

Sur la possible attribution des principes d'induction et du minimum à l'Ecole pythagoricienne

Giuseppe Pirillo
Dipartimento di Matematica ed Informatica U. Dini
Università di Firenze
viale Morgagni 67/A
50134 Firenze Italia
giuseppe.pirillo49@gmail.com

*Dédié à ma maman,
Annina Cuconato*

Ma maman Annina Cuconato m'a appris les mathématiques depuis mon enfance jusqu'aux derniers moments de sa vie. La dernière conversation que j'ai eue avec elle est rappelée ci-dessous sous la forme d'une courte poésie en langue calabraise, écrite en collaboration avec mon cher ami le professeur Francesco Calomino de l'Università della Calabria.

L'urtime parole

*-E' tiempu, figliu, portami ara casa.-
-Un puozzu, Mamma, i medici nun vonnu.-
-Ca signu 'n terra, aiutami a m' aza'.-
-E noni, Mamma, ca simu aru spitali.-
-E' tiempu, figliu, portami ara casa.-
-Un puozzu, Mamma, i medici nun vonnu.-
-A già! A già! Cca' i medici cummannanu,-
-e trallalleru trallallà.-
E l' urtime parole i Mamma su' state chisse cca'.*

(Les derniers paroles -Il est temps, mon fils, ramène-moi à la maison.-
-Je ne peux pas, maman, les médecins ne veulent pas.- -Je suis allongée
par terre, aide-moi à me lever.- -Non, maman, nous sommes à l'hôpital.-
-Il est temps, mon fils, ramène-moi à la maison.- -Je ne peux pas, maman,
les médecins ne veulent pas.- -Ah oui! Ah oui! Les médecins commandent
ici! -Et trallalleru trallallà.- -Et les derniers paroles de maman ont été
ceux-ci.-)



FIGURE 1 – Ce trèfle à cinq feuilles a été trouvé sur la tombe de ma mère.

Un de mes lecteurs pourrait me demander :

Giuseppe! Pourquoi ce travail?

*Dans ce cas improbable, j'aimerais répondre avec une phrase de Marco¹
qui est aussi la mienne :*

Pour des raisons qui relèvent de ma religion pythagoricienne.

Résumé. *Une démonstration pythagoricienne de l'incommensurabilité du côté du pentagone régulier avec sa diagonale utilise une forme particulière du principe d'induction. La possible attribution des principes d'induction et du minimum à l'École pythagoricienne est une conséquence de ce fait. Ceci est cohérent avec la pensée de Poincaré (ou, mieux, en est une conséquence naturelle et directe). Nous soulignons qu'il n'est pas de notre intention de faire l'histoire du principe d'induction : nous voulons juste rappeler qu'il a existé et qu'il existe toujours un problème d'attribution du principe d'induction, et que sa solution la plus simple fait référence aux pythagoriciens.*

1. Marco est le surnom par lequel Marcel-Paul Schützenberger voulait être appelé aussi bien par moi que par nombre de ses autres amis ; la phrase citée est tirée de [4] à la page 40.

1 Introduction.

La complexité des problèmes posés par le principe d'induction mathématique nous semble bien synthétisée par J. Boniface [3] : *Le principe d'induction est lié à la définition des nombres entiers d'une façon à la fois essentielle et sujette à controverse. Fonde-t-il ces nombres, ou bien trouve-t-il en eux son fondement ? Son statut lui-même peut être conçu de diverses manières. Est-il donné par l'expérience, par l'intuition, par la logique, par convention ? Ces questions furent l'objet d'une âpre discussion ... dans le cadre plus large d'un débat sur les fondements des mathématiques.*

Nous n'avons pas la moindre prétention d'apporter une contribution significative (c.-à-d. suffisamment partagée) à un débat de cette ampleur. Si nous commençons par cette citation, c'est pour signaler l'énorme difficulté du sujet de cet article. Nous sommes conscient du risque de rester isolé, ou presque, mais nous savons aussi que notre point de vue est une conséquence naturelle de la pensée de Poincaré (voir [18] et la section 5 de cet article). Nous nous limitons simplement à une remarque : le principe d'induction est né avec les mathématiques et doit naturellement être attribué aux pythagoriciens car les mathématiques sont nées avec eux !

