un sous-monoïde $M^* \subset \mathbf{N}^2$ de dimension 1 est de la forme $a\mathbf{N}+b$, pour certains $a, b \in \mathbf{N}^2$. Il résulte alors du Corollaire 4.2, qu'un sous-monoïde de dimension 1 est rationnellement équivalent à sa fermeture convexe. Cette propriété s'étend aux sous-monoïdes de dimension 2.

THÉORÈME 4.4. *Tout sous-monoïde de type fini est rationnellement équivalent à sa fermeture convexe.*

Il reste à démontrer ce théorème pour les sous-monoïdes propres de dimension 2. Nous démontrons d'abord le

LEMME 4.5. *Un sous-monoïde réduit est rationnellement équivalent à sa fermeture convexe.*

Preuve. Soit $P^* = a\mathbf{N}+b\mathbf{N}$, avec $a = (a', a'')$, $b = (a', b'')$ un sous-monoïde réduit à gauche, et supposons $a'' < b''$. Pour tout $d \in P^*$, notons C_d l'ensemble des points $x \in \mathbf{N}^2$ de la forme $d+\alpha a+\beta b$ $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Clairement $\hat{P}^* = \bigcup \{C_d\colon d \in P^*\}$, et $C_d \cap C_{d'} = \varnothing$ si $d \neq d'$. De plus $C_d = C_{d'}+d-d'$ si $d-d' \in \mathbf{N}^2$. Il en découle que $\hat{P}^* = \bigcup \{x+P^*\colon x \in C_0\}$. Par conséquent, $\hat{P}^*$ est image rationnelle de P^*.

Réciproquement, soit R le réseau $(a', 1)\mathbf{N}^2$, et posons $Q = (e, e)\,(\hat{P}^* \cap R)$, où $e = b''-a''$. Vérifions que

$$P^* = \bigcup \{ia+jb+Q\colon 0 \leq i, j < e\}. \tag{4.4}$$

Comme $y = (y', y'') \in \hat{P}^* \cap R$ si et seulement si $y'a'' \leq a'y'' \leq y'b''$ et $y' = a'n$, pour un certain $n \in \mathbf{N}$, on voit que y est de la forme $y = na+rc$ avec $c = (0, 1)$ et $0 \leq r \leq ne$. Par conséquent, comme $ec = (b-a)$, $x = (e, e)y \in Q$ si et seulement si

$$x = nea+r(b-a) \tag{4.5}$$

avec $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r \leq ne$.

Il en découle que $Q \subset P^*$, donc que l'union (4.4) est contenue dans P^*.

Réciproquement, soit $x = na+mb \in P^*$, et posons $n = qe+i$, $m = q'e+j$, avec $0 \leq i, j < d$. Alors $x = y+ia+jb$ avec $y = qea+q'eb = (q+q')ea+q'e(b-a)$, ce qui prouve, d'après (4.5), que $y \in P^*$, donc que $x \in Q$, et le lemme.

Démonstration du Théorème 4.4. Soit M^* un sous-monoïde de type fini, propre, de dimension 2. D'après la Proposition 4.1, il existe un sous-monoïde libre P^*, nécessairement de dimension 2, et une partie finie $D \subset M^*$ telle que $M^* = \bigcup \{d+P^*\colon d \in D\}$. Par conséquent $P^* \rightsquigarrow M^*$. De plus, on a $\hat{P}^* = \hat{M}^*$. P^* est rationnellement équivalent à un sous-monoïde réduit Q^* de même fermeture convexe (Proposition 4.3) qui est rationnellement équivalent, par le Lemme 4.5, à $\hat{Q}^*$. Par conséquent, on a $\hat{M}^* = \hat{P}^* = \hat{Q}^* \approx Q^* \approx P^* \rightsquigarrow M^*$. Or d'après l'égalité (4.4), et comme $\hat{P}^* = \hat{M}^*$

$$P^* = \bigcup \{ia+jb+(e, e)\,(\hat{M}^* \cap R)\colon 0 \leq i, j < e\}$$

pour un certain réseau R et un entier $e \in \mathbf{N}$. Ceci prouve que $\hat{M}^* \rightsquigarrow P^*$ et le théorème.

COROLLAIRE 4.6. *Un sous-monoïde est rationnellement équivalent: soit à une partie reconnaissable; soit à une droite, donc à S^0; soit à un sous-monoïde réduit.*

5. Le Poids d'un Sous-Monoïde. La notion de *poids* d'un sous-monoïde que nous introduisons maintenant va nous permettre de classifier complètement les sous-monoïdes de $\mathbf{N}^2$ par rapport à la relation "$\rightsquigarrow$". Elle permettra d'exhiber, d'autre part, en section 6, des familles infinies de parties rationnelles de $\mathbf{N}^2$ deux-à-deux rationnellement incomparables.

Définition. Soit M un sous-monoïde de type fini de $\mathbf{N}^2$ de dimension 2, et soit $P = a\mathbf{N}+b\mathbf{N}$ un sous-monoïde libre de même fermeture convexe que M. Posons $a = (a', a'')$, $b = (b', b'')$ et supposons que $b'\, a'' < a'\, b''$. Le *poids* $\omega(M)$ *du monoïde* M est le nombre $\omega(M) = a''b'/a'b''$.

Remarquons d'abord que la définition du poids d'un sous-monoïde est indépendante du sous-monoïde libre P choisi. Si, en effet, $\bar{P} = \bar{a}\mathbf{N}+\bar{b}\mathbf{N}$, est avec $\bar{a} = (\bar{a}', \bar{a}'')$, $\bar{b} = (\bar{b}', \bar{b}'')$, un autre sous-monoïde libre, l'égalité des fermetures convexes de P et $\bar{P}$ entraîne l'existence de deux nombres rationnels $p, q > 0$ tels que $a = p\bar{a}$, $b = q\bar{b}$, d'où l'on déduit que $a''b'\bar{a}'\bar{b}'' = a'b''\bar{a}''\bar{b}'$.

On voit que $0 \leq \omega(M) < 1$ et que $\omega(M) = 0$ si et seulement si $a''b' = 0$. Plus précisément, *si*$0 = \omega(M)$, les trois cas suivants exactement sont possibles: M est reconnaissable: si $a'' = b' = 0$; M est réductible seulement à gauche: si $a'' = 0$ et $b' \neq 0$; M est réductible seulement à droite: si $a'' \neq 0$ et $b' = 0$. En particulier, si $0 < \omega(M) < 1$, alors M est réductible à gauche et à droite.

Nous étendons la définition du poids aux droites et aux parties reconnaissables de $\mathbf{N}^2$ en posant $\omega(M) = 0$, si $M \in \mathrm{Rec}\ (\mathbf{N}^2)$; $\omega(M) = 1$, si $M \notin \mathrm{Rec}$ $(\mathbf{N}^2)$ et est une droite.

Le poids $\omega(M)$ d'un sous-monoïde M de type fini est un nombre rationnel $q \in [0, 1]$. Réciproquement, on a la

PROPOSITION 5.1. *Pour tout nombre rationnel q vérifiant* $0 \leq q \leq 1$, *il existe un sous-monoïde M de* $\mathbf{N}^2$ *de type fini tel que* $\omega(M) = q$.

Preuve. Comme $\omega(S^0) = 1$ et $\omega(\mathbf{N}^2) = 0$, on peut supposer q de la forme $q = r/s$, avec $0 < r < s$. Soit alors $P = (1, r)\mathbf{N}+(1, s)\mathbf{N}$; on a $\omega(P) = q$, d'où la proposition.

PROPOSITION 5.2. *Soient M et M' deux sous-monoïdes de* $\mathbf{N}^2$ *de type fini; si* $\omega(M) = \omega(M') > 0$, *alors M et M' sont rationnellement équivalents.*

Preuve. Si $\omega(M) = \omega(M') = 1$, alors M et M' sont des sous-monoïdes de dimension 1 non reconnaissables, donc unions finies de droites d'après le corollaire 4.2. Par le Théorème 3.2, M et M' sont rationnellement équivalents.