Signalons aussi que le principe d'induction mathématique n'est pas seulement un sujet de discussion pour les savants, mais est aussi un sujet difficile dans l'enseignement des mathématiques.

La difficulté dans ce domaine est en partie une conséquence de l'incertitude des chercheurs sur le statut du principe d'induction mais cela dépend aussi du manque d'attention que les enseignants accordent à l'histoire des mathématiques².

Ce travail est structuré comme suit : Après cette introduction, dans la deuxième section, nous présentons simplement le principe d'induction, puis dans la troisième section nous évoquons brièvement le débat sur la priorité concernant ce principe. Dans la quatrième section, nous présentons au mieux de notre capacité la pensée de Poincaré qui qualifie le principe de l'induction comme le **raisonnement mathématique par excellence**. Dans la cinquième section, nous examinons deux propositions des éléments d'Euclide ; dans leur démonstration, il existe, à notre avis, un usage explicite du principe d'induction. Enfin, dans la sixième

2. Ce manque d'attention dépend aussi en partie de la responsabilité des mêmes historiens. Souvent, les conséquences que certains d'entre eux tirent des documents sont bien moindres que les éléments contenus dans ceux-ci de manière pratiquement explicite. Les comptes-rendus des académies des sciences sont très récents et (très probablement !) n'existaient pas à l'époque de l'École pythagoricienne.

section, nous présentons notre thèse personnelle selon laquelle ce principe fondamental remonte à l'école de Pythagore.

2 Le principe d'induction mathématique

Une belle et concise présentation du *principe d'induction mathématique* peut être trouvée dans l'article [21] de l'*Enciclopedia Italiana*, écrit par Giovanni Vacca, où nous lisons : *On appelle principe d'induction, ou induction complète, le principe suivant : Si le nombre 1 jouit d'une certaine propriété, et s'il est possible de démontrer que, si un nombre n jouit de la propriété alors son successeur $n + 1$ en bénéficie également, il en découle que cette propriété est vraie pour tous les nombres.*

Une autre forme de principe d'induction est la suivante : *Tout sous-ensemble non vide de nombres naturels a un élément minimal.*

Toujours dans le même article de l'*Enciclopedia Italiana*, nous pouvons lire : le principe d'induction complète peut être remplacé par ... le *principe de descente*. Il dit que *si on peut démontrer qu'une certaine propriété supposée être vraie pour un entier positif est également vraie pour un entier positif plus petit, alors cette propriété n'est vraie pour aucun nombre, puisque les nombres entiers et positifs ne diminuent pas indéfiniment*, principe attribué à Fermat³.

Les axiomes de Peano définissent de manière informelle N , ensemble des entiers naturels⁴.

Normalement, quand on parle du principe d'induction on fait référence au cinquième des axiomes de l'arithmétique de Peano qui sont souvent et informellement (voir par exemple [23]) présentés comme suit :

1. L'élément appelé zéro et noté 0 est un entier naturel.
2. Tout entier naturel a un unique successeur.
3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à N .

3. Nous rappelons aussi la *Proposition pythagoricienne*, variante que nous avons déjà utilisée dans [15] et attribuée explicitement à la célèbre École de Crotona : *Une suite strictement décroissante d'entiers positifs est nécessairement finie.*

4. De nombreuses variantes sont étudiées aujourd'hui en rapport avec différentes théories mathématiques : théorie des ensembles, logique du second ordre ou d'ordre supérieur, ou logique du premier ordre. Tout cela dépasse le cadre de ce travail.