Supposons donc $0 < \omega(M) = \omega(M') < 1$. Alors M et M' sont en particulier réductibles à gauche. Il existe donc deux sous-monoïdes libres $P = (a', a'')\mathbf{N}+ (a', b'')\mathbf{N}$ $(0 < a'' < b'')$ et $Q = (c', c'')\mathbf{N}+(c'\ d'')\mathbf{N}$ $(0 < c'' < d'')$ vérifiant $\hat{M} = \hat{P}$ et $\hat{M}' = \hat{Q}$. Comme $M \approx P$ et $M' \approx Q$ par le Théorème 4.4, et

$\omega(P) = \omega(Q) = \omega(M)$, il suffit de montrer que $P \approx Q$. Or $\omega(P) = a''/b''$; $\omega(Q) = c''/d''$. En posant $a''/b'' = c''/d'' = r/s$, avec $0 < r < s$, et r, s premiers entre eux, il s'en suit qu'avec $T = (1, r)\mathbf{N}+(1, s)\mathbf{N}$, on a $P = (a', k)T$, et $Q = (c', l)T$, où $k = b''/s = a''/r$ et $l = c''/r = d''/s$. Par le Lemme 2.2, P et Q sont donc rationnellement équivalents à T, donc rationnellement équivalents entre eux, ce qui achève la preuve.

Appelons *primitif* un sous-monoïde libre de $\mathbf{N}^2$ qui est de la forme $P = (1, a)\mathbf{N}+(1, b)\mathbf{N}$ ($0 \leq a \leq b$, pgcd $(a, b) = 1$) ou $T_0 = (1, 1)\mathbf{N}+(0, 1)\mathbf{N}$.

COROLLAIRE 5.3. *Tout sous-monoïde propre de type fini M est rationnellement équivalent à un sous-monoïde primitif.*

Preuve. Si $0 < \omega(M) \leq 1$, le corollaire résulte de la proposition précédente, en remarquant que S^0 est bien un sous-monoïde primitif. Si $\omega(M) = 0$, comme M est propre, il est réductible d'un côté et d'un côté seulement. Supposons donc M réductible à gauche par exemple. Soit $Q = (a, 0)\mathbf{N}+(a, b)\mathbf{N}$ $(0 < a < b)$ un sous-monoïde de même fermeture convexe que M, donc rationnellement équivalent à M; on en tire $Q = (a, b)$ $((1, 0)\mathbf{N}+(1, 1)\mathbf{N})$, et l'application du Lemme 2.2 achève la preuve.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve du théorème suivant qui donne la classification complète des sous-monoïdes de type fini de $\mathbf{N}^2$ par rapport à la relation $\rightsquigarrow$ en terme de poids.

THÉORÈME 5.4. *Soient M et M' deux sous-monoïdes propres de type fini de* $\mathbf{N}^2$. *(1) Si $\omega(M) > 0$, alors $\omega(M) \geq \omega(M')$ si et seulement si $M \rightsquigarrow M'$. (2) Si $\omega(M) = \omega(M') = 0$, alors: (i) si M et M' sont réductible du même côté, alors $M \approx M'$; (ii) sinon, M et M' sont rationnellement incomparables.*

Rappelons que dans le cas trivial où l'un des deux sous-monoïdes est impropre, il est image rationnelle de l'autre. Nous démontrons d'abord un lemme qui, joint à la Proposition 5.2, montre que la condition de la première partie est nécessaire.

LEMME 5.5. *Soient M et M' deux sous-monoïdes propres de type fini de* $\mathbf{N}^2$; *si $\omega(M) > \omega(M')$ alors M' est image rationnelle de M.*

Preuve. Si $\omega(M) = 1$, alors M est rationnellement équivalent à S^0, et le lemme résulte du Théorème 2.3.

Supposons donc $0 < \omega(M) < 1$. Par le Corollaire 5.3, le monoïde M est rationnellement équivalent à un sous-monoïde primitif $P = (1, a)\mathbf{N}+(1, b)\mathbf{N}$ avec $0 < a < b$, et si M' est réductible à gauche par exemple, il est rationnellement équivalent à $Q = (1, c)\mathbf{N}+(1, d)\mathbf{N}$ avec $0 \leq c < d$.

Si $c = 0$, alors $Q = (1, d)T_0$, et comme $(1, b)T_0$ est rationnellement équivalent à T_0, on peut supposer $b = d$. Considérons alors la relation rationnelle $R \subset \{x, y\}^* \times \{x, y\}^*$ définie par: $R = (x, x)^*\{(y, 1), (y, y)\}^*$, et soit τ l'application rationnelle associée à R. Clairement, on a $\tau(x^k y^l) = \{x^k y^s : 0 \leq s \leq l\}$, d'où $\tau((\hat{P})^+) = \hat{Q}^+$. Par application du Théorème 4.4 le lemme se trouve donc démontré dans le cas où $c = 0$.

Si $c \neq 0$, comme $P \approx (1, c)P$ et $Q \approx (1, a)Q$, on peut supposer $a = c$ et l'hypothèse se traduit par: $b < d$. Soit alors $R \subset \{x, y\}^* \times \{x, y\}^*$ la relation rationnelle

$$R = (x, x)^*\{(y, y), (y^b, y^{b+1}), \cdots, (y^b, y^d)\}^*,$$

et τ l'application rationnelle associée à R. On a

$$\tau(x^k y^l) = \{x^k y^s : l \le s \le l + t(d-b)\},$$

où t est le plus grand entier vérifiant $tb \le l$. Par conséquent,

$$\tau\{x^k y^l : ak \le l \le bk\} = \{x^k y^s : ak \le s \le bk + t_k(d-b)\},$$

où t_k est le plus grand entier tel que $t_k b \le kb$, donc $t_k = k$. Il en résulte que $\tau((\hat{P})^+) = (\hat{Q})^+$, et par le Théorème 4.4, le lemme est donc complètement démontré.

Avant de démontrer que la condition de la première partie du théorème est suffisante, nous avons besoin d'un autre lemme qui dit qu'un langage algébrique non-rationnel $\subset x^*y^*$ ne peut être l'image rationnelle d'une partie $B \subset x^*y^*$ où le nombre d'occurrence de x ou de y dans les mots de B soit borné.

LEMME 5.6. *Soient $A \subset x^*y^*$ un langage algébrique non rationnel, $B \subset x^*y^*$ et τ une application rationnelle de $\{x, y\}^*$ dans lui-même telle que $\tau B = A$. Pour tout $(r, s) \in \mathbf{N}^2$, soit:*

$$\lambda(r, s) = \min\{k \mid \exists l \in \mathbf{N} : x^k y^l \in B \text{ et } x^r y^s \in \tau x^k y^l\},$$

$$\mu(r, s) = \min\{l \mid \exists k \in \mathbf{N} : x^k y^l \in B \text{ et } x^r y^s \in \tau x^k y^l\}.$$

Alors $\sup\{\lambda(r, s) : x^r y^s \in A\} = \sup\{\mu(r, s) : x^r y^s \in A\} = \infty$.

Preuve. Supposons par exemple $\sup\{\lambda(r, s) : x^r y^s \in A\} = K < \infty$, et posons $B_K = B \cap x^K y^*$. Alors $A = \tau B_K$. On a $B_K = \bigcup_{k=0}^{K} x^k L_k$, où $L_k = \{y^n : x^k y^n \in B\}$. Or L_k est algébrique, donc rationnel, par conséquent B_K est un langage rationnel. Il en est donc de même de A, contrairement à l'hypothèse.

LEMME 5.7. *Soient M et M' deux sous-monoïdes de type fini de $\mathbf{N}^2$, tels que $M \rightsquigarrow M'$; alors $\omega(M) \ge \omega(M')$.*

Démonstration par l'absurde. Supposons donc que $M \rightsquigarrow M'$, et que

$$\omega(M) < \omega(M'). \tag{5.1}$$

Alors M' n'est pas reconnaissable, puisque $\omega(M') > 0$, et de même de M, sinon son image rationnelle M' le serait. Le monoïde M est réductible, à gauche par exemple, et par le Corollaire 5.3, on peut supposer M et M' primitifs, donc de la forme $M = (1, a)\mathbf{N} + (1, b)\mathbf{N}$, $M' = (1, c)\mathbf{N} + (1, d)\mathbf{N}$, avec, compte tenu de (5.1):

$$0 \le a < b, \qquad 0 < c \le d, \qquad ad < bc. \tag{5.2}$$

Comme $M \rightsquigarrow M'$, il existe une application rationnelle $\tau : X^* \to X^*$, où $X = \{x, y\}$, telle que $\tau A = B$, où l'on a posé $A = (\hat{M})^+$ et $B = (\hat{M}')^+$. Par la Proposition 1.1, il existe un alphabet Z, un langage $K \in \mathrm{Rat}(Z^*)$, deux homomorphismes alphabétiques θ, φ de Z^* dans X^* tels que $B = \varphi(\theta^{-1} A \cap K)$ et de plus

$$\{z \in Z : \varphi z = \theta z = 1\} = \varnothing. \tag{5.3}$$

Soit q le nombre d'états de l'automate minimal reconnaissant K, et k_0 un entier tel que $k_0(b-a) \ge q(b+1)$.