Plusieurs articles et livres intéressants sont consacrés au principe d'induction. Nous nous limitons ici à la mention de [19].

3 La priorité sur le principe d'induction

La priorité de l'utilisation du principe d'induction a suscité une série de controverses. Nous ne voulons pas les traiter en détail comme le ferait un expert en histoire des mathématiques. Nos conclusions (qui nous paraissent en parfait accord avec la pensée de Poincaré) attribuent à ces polémiques une importance très relative. Nous n'en parlerons que brièvement.

Nous ne sommes pas historien des mathématiques de profession et nous ne prétendons pas suivre leurs procédures. Nous voulons juste rappeler qu'il y a eu et qu'il y a toujours un débat très animé. Nous rapportons ici quelques assertions de G. Vacca. En fait, quelques références au débat sont plus que suffisantes pour les besoins de ce travail.

Giovanni Vacca (1872-1953), mathématicien, historien des sciences et sinologue italien, a d'abord été assistant, puis collaborateur de Giuseppe Peano (1858-1932). Avec lui, il travaille au *Formulaire mathématique*. Giovanni Vacca a écrit l'article [21] que nous venons de mentionner. Cidessous on trouve quelques citations de l'un de ses articles [20].

Il y a plusieurs années, j'ai publié dans le Formulaire de mathématique du professeur Peano un compte-rendu de la première découverte de l'induction mathématique, comme due à l'Italien Maurolycus. Mais cet article semble n'avoir eu qu'une faible diffusion. Je pense donc utile de donner, avec quelques détails supplémentaires, un bref compte-rendu de cette découverte importante.

Après avoir précisé que les œuvres de Franciscus Maurolycus [Maurolico] sur les auteurs mathématiques grecs *ont été de la plus grande importance pour la transmission de la science grecque à l'Europe*, il précise que *le plus original de ses travaux est le traité d'arithmétique « Arithmeticonum libri duo » [13] écrit en 1557 et imprimé à Venise en 1575* qui contient *le principe d'induction mathématique*. L'article se termine en qualifiant Maurolico *d'un des plus grands mathématiciens européens du seizième siècle*. (Pour une présentation des œuvres de Maurolico, voir [5] et [14]).

Giovanni Vacca attribue donc à Maurolico la priorité de la découverte du principe d'induction mathématique. Luciano rapporte une position de Vacca qui semble plus articulée (voir la note 54 à la page 123 de [12]) : Le principe d'induction est dû à Maurolico. J'ai trouvé des tentatives

précédentes dans Euclide livre VIII p. 9, et dans Leonardo Pisano. Après Maurolico, on trouve de meilleures formulations chez Pascal (presque identiques à celles de Maurolico) et encore mieux chez Bernoulli. Le mot induction est peut-être dû à *Euler*. Le principe de base de l'arithmétique est *moderne* et, peut-être, devrait-il être attribué à Peirce (Am Jour. 1981) ou à Dedekind, voire à Grassman. Principes similaires à celui de *Fermat* de la descente infinie.

4 Le raisonnement mathématique par excellence

Nous avons un avis très spécifique sur les premiers mathématiciens qui ont utilisé le principe d'induction dans une de leurs démonstration.

Pratiquement cette section ne contient que des citations de [18]. Parce que notre avis vient directement de Poincaré (voir section 6) nous insistons sur sa pensée avec de nombreuses citations qui sont presque toujours en italique alors que certaines parties du texte que nous voulons souligner sont en gras.

Poincaré a le don d'écrire clairement et avec brio⁵. Tout d'abord, d'une manière précise et formelle, Poincaré définit l'addition, considère ses différentes propriétés, définit la multiplication et considère également ses propriétés. Ensuite il résume magistralement ce qu'il vient de faire avec ces mots : *Ce procédé c'est la démonstration par récurrence. On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$ il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers.*

On vient de voir comment on peut s'en servir pour démontrer les règles de l'addition et de la multiplication, c'est-à-dire les règles du calcul

5. Voici quelques phrases exemplaires de [18] : i) *Pour un observateur superficiel, la vérité scientifique est hors des atteintes du doute ; la logique de la science est infaillible et, si les savantes se trompent quelquefois, c'est pour en avoir méconnu les règles.* ii) *Le débat est ancien ; déjà Leibnitz (sic!) cherchait à démontrer que 2 et 2 font 4 ; examinons un peu sa démonstration (sic!).* iii) *c'est dans la démonstration des théorèmes le plus élémentaires que les auteurs des traités classiques ont déployé le moins de précision et de rigueur. Il ne faut pas leur en faire un crime ; ils ont obéi à une nécessité ; les débutants ne sont pas préparés à la véritable rigueur mathématique ; ils n'y verraient que de vaines et fastidieuses subtilités ; on perdrait son temps à vouloir trop tôt les rendre plus exigeants ; il faut qu'ils refassent rapidement, mais sans brûler d'étapes, les chemins qu'ont parcourus lentement les fondateurs de la science.* iv) *Il nous faut refaire les démonstrations des théorèmes les plus élémentaires et leur donner non la forme grossière qu'on laisse pour ne pas lasser les débutants, mais celle qui peut satisfaire un géomètre exercé.*

algébrique ...

A chaque pas, si on y regarde bien, on retrouve ce mode de raisonnement, soit sous la forme simple que nous venons de lui donner, soit sous une forme plus ou moins modifiée. C'est donc bien là⁶

le raisonnement mathématique par excellence

et il nous faut l'examiner de plus près.

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.

Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade.

Ce sont bien entendus des syllogismes hypothétiques.

Le théorème est vrai du nombre 1.

Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.

Donc il est vrai de 2.

Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.

Donc il est vrai de 3 et ainsi de suite.

On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineur au suivant.

De plus les majeurs de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.

Si le théorème est vrai de $n - 1$, il est vrai de n .

...

Le jugement sur le quel repose le raisonnement par récurrence peut être mis sous d'autre forme; on peut dire par exemple que dans une collection infinie de nombres entiers différents, il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres.

...

Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence? C'est qu'il n'est que

l'affirmation de la puissance de l'esprit

qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible.

L'esprit a de cette puissance une intuition directe *et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.*

...

6. voir page 19 de [18].

L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire

la démonstration par récurrence

s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

La pensée de Poincaré sur le principe d'induction semble appuyer avec autorité notre attribution de ce principe aux pythagoriciens. Surtout la phrase suivante : *Pour parvenir au plus petit théorème il ne pourra s'affranchir de l'aide du raisonnement par récurrence parce que c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini*⁷.

5 Principe d'induction et Éléments d'Euclide

Considérons deux propositions très particulières des *Éléments* d'Euclide, la Proposition VII 31 et la Proposition IX 20⁸.

Proposition 1 (VII 31). *Chaque nombre composé est mesuré par un nombre premier. En langage moderne : Chaque nombre composé a un nombre premier comme diviseur.*

La preuve d'Euclide (voir [7]) est la suivante : Soit A un nombre composé. Je dis que A est divisé par un nombre premier. En effet, puisque A est composé, un autre nombre, noté B , le divise. Si B est premier alors

7. En conséquence, non seulement la démonstration de l'incommensurabilité du côté du pentagone régulier avec sa diagonale (voir la section 6) mais aussi la démonstration de la commutativité de l'addition, la définition de l'entier $n + m$ (où n et m sont entiers donnés) et même la définition de l'entier n tout court, nécessitent le principe d'induction.