Fixons, ce qui est possible en vertu du Lemme 5.6, deux entiers r et s

suffisamment grands pour que, si h est le mot le plus court de $\theta^{-1}A \cap K$ tel que $\varphi h = x^r y^s \in B$, on ait $\theta h = x^k y^l$ avec $k \geq k_0$. Le mot $h \in Z^*$ admet deux factorisations $h = h_1 h_2 = g_1 g_2$, avec $\varphi h_1 = x^r$, $\varphi h_2 = y^s$, $\theta g_1 = x^k$, $\theta g_2 = y^l$. Supposons par exemple $|g_1| \leq |h_1|$, et posons $g_1 g = h_1$. Comme $|g_1| \geq k$ et $|h_2| \geq s$, il existe deux factorisations $g_1 = v'vv''$, $h_2 = w'ww''$, $0 < |v|, |w| \leq q$, telles que $f_{n,m} = v'v^n v'' g w' w^m w'' \in K$ pour tout $n, m \geq 0$. Posons alors

$$\alpha = |\theta v|,\ \beta = |\theta w|, \gamma = |\theta v' v''|,\ \delta = |\theta g w' w''|,$$
$$\alpha' = |\varphi v|,\ \beta' = |\varphi w|,\ \gamma' = |\varphi v' v'' g|,\ \delta' = |\varphi w' w''|.$$

On voit que $\theta f_{n,m} \in A$ si et seulement si $(\alpha n + \gamma, \beta m + \delta) \in A^0 = \hat{M}$, donc si et seulement si

$$(\alpha n + \gamma)a \leq \beta m + \delta \leq (\alpha n + \gamma)b. \tag{5.4}$$

De même, $\varphi f_{n,m} \in B$ si et seulement si

$$(\alpha' n + \gamma')c \leq \beta' m + \delta' \leq (\alpha' n + \gamma')d. \tag{5.5}$$

D'autre part, comme $\tau A = B$, tout couple d'entiers (n, m) vérifiant (5.4) vérifie également (5.5).

Vérifions maintenant que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Si, en effet, on avait $\alpha = 0$, tout couple $(n, 1)$ $(n \in \mathbf{N})$ satisferait à (5.4) puisqu'il en est ainsi pour $n = 1$, donc satisferait également à (5.5) ce qui implique, puisque $c \neq 0$, que $\alpha' = 0$, en contradiction avec (5.3) puisque $v \in ZZ^*$. De même $\beta = 0$ entrainerait que les couples $(1, m)$ $(m \in \mathbf{N})$ satisfont à (5.4), donc $\beta' = 0$, ce qui est impossible pour la même raison.

Soit alors $n \in \mathbf{N}$ quelconque, et m le plus petit entier tel que le couple (n, m) vérifie l'équation (5.4), donc tel que

$$\beta(m-1) + \delta < (\alpha n + \gamma)a \leq \beta m + \delta.$$

Comme le couple (n, m) satisfait à (5.5), on obtient les deux inégalités:

$$(\alpha' n + \gamma')c \leq \beta' m + \delta';$$
$$\beta(m-1) + \delta < (\alpha n + \gamma)a.$$

Comme $\beta > 0, \beta' \geq 0$, on en tire, en multipliant la première par β et la deuxième par β',

$$\beta[(\alpha' n + \gamma')c - \delta'] \leq \beta\beta' m \leq \beta'[(\alpha n + \gamma)a + \beta - \delta],$$

donc

$$(\beta\alpha' c - \beta'\alpha a)n \leq \beta'(\gamma a + \beta - \delta) - \beta(\gamma' c - \delta').$$

Cette équation est satisfaite pour tout $n \in \mathbf{N}$. On en tire

$$\beta\alpha' c \leq \beta'\alpha a. \tag{5.6}$$

Considérant maintenant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le plus grand entier m pour lequel le couple (n, m) satisfait à l'équation (5.4), on obtient de manière analogue l'inégalité

$$\beta'\alpha b \leq \beta\alpha' d, \tag{5.7}$$

d'où finalement, en multipliant (5.6) par (5.7), $\alpha\alpha'\beta\beta' bc \leq \alpha\alpha'\beta\beta' ad$.

En vertu de (5.2), ceci implique $\alpha'\beta' = 0$, donc, par (5.6) et (5.7), on a $\alpha' = \beta' = 0$. Il en découle en particulier que $\varphi f_{01} = \varphi f_{10} = x^r y^s \in B$.

De par la définition de k_0, l'une au moins des inégalités $ka \leq l-\beta \leq kb$, $(k-\alpha)a \leq l \leq (k-\alpha)b$ est satisfaite. Si en effet $ka+\beta > l$, alors, puisque $q \geq \alpha, \beta$, donc $k(b-a) \geq \alpha b+\beta$, on a $l < ka+\beta \leq (k-\alpha)b$. D'autre part, on a toujours $ka \leq l \leq kb$ parce que $x^k y^l \in A$. Partant, soit $x^{k-\alpha}y^l = \theta f_{0,1}$, soit $x^k y^{l-\beta} = \theta f_{1,0}$ appartient à A. Or, les deux mots $f_{0,1}$ et $f_{1,0}$ sont strictement plus courts que $h = f_{1,1}$, ce qui contredit la définition de h et achève la preuve.

La Proposition 5.2, et les Lemmes 5.5 et 5.7 démontrent la première partie du Théorème 5.4. D'autre part, un sous-monoïde M propre de type fini et de poids $\omega(M)$ nul est, par le Corollaire 5.3, rationnellement équivalent à l'un des deux sous-monoïdes primitifs $T_0 = (1, 0)\mathbf{N}+(1, 1)\mathbf{N}$ ou $T_1 = (0, 1)\mathbf{N}+(1, 1)\mathbf{N}$, deux sous-monoïdes de poids nuls sont rationnellement équivalents s'ils sont réductibles du même côté. Il suffit donc, pour achever la preuve du Théorème 5.4, de démontrer le

LEMME 5.8. *Les sous-monoïdes T_0 et T_1 sont rationnellement incomparables.*

En effet supposons que $T_1 = \varphi(\theta^{-1}T_0 \cap K)$, où $K \in \mathrm{Rat}\,(Z^*)$, $\theta, \varphi: Z^* \to X^*$ sont des homomorphismes alphabétiques.

Soit $r \in \mathbf{N}$, et h le mot le plus court de $\theta^{-1}T_0 \cap L$ tel que $\varphi h = x^r y^r$ et posons $\theta h = x^k y^l$. On peut choisir, en vertu du Lemme 5.5, r assez grand pour que $r, k, l \geq q$, où q est le nombre d'états de l'automate minimal reconnaissant K.

Soit h_2 le plus grand facteur droit de h tel que $\varphi h_2 \in y^*$ et $\theta h_2 \in y^*$. Alors $|h_2| \geq \min\,(r, l) \geq q$, et il existe une factorisation $h_2 = w'ww''$, $0 < |w| \leq q$, de h_2 telle que, posant $h = h_1 h_2$, on ait $h_1 w'w^*w'' \subset K$. En particulier, $f = h_1 w'w'' \in K \cap \theta^{-1}T_0$, donc $\varphi f \in T_1$. Si $|\varphi w| > 0$, alors $\varphi f = x^r y^{r-|\varphi w|} \notin T_1$. Donc $\varphi w = e$, et $\varphi f = \varphi h$. Or f est strictement plus court que h, contrairement à l'hypothèse. On démontre de même que T_0 ne peut être image rationnelle de T_1.

COROLLAIRE 5.9. *Tout sous-monoïde propre, de type fini est rationnellement équivalent à un et un seul monoïde primitif.*

Les monoïdes primitifs forment donc un système de représentants des classes de sous-monoïdes rationnellement équivalents.

6. Bimonoides. Mis à part les deux sous-monoïdes T_0 et T_1, deux sous-monoïdes de type fini de $\mathbf{N}^2$ sont toujours rationnellement comparables. Dans le but d'exhiber des familles de parties rationnelles deux-à-deux rationnellement incomparables, nous étudions dans ce paragraphe des unions de deux sous-monoïdes de $\mathbf{N}^2$ que nous appelons bimonoïdes.