8. Selon de nombreux auteurs, les Livres I, II, III et IV dédiés à la géométrie et les Livres VII, VIII et IX, dédiés à l'arithmétique, sont de dérivation directe de l'École pythagoricienne. Par exemple, à la page 65 de [7], Frajese dit : *L'assimilation du point à l'unité, selon les vues de Pythagore, ferait penser non pas à un point presque évanescent, sans taille, mais à un point étendu, qui, pour ainsi dire, a des dimensions unitaires. Dans sa première définition, Euclide aurait donc laissé, comme un frontispice lapidaire, un souvenir, une trace, de l'ancienne géométrie de Pythagore, faisant écho à sa doctrine fondamentale.* Michel à la page 413 de [10] dit : *Des témoignages concordants permettent d'attribuer aux quatre premiers livres une origine pythagoricienne ; les V^e et VI^e se rattachent à Eudoxe ; Théétète doit être considéré comme une des sources des trois suivants (livres arithmétiques) et comme la source principale du X^e.* Bortolotti, à la page 591 de [2], dit : *C'est un grand mérite [d'Euclide] d'avoir pu réduire dans le cadre de sa disposition logique la mathématique de Pythagore des quatre premiers livres, et des livres d'arithmétiques VII, VIII, IX.*

la proposition est vérifiée. Mais si B est composé, un autre nombre, noté C , le divise. Maintenant, puisque C divise B et B divise A alors C divise également A (hypothèse 3⁹). Si C est premier, alors la proposition est vérifiée. Si au lieu de cela il est composé, un autre nombre le divise. En procédant de cette façon, nous finirons par trouver un nombre premier agissant comme un diviseur. En effet, si cela n'était pas le cas, une infinité de nombres diviseraient le nombre A , et chaque diviseur aurait un autre diviseur plus petit, ce qui est impossible dans le cas des nombres naturels. On finira donc par trouver un nombre premier qui divise le nombre précédent, et qui divise également A . Donc, chaque nombre composé a un nombre premier comme diviseur. CQFD.

Pour nous, cela ne fait aucun doute : Euclide utilise dans cette démonstration le principe d'induction sous la forme : *toute suite strictement décroissante de nombres entiers positifs est finie (ne peut pas être infinie)*. En d'autres termes, Euclide utilise explicitement la Proposition pythagoricienne (voir [15]) qui est une formulation particulière du principe de Fermat.

Dans la proposition 2, il est nécessaire de noter le verbe *proposer* : C'est comme si Euclide disait à ses lecteurs : Si vous proposez même une pléthore de nombres premiers, je vais vous montrer que je peux toujours en trouver un de plus ! Son discours ne fait référence qu'à trois nombres premiers, mais indique une procédure valide pour tout ensemble fini de nombres premiers pouvant être proposé.

Il faut souligner le fait très important que la démonstration est en accord parfait avec l'idée d'infini qui les contemporains d'Euclide avaient : l'infini est conçu *en puissance* et pas *en acte*, il est illimité et il ne peut pas être conçu dans son intégralité. À cet égard, voir, par exemple, [25].

Proposition 2 (IX 20). *Il y a toujours des nombres premiers en plus grande quantité que la quantité de nombres premiers que l'on peut proposer. (La suite des nombres premiers est illimitée.)*¹⁰

9. Frajese et Maccioni dans [7], au début du livre VII, signalent trois *hypothèses* ou *postulats non exprimés* qu'Euclide a utilisé : i) si un nombre divise deux autres, il divise également leur somme ; ii) si un nombre divise deux autres, il divise également leur différence ; iii) si un nombre premier divise un second, il divise également tout multiple du second et ils notent que hypothèses similaires sont utilisées, en référence à une quantité quelconque, dans le dixième livre.

10. Note des auteurs Frajese et Maccioni : IX 20 est l'une des plus célèbres propositions des *Eléments* d'Euclide. Tout le monde sait qu'Euclide a prouvé que la suite des nombres premiers est infinie. Comme dans son style (et dans le style d'Eudoxe de Cnide) Euclide n'introduit pas directement l'infinité du nombre de nombres premiers. Ce n'est qu'une infinité comprise dans un sens potentiel : quelque ensemble de

La preuve d'Euclide (voir [7]) est la suivante : Soient A , B et C les nombres premiers proposés ; je dis qu'il y a des nombres premiers en plus grand nombre que A , B et C [ce qui signifie qu'il y en a au moins un en plus de A , B et C]. En fait, prenez le plus petit multiple commun K de A , B et C (VII 36) ; ajoutez l'unité U à K . Maintenant, le nombre $K + U$ est premier ou n'est pas premier. S'il était premier, on aurait trouvé les nombres premiers A , B , C et $K + U$ qui sont en plus grand nombre que A , B et C . Donc $K + U$ n'est pas premier. Il est donc divisé par un nombre premier (VII 31), que l'on nommera D . Je dis que D n'est égal à aucun des nombres A , B et C . Supposons par contradiction que D soit égal à l'un d'entre eux. Puisque A , B et C divisent K alors D divise K . Mais D divise aussi $K + U$; c'est-à-dire que D diviserait également la différence entre les deux nombres consécutifs $K + U$ et K qui est l'unité U , ce qui est absurde. Donc, D n'est égal à aucun des nombres A , B et C . Et il est, par hypothèse, premier. Donc, on a trouvé des nombres premiers, A , B , C et D , plus nombreux que les nombres premiers proposés, à savoir, A , B et C . CQFD.

Remarque. Si l'« extrême rigueur » des historiens des mathématiques est abandonnée, le principe d'induction pourrait être attribué à Euclide parce que, à notre avis, il l'aurait effectivement utilisé (voir Fowler [6], qui est toutefois contesté par Unguru [22]).

6 Conclusions

L'arithmétique du *pair et impair* et la découverte des segments incommensurables (voir, par exemple, [8] et [9]) sont pythagoriciens et sont à la base de notre attribution personnelle de ce principe fondamental à l'École de Crotona. À cet égard, il nous semble approprié d'indiquer l'article de Wirth [24] qui fait explicitement référence à [11].

Pour des raisons de clarté et de synthèse, nous rappelons ici les propositions suivantes de l'arithmétique du *pair et impair*, arguments fondamentaux dans les démonstrations d'incommensurabilité.

Proposition 1. *La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.*

Proposition 2. *La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.*

Proposition 3. *La somme d'un nombre pair et un nombre impair est un nombre impair.*

nombres premiers que nous fixions, il y a toujours au moins un autre nombre premier non inclus dans l'ensemble ; c'est-à-dire que les nombres premiers sont toujours *plus nombreux* de toute quantité fixée de nombres premiers.

Pour fixer les idées, prenons le cas de l'incommensurabilité du côté et de la diagonale du pentagone régulier et passons rapidement en revue les étapes de la démonstration (voir [16] pour une démonstration détaillée).

Les pythagoriciens espéraient trouver une unité de mesure appropriée U et deux entiers, disons β et α , avec U contenu exactement β fois dans le côté et α fois dans la diagonale.

Avec quelques simples références aux premiers théorèmes de Pythagore sur les relations entre les longueurs des côtés des triangles (Euclide I 18, I 19 et I 20, par exemple) et d'autres concernant les triangles semblables, ils ont montré la relation fondamentale $\beta(\beta + \alpha) = \alpha^2$.

Selon nous, ils ont « vu » l'énorme difficulté de prouver, de manière formellement correcte, qu'une paire d'entiers positifs β et α ne peut pas vérifier $\beta(\beta + \alpha) = \alpha^2$ et, en accord avec leur doctrine arithmétique préférée du *pair et impair*, ils ont essayé de surmonter la difficulté en considérant les quatre cas suivants : i) β pair et α impair, ii) β impair et α pair, iii) β impair et α impair et iv) β pair et α pair.

Ils ont facilement résolu les trois premiers cas, avec l'utilisation des propositions 1, 2 et 3 que nous venons de mentionner.