Définition. Un *bimonoide B* est l'union de deux sous-monoïdes convexes propres M et M' de type fini de $\mathbf{N}^2$, vérifiant $M \cap M' = \{0\}$ et $0 < \omega(M)+\omega(M') < 2$.

Les restrictions de la définition se justifient de la manière suivante: La convexité des sous-monoïdes M et M' est, comme on le verra au paragraphe suivant, essentielle. Si $\omega(M) = \omega(M') = 0$, alors mis à part le cas trivial où M et M' sont tous deux des parties reconnaissables de $\mathbf{N}^2$, on a $M \approx T_0$ et $M' \approx T_1$ ou inversement, de sorte que B est le complément d'une partie de $\mathbf{N}^2$ de la forme $1+P$, où P est un sous-monoïde convexe de type fini de $\mathbf{N}^2$. Ces parties ont des propriétés particulières qui seront examinées au paragraphe suivant. Si $\omega(M) = \omega(M') = 1$, alors M et M' sont des unions de droites, et on est ramené à un cas connu. Le cas intermédiaire où $0 = \omega(M) < \omega(M')$ a été exclu pour alléger les démonstrations. Les résultats essentiels s'étendent sans peine, comme on peut le vérifier, à ce cas.

Soit donc $B = M \cup M'$ un bimonoïde. Il existe donc des nombres rationnels $0 < r_1 \leq r_2 < r_3 \leq r_4 < \infty$ tels que $(n, m) \in M$ si et seulement si $nr_1 \leq m \leq nr_2$, et $(n, m) \in M'$ si et seulement si $nr_3 \leq m \leq r_4$. Nous écrirons $B = B(r_1, r_2, r_3, r_4)$. Vérifions d'abord une première propriété:

PROPOSITION 6.1. *Soient $B = B(r_1, r_2, r_3, r_4)$ et $B' = B(r_1', r_2', r_3', r_4')$ deux bimonoïdes; s'il existe un nombre rationnel $t > 0$ tel que $r_i' = tr_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, alors B et B' sont rationnellement équivalents.*

Preuve. Posons $t = p/q$, avec $0 < p, q$, et soit B'' défini par $B = (p, q)B''$. Ainsi $(n, m) \in B''$ si et seulement si $(pn, qm) \in B$, donc si et seulement si $pnr_1 \leq qm \leq pnr_2$ ou $pnr_3 \leq qm \leq pnr_4$, par conséquent si et seulement si $nr_1' \leq m \leq nr_2'$ ou $nr_3' \leq m \leq nr_4'$, donc si et seulement si $(n, m) \in B'$. Ce qui prouve que $B'' = B'$, donc que B et B' sont rationnellement équivalents par le Lemme 2.2. D'où la proposition.

Il résulte de la proposition qu'un bimonoïde est caractérisé, en ce qui concerne la relation $\rightsquigarrow$, par la donnée des trois nombres

$$p_1 = \frac{r_1}{r_2} = \omega(M), \qquad p_2 = \frac{r_3}{r_4} = \omega(M'), \qquad q = \frac{r_2}{r_3},$$

où q est le poids du monoïde convexe $M'' = \{(n, m)\colon nr_2 \leq m \leq nr_3\}$, avec la condition supplémentaire $0 < p_1 + p_2 < 2$, et $0 < q < 1$.

Le théorème suivant montre que les sous-monoïdes et les bimonoïdes sont, du point de vue de l'équivalence rationnelle, des objets distincts.

THÉORÈME 6.2. *Un bimonoïde et un sous-monoïde de type fini de $\mathbf{N}^2$ ne sont jamais rationnellement équivalents.*

Nous établissons d'abord un lemme qui servira dans la suite et qui est plus précis que le Lemme 5.6, les hypothèses étant plus fortes.

LEMME 6.3. *Soient A un sous-monoïde propre de type fini ou un bimonoïde, B un sous-monoïde de type fini de poids $\omega(B) > 0$ ou un bimonoïde; soit τ une application rationnelle de $\{x, y\}$ dans lui-même telle que $\tau A^+ = B^+$; pour tout couple d'entiers $K, L \geq 0$, il existe deux entiers R, S tels que, quels que soient $r \geq R, s \geq S$ vérifiant $(r, s) \in B$, on ait $k \geq K, l \geq L$ pour tout $k, l \in \mathbf{N}$ tels que $(k, l) \in A$ et $x^r y^s \in \tau x^k y^l$.*

Autrement dit, pour tout K, L, il existe R, S tels que $[\tau^{-1}(B \cap ((R, S) + \mathbf{N}^2)^+]^0 \cap A \subset (K, L) + \mathbf{N}^2$.

Preuve. Supposons l'énoncé faux; il existe donc deux entiers $K, L \in \mathbf{N}$ tels que, pour tout couple d'entiers R, S, il existe $(r, s) \in B$ vérifiant $r \geq R$, $s \geq S$ et tel qu'il existe $(k, l) \in A$ avec $\tau x^k y^l \ni x^r y^s$ et $k < K$ ou $l < L$. Soit alors $A_{K,L} = A \cap \{(k, l)\colon k < K \text{ ou } l < L\}$. Si A est unbimonoïde, ou un sous-monoïde réductible à gauche et à droite, alors $A_{K,L}$ est fini. Si A est un sous-monoïde réductible seulement d'un côté, $A_{K,L}$ est infini mais reconnaissable.

Dans tous les cas, posant $B^+_{K,L} = \tau A^+_{K,L}$, $B_{K,L}$ est une partie reconnaissable de $\mathbf{N}^2$. Comme $B_{K,L}$ est contenu dans B, qui est soit un bimonoïde, soit un sous-monoïde de type fini de poids positif, $B_{K,L}$ est un ensemble fini. Par conséquent, pour R', S' assez grands, $B_{K,L} \cap ((R', S')+\mathbf{N}^2) = \varnothing$, d'où la contradiction et le lemme.

Le Théorème 6.2 se déduit des deux propositions suivantes qui indiquent les liens entre le poids d'un sous-monoïde et les poids des sous-monoïdes convexes composant un bimonoïde.

PROPOSITION 6.4. *Soit $B = M \cup M'$ un bimonoïde et P un sous-monoïde de type fini. Alors $P \rightsquigarrow B$ si et seulement si $P \rightsquigarrow M$ et $P \rightsquigarrow M'$, donc si et seulement si $\omega(P) \geq \omega(M)$ et $\omega(P) \geq \omega(M')$.*

Preuve. Si $P \rightsquigarrow M$ et $P \rightsquigarrow M'$, alors $P \rightsquigarrow B$ et la condition de la proposition est suffisante.

Réciproquement, soient $0 < a \leq b < c \leq d$ les quatre nombres rationnels tels que $B = B(a, b, c, d)$; donc $x = (x', x'') \in M$ si et seulement si $ax' \leq x'' \leq bx'$, et $x \in M''$ si et seulement si $cx' \leq x'' \leq dx'$. On a $\omega(M) = a/b$ et $\omega(M') = c/d$.

Supposons l'énoncé faux, donc par exemple $\omega(P) < \omega(M)$; on peut supposer P de la forme $P = (1, p)\mathbf{N}+(1, q)\mathbf{N}$ $(0 \leq p < q)$. Par conséquent $bp < aq$.

Par la Proposition 1.1, il existe un alphabet Z, un langage rationnel $K \in \mathrm{Rat}\,(Z^*)$, deux homomorphismes alphabétiques θ, φ: $Z^* \to X^* = \{x, y\}^*$ vérifiant

$$\{z \in Z : \varphi z = \theta z = 1\} = \varnothing \tag{6.1}$$

et tels que $B^+ = \varphi(\theta^{-1}\hat{P}^+ \cap K)$.

Soit $x^ry^s \in M$, h le mot le plus court de $\theta^{-1}\hat{P}^+ \cap K$ tel que $\varphi h = x^ry^s$, et posons $\theta h = x^ky^l$. En vertu du Lemme 6.3, r et s peuvent être choisis suffisamment grands pour que $r \geq Q(Qp+Q)/(c-b)+Q$ et $s, k, l \geq Q$, où Q est le nombre d'états de l'automate minimal reconnaissant K.

Le mot h admet deux factorisations $h = h_1h_2 = g_1g_2$ telles que $\varphi h_1 = x^r$, $\varphi h_2 = y^s$, $\theta g_1 = x^k$, $\theta g_2 = y^l$, et en supposant par exemple $g_1 g = h_1$ pour un $g \in Z^*$, il existe des factorisations $g_1 = v'vv''$, $h_2 = w'ww''$, $0 < |v|, |w| \leq q$ telles que $f_{n,m} = v'v^nv''gw'w^mw'' \in K$ pour tout n, $m \in \mathbf{N}$.

Posons $\alpha = |\theta v|$, $\beta = |\theta w|$, $\gamma = |\theta v'v''|$, $\delta = |\theta gw'w''|$ et $\alpha' = |\varphi v|$, $\beta' = |\varphi w|$, $\gamma' = |\varphi v'v''g|$, $\delta' = |\varphi w'w''|$. Clairement:

$$\theta f_{n,m} \in \hat{P}^+ \Leftrightarrow (\alpha n+\gamma)p \leq \beta m+\delta \leq (\alpha n+\gamma)q, \tag{6.2}$$

$$\varphi f_{n,m} \in M^+ \Leftrightarrow (\alpha' n+\gamma')a \leq \beta' m+\delta' \leq (\alpha' n+\gamma')b, \tag{6.3}$$

$$\varphi f_{n,m} \in M'^+ \Leftrightarrow (\alpha' n+\gamma')c \leq \beta' m+\delta' \leq (\alpha' n+\gamma')d. \tag{6.4}$$

De plus, si (n, m) vérifie (6.2), alors il vérifie (6.3) ou (6.4). Remarquons que $\alpha\beta \neq 0$. Si en effet $\alpha = 0$, on aurait $\alpha' \neq 0$ par (6.1), $\theta f_{n,1} = \theta h \in \hat{P}^+$ pour tout n, donc $(n, 1)$ vérifierait (6.3) ou (6.4) pour tout $n \in \mathbf{N}$ ce qui n'est pas. On démontre de même que $\beta \neq 0$.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $i(n)$ le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $\theta f_{n,m} \in \hat{P}^+$.

Alors $\varphi f_{n, i(n)} \in M^+$. En effet, ceci est vrai pour $n = 1$ et par conséquent vrai pour tout n tel que $i(n) = 1$. Supposons le vérifié pour $n > 1$ avec $i(n) > 1$:

$$\begin{aligned} &\beta(i(n)-1)+\delta < (\alpha n+\gamma)p \leq \beta i(n)+\delta \leq (\alpha n+\gamma)q \\ &\qquad\qquad (\alpha' n+\gamma')a \leq \beta' i(n)+\delta' \leq (\alpha' n+\gamma')b \end{aligned} \tag{6.5}$$

et faux pour $n+1$, i.e. $\varphi f_{n, i(n)} \in M'^+$:

$$\begin{aligned} &\beta(i(n+1)-1)+\delta < (\alpha(n+1)+\gamma)p \leq \beta i(n+1)+\delta \\ &\qquad\qquad (\alpha' n+\gamma')c \leq \beta' i(n+1)+\delta'. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Des premières inéquations (6.5), on déduit que

$$\beta(i(n+1)-i(n)) < \alpha p+\beta \tag{6.7}$$

et des équations (6.6) que

$$\beta'(i(n+1)-i(n)) \geq (\alpha' n+\gamma')\,(c-b). \tag{6.8}$$

Le membre droit de (6.8) n'est pas nul, donc $\beta' \neq 0$. De plus, comme $\gamma' \geq r-Q$, de la borne sur r on déduit que $\beta\gamma'(c-b) \geq \beta'(\alpha p+\beta)$, car par construction $\alpha, \beta, \beta' \leq Q$. Or ceci contredit (6.7), et prouve l'assertion.

Des équations (6.5), on déduit que

$$(\beta\alpha' a-\beta'\alpha p)n \leq \beta'(\gamma p-\delta+\beta)-\beta(\gamma' a-\delta').$$

Ceci étant vrai pour tout n, on a $\beta\alpha' a \leq \beta'\alpha p$.

Remarquons maintenant que $\varphi f_{n,m} \in M^+$ et $\varphi f_{n,m+1} \in M^+$ entrainent $\varphi f_{n,m+1} \notin M'^+$. S'il n'en était pas ainsi, on aurait simultanément $\beta' m+\delta' \leq (\alpha' n+\gamma')b < \beta'(m+1)+\delta'$ et $(\alpha' n+\gamma')c \leq \beta'(m+1)+\delta'$, donc $(\alpha' n+\gamma')(c-b) \leq \beta'$ en contradiction avec la définition de r. Il s'en suit que $\theta f_{n,m} \in \hat{P}^+ \Rightarrow \varphi f_{n,m} \in M^+$ pour tout entier $n, m \in \mathbf{N}$. Le reste de la preuve est alors identique à celle du Lemme 5.7, donnant $\omega(P) \geq \omega(M)$, ce qui contredit l'hypothèse de départ et achève la preuve.

PROPOSITION 6.5. *Soit $B = M \cup M'$ un bimonoïde et P un sous-monoïde de type fini; si $B \rightsquigarrow P$ alors $\hat{B} \rightsquigarrow P$.*

Preuve. Si P est impropre, il n'y a rien à prouver. Supposons donc P propre, réduit à gauche et soient a, b, c, d, p, q définis comme dans la preuve précédente.

Clairement $\omega(\hat{B}) = a/d$, et pour démontrer le lemme il suffit de vérifier que $dp \leq aq$. On peut donc supposer $p > 0$, c'est-à-dire $\omega(P) > 0$. Supposons donc que P est de la forme $P = \varphi(\theta^{-1}B \cap K)$, où K, θ, φ ont la signification de la preuve précédente.

Soit $x^r y^s \in P$, avec r, s assez grands, h le mot le plus court de $\theta^{-1}B \cap K$ tel que $\varphi h = x^r y^s$, posons $\theta h = x^k y^l$, et considérons, comme dans la preuve de la proposition précédente, la famille $f_{n,m} = v'v^n v'' g w' w^m w'' \in K$ $(n, m \in \mathbf{N})$ de mots avec la même définition de $\alpha, \beta, \cdots, \gamma', \delta'$. Alors:

$$\begin{aligned} &\varphi f_{n,m} \in \hat{P}^+ \Leftrightarrow (\alpha' n+\gamma')p \leq \beta' m+\delta' \leq (\alpha' n+\gamma')q, \\ &\theta f_{n,m} \in M^+ \Leftrightarrow (\alpha n+\gamma)a \leq \beta m+\delta \leq (\alpha n+\gamma)b, \\ &\theta f_{n,m} \in M'^+ \Leftrightarrow (\alpha n+\gamma)c \leq \beta m+\delta \leq (\alpha n+\gamma)d. \end{aligned} \tag{6.9}$$

On vérifie comme précédemment que $\alpha\beta \neq 0$ et que, si $\alpha' = 0$ ou $\beta' = 0$, on obtiendrait une contradiction avec la minimalité de h. Soit alors n assez grand fixé, et m_1 (resp. m_2) le plus petit (resp. plus grand) entier m tel que $\theta f_{n,m} \in B^+$. On a donc:

$$(6.10) \qquad \begin{aligned} \beta(m_1-1)+\delta &< (\alpha n+\gamma)a \leq \beta m_1+\delta, \\ \beta(m_2)+\delta &\leq (\alpha n+\gamma)d < \beta(m_2+1)\delta, \end{aligned}$$

et (n, m_1), (n, m_2) vérifient (6.9).

Comme dans la preuve de la proposition précédente, on déduit de (6.9) et (6.10) que $\alpha\alpha'\beta\beta' pd \leq \alpha\alpha'\beta\beta' aq$, donc l'assertion, puisque $\alpha\alpha'\beta\beta' \neq 0$.

Preuve de 6.2. Supposons le théorème faux, et $B = B(r_1, r_2, r_3, r_4) = M \cup M'$ rationnellement équivalent à un sous-monoïde P de type fini de $\mathbf{N}^2$; on a $\omega(M) = r_1/r_2$, $\omega(M') = r_3/r_4$, $0 < \omega(\hat{B}) = r_1/r_4 < \omega(M)\omega(M')$. D'après la Proposition 6.4, on a $\omega(P) \geq \omega(M)$ et $\omega(P) \geq \omega(M')$, et d'après la Proposition 6.5, on a $\omega(\hat{B}) \geq \omega(P)$; on en tire $\omega(\hat{B}) \geq \omega(M)\omega(M')$, une contradiction et la démonstration du théorème.