Mais, le cas iv) semble présenter de plus grandes difficultés. Si β et α sont tous les deux pairs, rien n'empêche leurs moitiés d'être encore paires et les moitiés de ces moitiés d'être encore paires. Et ainsi de suite.

Comment sont-ils sortis de ce cercle vicieux ? Certainement avec le principe d'induction, dans sa variante du principe du minimum.

Mais maintenant, nous devons observer que même pour les cas i), ii) et iii), les plus faciles et qui semblent ne poser aucun problème, le principe d'induction est nécessaire. Dans ces cas les propositions 1, 2 et 3 sont utilisées et dans leurs preuves le principe d'induction est requis ! Comme cela peut paraître surprenant, nous lisons ce que Poincaré dit à la page 21 de [18] : *un joueur d'échecs peut combiner quatre coups, cinq coups d'avance, mais, aussi extraordinaire qu'on le suppose, il n'en préparera jamais qu'un nombre fini ; s'il applique ses facultés à l'arithmétique, il ne pourra en apercevoir les vérités générales d'une seule intuition directe ; pour parvenir au plus petit théorème il ne pourra s'affranchir de l'aide du raisonnement par récurrence parce que c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini.*

Maintenant, demandons-nous comment les pythagoriciens ont vraiment agi. Pour les cas i), ii) et iii), peut-être n'ont-ils pas pensé au principe d'induction. Peut-être étaient-ils simplement satisfaits d'une « démonstration » visuelle des propositions 1, 2 et 3.

D'autre part, pour le cas iv), plus délicat, il semble plausible qu'ils raisonnaient comme Euclide dans la démonstration de la Proposition IX

20, où il dit (voir paragraphe précédent) : « *une infinité de nombres diviserait le nombre A , dont l'un serait toujours inférieur à l'autre : ce qui est impossible dans le cas des nombres naturels* ». Ici Euclide utilise le principe de Fermat, ou plutôt la *Proposition pythagoricienne* (voir [15]). En fait pour nous l'expression « *ce qui est impossible dans le cas des nombres* » est une référence claire à une technique déjà acquise, le principe du minimum. Et il convient de noter que cette remarque est faite dans l'un des livres pythagoriciens des *Éléments*. Tout cela témoigne du fait (que nous avons déjà supposé comme vrai en [15]) que les pythagoriciens eux aussi en avait déjà fait un usage explicite et conscient.

En conclusion, dans la démonstration d'incommensurabilité, mentionnée ci-dessus, les cas i), ii) et iii) sont résolus en utilisant des propositions, qui, bien que simples, nécessitent le principe d'induction (voir la section 5, *Le raisonnement mathématique par excellence*) alors que le cas iv) nécessite un rappel explicite de ce principe fondamental, très probablement dû aux capacités créatrices des pythagoriciens.

En bref, notre thèse, en utilisant des mots de Poincaré, est la suivante : les pythagoriciens, avec la découverte de segments incommensurables, ont eu une bonne occasion d'utiliser le principe d'induction, et de cette façon, ils en ont pris conscience (les mots de Poincaré dans [18] sont exactement les suivants, voir aussi paragraphe 5 : *une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.*)

Nous n'avons pas de pièces justificatives (c'est-à-dire des documents historiques) de notre thèse. Cependant, nous croyons qu'à partir des considérations que nous venons de faire et des attributions acquises de l'incommensurabilité et de l'arithmétique du *pair et impair* aux pythagoriciens, une conséquence inévitable en résulte : l'attribution aux pythagoriciens du principe d'induction.

Remerciements. *Je remercie mes chers amis Jean-Paul Allouche, Francesco Calomino et Jacques Désarménien. Jean-Paul m'a patiemment écouté parler du principe d'induction, Francesco m'a aidé à écrire la poésie de la dédicace et Jacques m'a aidé à écrire le texte français.*

Références

- [1] *Euclide tutte le opere*, a cura di Fabio Acerbi, Testo greco a fronte, Bompiani, Il pensiero occidentale, I edizione novembre 2007, II edizione aprile 2008.