Etant donné un bimonoïde $B = B(r_1, r_2, r_3, r_4) = M \cup M'$, notons $p(B) = \omega(M) = r_1/r_2$, $p'(B) = \omega(M') = r_3/r_4$, $q(B) = r_2/r_3$. Le théorème suivant démontre l'existence des familles de bimonoïdes deux-à-deux incomparables annoncée en tête de ce paragraphe.

THÉORÈME 6.6. *Soient P et Q deux sous-monoïdes de type fini de $\mathbf{N}^2$ vérifiant $1 > \omega(P)^2 > \omega(Q)$; alors $P \rightsquigarrow B \rightsquigarrow Q$ pour tout bimonoïde B tel que $p(B) = p'(B) \leq \omega(P)$ et $\omega(Q) \leq (q(B)p(B))^2$; de plus, deux tels bimonoïdes B et B', si $p(B) = p(B')$, ne sont rationnellement comparables que s'ils sont rationnellement équivalents.*

Remarquons que si $\omega(P) = 1$, on a $p(B) = p(B') < \omega(P)$ pour ne pas contredire la définition des bimonoïdes. D'autre part, si $1 > \omega(P) = p(B) = p'(B)$, on voit que si $q(B)$ est suffisamment proche de 1, la condition $\omega(Q) = (q(B)\omega(P))^2$ est satisfaite, par conséquent qu'il existe alors une infinité de bimonoïdes satisfaisant les contraintes du théorème, donc deux-à-deux rationnellement incomprables.

Nous établissons d'abord le lemme suivant.

LEMME 6.7. *Soient $B_1 = M_1 \cup M_1'$, $B_2 = M_2 \cup M_2'$ deux bimonoïdes tels que $M_1 = M_2 \not\approx S^0$, $\omega(M_1') = \omega(M_2') < 1$. Alors B_1 et B_2 sont rationnellement comparables si et seulement si ils sont égaux.*

Preuve. Il suffit de prouver que si $B_1 \rightsquigarrow B_2$, alors $B_1 = B_2$. Soient $0 < a < b < c < d$, $b < c' < d'$ les nombres rationnels tels que $B_1 = B_1\ (a, b, c, d)$ et $B_2 = B_2\ (a, b, c', d')$, de sorte que $\omega(M_1) = \omega(M_2) = a/b$, $\omega(M_1') = c/d$, $\omega(M_2') = c'/d'$. On a, par hypothèse, $cd' = c'd$. Supposons donc que $B_2^+ = \varphi(\theta^{-1}B_1^+ \cap K)$, où $K \in \mathrm{Rat}\ (Z^*)$, et θ, φ: $Z^* \to \{x, y\}^*$ sont des homomorphismes alphabétiques tels que $\varphi^{-1}(1) \cap \theta^{-1}(1) = \{1\}$.

Soit alors, ce qui est possible en vertu du Lemme 6.3, $x^r y^s \in B_2^+$, avec r, s suffisamment grands pour que, si h est le mot le plus court dans $\theta^{-1}B_1^+ \cap K$ tel que $\varphi h = x^r y^s$, on ait, en posant $\theta h = x^k y^l$, k et l assez grands de sorte qu'il existe une factorisation $h = v'vv''gw'ww''$ telle que $0 < |v|, |w| \leq q$, θv, $\varphi v \in x^*$, θw, $\varphi w \in y^*$, $f_{n,m} = v'v^n v''gw'w^n w'' \in K$ pour tout n, $m \in \mathbf{N}$. Posons $\alpha = |\theta v|$, $\beta = |\theta w|$, $\alpha' = |\varphi v'|$, $\beta' = |\varphi w|$, et $\gamma = k-\alpha$, $\delta = l-\beta$, $\gamma' = r-\alpha'$, $\delta' = s-\beta'$. On remarque comme dans la preuve de la Proposition 6.4 que $\alpha\beta \neq 0$. Si $\alpha' = 0$ et $\beta' \neq 0$, on aurait $\varphi f_{n,m} = \varphi f_{1,m}$ pour tout n, et comme pour n, m assez grands, on a $\theta f_{n,m} \in B_1^+$, on devrait avoir $\varphi f_{1,m} \in B_2^+$ ce qui n'est pas. On traite de même le cas $\alpha' \neq 0$ et $\beta' = 0$. Si enfin $\alpha' = \beta' = 0$, alors k et l ayant été choisis suffisamment grands, on vérifie comme dans la démonstration du Lemme 5.7, que $\theta f_{0,1}$ ou $\theta f_{1,0}$ appartient à B_1^+, ce qui contredit la condition de minimalité de h. On a donc $\alpha\alpha'\beta\beta' \neq 0$.

Pour tout, n, $m \in \mathbf{N}$, $\theta f_{n,m} \in M_1^+$ implique $\varphi f_{n,m} \in M_2^+$. Supposons en effet cette assertion fausse. Il en découle que si $m' \geq m$ et $\theta f_{n,m'} \in M_1^+$, alors $\varphi f_{n,m'} \in M_2'^+$, donc en particulier $\beta m' + \delta \leq (\alpha n+\gamma)b < \beta(m'+1)+\delta$ implique $(\alpha' n+\gamma')c' \leq \beta' m'+\delta' \leq (\alpha' n+\gamma')d'$, d'où l'on déduit:

$$\beta\alpha' c' \leq \beta'\alpha b. \tag{6.11}$$

D'autre part, soit t tel que $\theta f_{n,t} \in M_1'^+$ et $\theta f_{n,t+1} \notin M_1'^+$. Cet entier existe dès que n est suffisamment grand. On ne peut avoir $\varphi f_{n,t} \in M_2^+$, car la première inclusion entraîne que

$$\beta t+\delta \leq (\alpha n+\gamma)d < \beta(t+1)+\delta, \tag{6.12}$$

la deuxième que $(\alpha' n+\gamma')a \leq \beta' t+\delta \leq (\alpha' n+\gamma')b$, d'où l'on tire $\beta'\alpha d \leq \beta\alpha' b$, qui, joint à l'inéquation (6.11), donne $c'd \leq b^2$ ce qui n'est pas. Par conséquent, on a $\varphi f_{n,t} \in M_2'^+$, donc $(\alpha' n+\gamma')c' \leq \beta' t+\delta' \leq (\alpha' n+\gamma')d'$. On en tire, avec (6.12), $\alpha\beta' d \leq \alpha'\beta d'$, ce qui avec (6.11) et l'hypothèse donne $bd' \geq c'd = cd'$, donc $b \geq c$, ce qui est impossible. Ceci établit l'assertion.

On en déduit que $(\alpha n+\gamma)a \leq \beta m+\delta \leq (\alpha n+\gamma)b$ implique $(\alpha' n+\gamma')a \leq \beta' m +\delta' \leq (\alpha' n+\gamma')b$, par suite que $\alpha'\beta a \leq \alpha\beta' a$ et $\alpha\beta' b \leq \alpha'\beta b$, donc que $\alpha\beta' = \alpha'\beta$.

On vérifie de manière analogue que $\theta f_{n,m} \in M_1'^+$ entraine $\varphi f_{n,m} \in M_2'^+$. On en déduit, comme ci-dessus que $\alpha'\beta c' \leq \alpha\beta' c$ et $\alpha\beta' d \leq \alpha'\beta d'$, donc $c = c'$, $d = d'$ ce qui prouve que $M_2 = M_2''$, et le lemme.