- [2] Ettore Bortolotti, *Storia della matematica elementare* in Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, Hoepli, Milano, 1950.
- [3] Jacqueline Boniface, *Poincaré et le principe d'induction*, Philosophiques, 31(1), 131–149. <https://doi.org/10.7202/008937ar> (2004).
- [4] Alain Connes, André Lichnerowicz, Marcel-Paul Schützenberger, *Triangles de pensées*, Edition Odile Jacob, Janvier 2000.
- [5] M. Dominici, P. D. Napolitani, *Edizione con LATEX delle opere di Francesco Maurolico*.
- [6] David Fowler, *Could the Greeks Have Used Mathematical Induction? Did They Use it?*, Physis, 31, 1994, pp. 253-265.
- [7] Attilio Frajese, Lamberto Maccioni *Gli elementi di Euclide*, Unione Tipografico-Editrice Torinese, Torino, 1977.
- [8] Attilio Frajese, *Attraverso la storia della matematica*, La Matematica nella Cultura e nella Scuola, Felice Le Monnier, Firenze, 1977.
- [9] Livia Giacardi, Clara Silvia Roero, *La Matematica delle Civiltà Arcaiche, Egitto Mesopotamia Grecia*, Università Popolare di Torino Editore, Torino, 1978.
- [10] Paul-Henri Michel, *De Pythagore à Euclide, Contribution à l'histoire des mathématiques préeuclidienne*, Ouvrage publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique, Le Belles Lettres, Paris, 1950.
- [11] Kurt von Fritz, 1945, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, *Ann. of Math.*, second series, vol. 46, pp. 242–264.
- [12] Erica Luciano, *I contributi di Vacca alla Storiografia della Logica Matematica*, Quaderni di storia dell'Università di Torino, 10, (2009–2011).
- [13] Francesco Maurolico, *Arithmeti corum libri duo*, Venezia, 1575
- [14] R. Moscheo, *Matematiche e Storia a Messina alla vigilia del sisma del 1908* (Note intorno ad un coevo e incompiuto progetto editoriale) R. Moscheo (comunicazione presentata dal Prof. Paolo V. Giaquinta)
- [15] Giuseppe Pirillo, *Numeri irrazionali e segmenti incommensurabili*, Scuola Secondaria, 87–91, 2005.
- [16] Giuseppe Pirillo, *A characterization of Fibonacci numbers*, Chebyshevskii sbornik, vol. 19, no. 2, pp. 259–271, 2018.

- [17] Giuseppe Pirillo, *Pythagorean School, Fibonacci numbers, induction principle and minimum principle*, UMI-SIMAI-PTM, joint meeting, Wroclaw (Poland), 17–20 September 2018.
- [18] Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Bibliothèque de Philosophie scientifique, Ernest Flammarion, Paris, 1905.
- [19] Ilja Samuilovic Somenskii, *Il metodo di induzione matematica*, Milano, 1964.
- [20] Giovanni Vacca, *Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction*, Bulletin of the American Mathematical Society, 2, 16, 70–73, 1910.
- [21] Giovanni Vacca, 1933, *Induzione*, *Enciclopedia Italiana*, XIX, 182–183.
- [22] S. Unguru, *Fowling after Induction Replay to Fowler's comments*, *Physis*, 31, 1994, pp. 267–272.
- [23] [https : //fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes de Peano](https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Peano).
- [24] Claus-Peter Wirth, *A Self-Contained and Easily Accessible Discussion of the Method of Descente Infinie and FERMAT's Only Explicitly Known Proof by Descente Infinie* SEKI Working-Paper SWP–2006–02.
- [25] Paolo Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano, 2001.