Preuve de 6.6. Soit $B = M_1 \cup M_2$ un bimonoïde tel que $p(B) = \omega(M_1) \leq \omega(P)$, $p'(B) = \omega(M_2) \leq \omega(P)$, D'après le Théorème 5.4, on a $P \rightsquigarrow M_1$ et $P \rightsquigarrow M_2$, donc $P \rightsquigarrow M_1 \cup M_2 = B$. Posons alors $B = B(a, b, c, d)$ avec $0 < a < b < c < d$. Soit k le plus grand entier tel que $b^k/a^{k-1} < c$. Par hypothèse, on a $k \geq 1$. Si $k > 1$, posons alors $t_j = b^j/a^j$ pour $j = 1, \cdots, k-1$, et $B_j = B(t_j a, t_j b, t_j c, t_j d)$. Par la Proposition 6.1, B_j est rationnellement équivalent à B pour $j = 1, \cdots, k-1$, donc B a pour image rationnelle $B' = B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}$, en posant $B_0 = B$, $t_0 = 1$. Considérons enfin le bimonoïde $B_k = B(t_k a, t_k b, t_k c, t_k d)$, avec $t_k = c/b$, et posons $C = B' \cup B_k$. Comme B_k est rationnellement équivalent à B, on a $B \rightsquigarrow C$. Montrons que C est un sous-monoïde convexe. On a $x = (x', x'') \in C$ si et seulement si il existe j $(0 \leq j \leq k)$ tel que $x \in B_j$, donc si et seulement si $x' t_j a \leq x'' \leq x' t_j b$ ou $x' t_j c \leq x'' \leq t_j d$ (6.13), pour au moins un j $(0 \leq j \leq k)$. Comme $t_j a = b^j/a^{j-1} = t_{j-1} b$ pour $j = 1, \cdots, k-1$, que $t_k b = c$, et que $t_k a \leq t_{k-1} b$ puisque $c \leq b^k/a^k$ par la définition même de k; comme d'autre part l'hypothèse $\omega(M_1) = \omega(M_2)$, donc

$a/b = c/d$ entraîne que $t_j c = t_{j-1}d$ pour $j = 1, \cdots, k-1$, et que $t_{k-1}d = d^k/c^{k-1}$, donc $t_{k-1}d \geq t_k c$ puisque $b/a = d/c$, les inéquations (6.13) équivalent à $x'a \leq x'' \leq x't_k d = x'\, cd/b$. Ceci prouve que C est sous-monoïde convexe, de poids $\omega(C) = ab/cd$. Par conséquent, C, et donc également B, a pour image rationnelle le sous-monoïde Q dès que $\omega(C) \geq \omega(Q)$. Comme $\omega(C) = (q(B)\, p(B))^2$, la première partie du théorème est prouvée. Remarquons enfin que si $B_1 = M_1 \cup M_1'$ et $B_2 = M_2 \cup M_2' = B_2(a, b, c, d)$ sont deux bimonoïdes tels que $\omega(M_1) = \omega(M_2)$, il existe un nombre rationnel $t > 0$ tel que le bimonoïde $B_3 = B(at, bt, ct, dt) = M_3 \cup M_3'$ vérifie $M_3 = M_1$. On a également $M_1' = M_3'$, et comme B_3 est rationnellement équivalent à B_1, l'application du lemme précédent démontre complètement le théorème.

7. Antimonoïdes. Exemples.

Définition. Un *antimonoïde* A est une partie de $\mathbf{N}^2$ de la forme $A = \mathbf{N}^2 \backslash P$, où P est un sous-monoïde propre, convexe, de type fini, réductible à gauche et à droite de $\mathbf{N}^2$.

PROPOSITION 7.1. *Soit $A = \mathbf{N}^2\backslash P$ un antimonoïde, $a \in \mathbf{N}^2$ et soit $A' = \mathbf{N}^2\backslash(a+P)$; alors A et A' sont rationnellement équivalents.*

Preuve. On a $A' = (a+A) \cup \mathbf{N}^2\backslash(a+\mathbf{N}^2)$, et $A+a = A' \cap (a+\mathbf{N}^2)$. Comme $\mathbf{N}^2\backslash(a+\mathbf{N}^2)$ est une partie reconnaissable, on a $A \rightsquigarrow A'$ par le Lemme 2.2, et comme $a+\mathbf{N}^2$ est un réseau, on a $A' \rightsquigarrow A' \cap (a+\mathbf{N}^2) \rightsquigarrow A$ par le même lemme. D'où la proposition.

Nous notons $\bar{A}$, pour $A = \mathbf{N}^2\backslash P$, la partie $\bar{A} = \mathbf{N}^2\backslash(1+P) = (1+A) \cup E$, avec $E = ((0, 1) \cup (1, 0))\mathbf{N}$. La proposition montre que les antimonoïdes sont bien, à une équivalence rationnelle près, les objets annoncés au paragraphe précédent. D'autre part, si P n'est réductible que d'un seul côté, donc rationnellement équivalent soit à T_0, soit à T_1, on voit, en considérant $\bar{A}$, que $A = \mathbf{N}^2\backslash P$ est rationnellement équivalent soit à T_1, soit à T_0.

Un antimonoïde A est entièrement déterminé par deux nombres rationnels r_1, r_2 $(0 < r_1 \leq r_2 < \infty)$, avec $x = (x', x'') \in A$ si et seulement si $x'' \leq r_1(x'-1)$ ou $(x''-1) \geq r_2 x'$, ou encore $x \in \bar{A}$ si et seulement si $x'' \leq r_1 x'$ ou $x'' \geq r_2 x'$. On définira le *poids* d'un antimonoïde $A = A(r_1, r_2)$ comme étant $\omega(A) = -r_1/r_2$. Par conséquent, on a $0 > \omega(A) \geq -1$, et $\omega(A) = -1$ si et seulement si $\mathbf{N}^2\backslash A \approx S^0$.

THÉORÈME 7.2. *Soient $A = \mathbf{N}^2\backslash P$ et $B = \mathbf{N}^2\backslash Q$ deux antimonoïdes; alors $A \rightsquigarrow B$ si et seulement si $\omega(A) \geq \omega(B)$, donc si et seulement si $Q \rightsquigarrow P$.*

Rappelons que si une application rationnelle τ de X^* dans Y^* vérifie, pour $L \subset X^*$, $M \subset Y^*$, $\tau L = M$, on ne peut en conclure que $\tau^{-1}(Y^*\backslash M) = \tau^{-1}(X^*\backslash L)$. Le théorème ci-dessus est donc indépendant du Théorème 5.4, même si les techniques de démonstration se ressemblent.

LEMME 7.3. *Si, pour deux antimonoïdes A et B, on a $\omega(A) = \omega(B)$, alors A et B sont rationnellement équivalents.*

Preuve. Nous démontrons que $\bar{A} \approx \bar{B}$. Par hypothèse, en posant $A = A(r_1, r_2)$, $B = B(r_1', r_2')$, il existe un nombre rationnel $t > 0$ tel que $r_1 = tr_1'$, $r_2 = tr_2'$.

Posons $t = p/q$, avec $p, q > 0$, et soit C défini par $\bar{B} = (p, q)C$. Par le Lemme 2.2 $\bar{B}$ et C sont rationnellement équivalents. D'autre part, $x = (x', x'') \in C$ si et seulement si $(px', qx'') \in \bar{B}$ donc si et seulement si $qx'' \leq r_1'qx'$ ou $qx'' \geq r_2'px'$, c'est-à-dire si et seulement si $x'' \leq r_1x'$ ou $x'' \geq r_2x'$, ou encore si et seulement si $x \in \bar{A}$. Donc $\bar{A} = C$, ce qui prouve le lemme.

Preuve de 7.2. Posons $A = A(a, b)$, $B = B(c, d)$. Par le lemme précédent, on peut supposer $0 < a = c$.

La condition est suffisante. Si $\omega(A) \geq \omega(B)$, alors on a $b \geq d \geq a$. Considérons alors l'antimonoïde $C = (c', d)$ rationnellement équivalent à A. Cet antimonoïde existe par le lemme précédent, et comme $-c'/d = -a/b$, on a $c' \leq a$. Par conséquent, on a $A \cup C = B$, ce qui prouve la suffisance.

Réciproquement, supposons l'énoncé faux, donc que $\omega(A) < \omega(B)$, soit $a \leq b < d$; soit ,par la Proposition 1.1 Z un alphabet fini, φ, θ: $Z^* \to X^*$, où $X = \{x, y\}$ deux homomorphismes alphabétiques vérifiant $\varphi^{-1}(1) \cap \theta^{-1}(1) = \{1\}$, et $K \in \text{Rat}\ (Z^*)$ tels que $B^+ = \varphi(\theta^{-1}A^+ \cap K)$, et soit τ l'application rationnelle associée.

Remarquons tout d'abord qu'en choisissant r, s assez grands, si h est un mot de longueur minimale de $\theta^{-1}A^+ \cap K$ tel que $\varphi h = x^r y^s$, alors en posant $\theta h = x^k y^l$, les entiers k et l sont arbitrairement grands. S'il n'en était, en effet, pas ainsi, il existerait deux entiers K, L tels que l'on aurait $\tau(A^+ \cap \{(x', x''): x' \leq K$ ou $x'' \leq L\}) = B^+$, or comme A^+ est un antimonoïde, l'ensemble source est une partie reconnaissable de N^2, il en serait donc de même de B, ce qui n'est pas.

En donnant à $f_{n,m} = v'v^n v'' g w' w^n w''$, et à $\alpha, \beta, \cdots, \delta'$ la même signification que dans le Lemme 5.7, on obtient donc les deux relations:

(7.1) $$\theta f_{n,m} \in A^+ \Leftrightarrow \beta m + \delta \leq a(\alpha n + \gamma)$$

(7.2) $$\text{ou } b(\alpha n + \gamma) \leq \beta m + \delta$$

(7.3) $$\varphi f_{n,m} \in B^+ \Leftrightarrow \beta' m + \delta' \leq a(\alpha' n + \gamma')$$

(7.4) $$\text{ou } d(\alpha' n + \gamma) \leq \beta' m + \delta'.$$

Notons U, V, U', V' l'ensemble des couples (n, m) satisfaisant respectivement (7.1), (7.2), (7.3), (7.4). On a $U \cup V \subset U' \cup V'$. Plus précisément $U \subset U'$ et $V \subset V'$. Soit en effet (n_0, m_0) un couple d'entiers de U' tel que aucun des deux couples (n_0+1, m_0) et (n_0, m_0-1) ne satisfasse (7.4). Un tel couple existe à condition que respectivement $\alpha' \neq 0$ et $\beta' \neq 0$. Supposons que le couple (n_0, m_0) satisfasse (7.1). Il en est alors de même de (n_0+1, m_0) et de (n_0, m_0-1), à condition d'avoir choisi (n_0, m_0) suffisamment grand. Par conséquent, on a alors $\alpha' = \beta' = 0$. Or k et l ayant été choisis suffisamment grands, ceci implique que $\varphi f_{0,1} = \varphi f_{1,0} = x^r y^s$ et $\theta f_{1,0} \in A^+$, ou $\theta f_{0,1} \in A^+$, en contradiction avec l'hypothèse de minimalité sur h. On a donc prouvé que $U \subset U'$, et on montre de même de $V \subset V'$.

Supposons maintenant r, s choisis de telle manière que $(2, 1), (0, 1) \notin V'$ si $\alpha'\beta' \neq 0$. Pour vérifier que $\alpha\alpha'\beta\beta' \neq 0$, supposons d'abord que $\alpha = 0$, donc $\alpha' \neq 0$. Alors $(2, 1) \in U'$ et $(2, 1) \notin V'$. Donc $\alpha \neq 0$. Si $\beta = 0$, on procède de même, donc $\beta \neq 0$. Si $\alpha' = 0$, alors $\theta f_{0,1} \in A^+$, $\varphi f_{0,1} = x^r y^s$, et $|f_{0,1}| < h$. De même, on ne peut avoir $\beta' = 0$. Le reste de la preuve est alors identique à celle du Lemme 5.7.

Il est clair que pour tout antimonoïde A à l'exception de $\mathbf{N}^2\backslash S^0$, on obtient $\bar{A}$ comme union de deux sous-monoïdes convexes, dont l'un est rationnellement équivalent à T_0, et l'autre à T_1. Quant à $\mathbf{N}^2\backslash S^0$, on a $\mathbf{N}^2\backslash S^0 = ((1, 0)+T_0) \cup ((0, 1)+T_1)$. Ceci prouve la

PROPOSITION 7.4. *Tout antimonoïde est image rationnelle de tout monoïde de type fini de poids non nul.*

Pour achever la classification des antimonoïdes, prouvons le

THÉORÈME 7.5. *Soient A et B deux monoïdes ou antimonoïdes de poids non nul; alors $A \rightsquigarrow B$ si et seulement si $\omega(A) \geq \omega(B)$.*

Preuve. Si A et B sont tous deux des monoïdes ou des antimonoïdes, le résultat découle du Théorème 5.4 ou 7.2. De par la proposition précédente, il suffit de prouver que si $A \rightsquigarrow B$, alors A ne peut être antimonoïde et B monoïde; pour cela, il suffit de prouver que si A est un antimonoïde, on n'a pas $A \rightsquigarrow T_0$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Posant $A = A(a, b)$, on peut supposer $a = 1$ par le Lemme 7.3, de sorte qu'avec les notations de la démonstration du Théorème 7.2, tout couple (n, m) satisfaisant aux inéquations (7.1) et (7.2) vérifie également (7.3), avec $a = 1$. On montre de la même manière que $\alpha\alpha'\beta\beta' \neq 0$, et comme, pour n fixé, tout couple (n, m) avec m assez grand vérifie (7.2) sans satisfaire à (7.3), on aboutit à une contradiction, ce qui démontre le théorème.

Par des arguments tout à fait analogues, on démontre le

COROLLAIRE 7.6. *Un antimonoïde A est rationnellement incomparable à T_0 et T_1.*

Etant donné un nombre rationnel r $(0 < r \leq 1)$, notons $\mathscr{C}(r)$ le cône engendré par un monoïde convexe de type fini M de poids $\omega(M) = r$, et notons $\mathscr{C}(-r)$ le cône engendré par un antimonoïde A de poids $\omega(A) = -r$, et soient $\mathscr{C}^0$ (resp. $\mathscr{C}^1$) les cônes engendrés par T_0 (resp. T_1). Alors le Théorème 7.5 et les résultats de la Section 4 se résument dans le diagramme suivant: Si $0 < r < r' < 1$, on a:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathscr{C}^0 & & & \\
\mathscr{C}(-1) & \mathscr{C}(-r') \arrow[l] & \mathscr{C}(-r) \arrow[l] & & \mathscr{C}(r) \arrow[ll] \arrow[ul] \arrow[dl] & \mathscr{C}(r') \arrow[l] & \mathscr{C}(1) \arrow[l] \\
 & & & \mathscr{C}^1 & & &
\end{tikzcd}$$

ou la flèche $\leftarrow$ représente de symbole $\subsetneq$. De plus $\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}^1$ sont incomparables ainsi que $\mathscr{C}^0$ (resp. $\mathscr{C}^1$) et $\mathscr{C}(-r)$.

Exemples. 1. La classe d'équivalence rationnelle de S^0 contient, d'apres le Théorème 3.2, toute union finie de droites. Qu'elle contient d'autres parties rationnelles de $\mathbf{N}^2$, montre l'exemple suivant. Soit $P = (2, 3)\mathbf{N}+(2, 4)\mathbf{N}$, et $A = P \cup S^0$. Comme P est un sous-monoïde de $\mathbf{N}^2$, on a $S^0 \rightsquigarrow A$. Réciproquement, considérons le réseau $R = (1, 1)+(2, 2)\mathbf{N}^2$. Alors $A \cap R = (1, 1)+(2, 2)S^0$, ce qui prouve que A est rationnellement équivalent à S^0.

2. L'exemple ci-dessus montre que la condition de convexité est essentielle

dans la définition des bimonoïdes, car A est union des deux monoïdes S^0 et P, mais P n'est pas convexe. Sans la condition de convexité, le Théorème 6.2 est donc faux.

3. Par le même exemple, on voit que dans le Théorème 4.4 la condition d'être sous-monoïde est nécessaire. Si en effet A était rationnellement équivalent à $\hat{A}$, donc à $Q = (1, 1)\mathbf{N}+(1, 2)\mathbf{N}$, on aurait $S^0 \approx Q$, ce qui n'est pas.

4. De même, le Théorème 4.4 est faux si le sous-monoïde en question n'est pas de type fini. Considérons en effet le monoïde M engendré par $(1, 1) \cup \{(1, p), (p, 1): p \text{ premier}\}$. Sa fermeture convexe est $\hat{M} = (1, 1)+\mathbf{N}^2$ qui est une partie reconnaissable de $\mathbf{N}^2$, alors que M n'est pas une partie rationnelle. Donc $\hat{M}$ ne peut être rationnellement équivalent à M.

RÉFÉRENCES

[1] S. EILENBERG et M. P. SCHÜTZENBERGER, Rational sets in commutative monoids, *J. Algebra* **13** (1969), 173–191.

[2] M. FLIESS, Transductions algébriques, *R.I.R.O.* **4** (1970), 109–125.

[3] S. GINSBURG, *The Mathematical Theory of Context-Free Languages*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[4] M. NIVAT, Transductions des langages de Chomsky, *Ann. Inst. Fourier* **18** (1968), 339–455 (Thèse Sci. Math., Paris, 1967).

(*Reçu le 20 Décembre 1971*)