L'origine pitagorica dei numeri di Fibonacci

Alla memoria di Jacques Justin

Giuseppe Pirillo
Dipartimento di Matematica ed Informatica U. Dini
Università di Firenze
viale Morgagni 67/A
50134 Firenze Italia

e

via Fra' Bartolomeo 70
59100 Prato
50134 Firenze Italia

pirillo@math.unifi.it

... i cosiddetti pitagorici,
essendosi applicati alle matematiche,
per primi le portarono innanzi ...
(Aristotele, Metafisica, I, 5. Monografia introduttiva, testo greco,
traduzione, commento e indici di M. Zanatta, 2 voll., Milano, Rizzoli 2009)

Riassunto. *Questa è una versione per studenti di liceo di un mio precedente articolo* [1] *nel quale ho già esposta l'opinione secondo la quale i numeri di Fibonacci* $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5.$ $\ldots$, F_n, F_{n+1}, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $\ldots$ [5] *siano da attribuire alla Scuola pitagorica (nel seguito, semplicemente, Scuola). Marcel-Paul (Marco) Schützenberger, che diceva di essere di religione pitagorica, incoraggiava le ricerche sui numeri di Fibonacci e le parole di Fibonacci* [3] *nella sua scuola a Parigi VII, frequentata anche da me. Mi sembra pertanto assai opportuno iniziare questo articolo proprio con due fra i più noti risultati pitagorici riportati da Euclide: la Proposizione 47 del Libro I e la Proposizione 8 del Libro XIII degli Elementi di Euclide che qui, per semplicità, indico come Primo e Secondo Teorema di Pitagora, si veda* [4]*. Qui di seguito ricordo una particolarissima dimostrazione del Primo, quella classica ed originale di Pitagora del Secondo ed, infine, gli argomenti che mi hanno convinto ad individuare in quest'ultimo teorema l'origine dei numeri di Fibonacci.*

Keywords: Incommensurabilità, Numero d'oro, Numeri di Fibonacci.

[1] Si veda il mio articolo *A characterization of Fibonacci numbers*, Chebyshevskii sbornik, vol. 19, no. 2, pp. 259–271, 2018 [10]. Questo articolo è stato inviato al famoso matematico russo Matijasevič che nel 1970 ha risolto il decimo problema di Hilbert proprio usando alcune proprietà dei numeri di Fibonacci.

1 Il Primo Teorema di Pitagora

L'enunciato è il seguente: *Dato un triangolo* BAC *allora* $BA^2 + AC^2 = BC^2$ *se e solo se* BAC *è un triangolo rettangolo in* A *cioè l'angolo* BAC *è retto.* Nelle Scuole Medie Italiane, è noto nella seguente più semplice formulazione: *Se* BAC *è un triangolo rettangolo in* A *allora* $BA^2 + AC^2 = BC^2$. Si veda la Figura 1.

Fra le moltissime dimostrazioni che si sono accumulate nel corso dei secoli presento quella semplice, spettacolare, brevissima dovuta a James Abram Garfield (1831–1881), ventesimo Presidente degli Stati Uniti d'America. Si veda [6]. Siano BAC un triangolo rettangolo, CDE una sua copia, disponiamoli come in Figura 2, ed uniamo i punti B ed E. Si ottiene un trapezio la cui area può essere calcolata in due modi diversi: facendo la somma delle aree dei triangoli che lo compongono, $2\frac{xy}{2} + \frac{z^2}{2}$, oppure usando la formula tipica per il trapezio, $\frac{(x+y)^2}{2}$. Uguagliando i due risultati e semplificando si ha $x^2 + y^2 = z^2$, cioè, con la terminologia di questo articolo, il *Primo Teorema di Pitagora.*

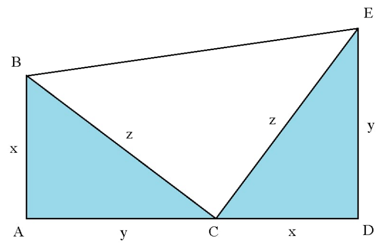

Figura 1: Dimostrazione del 20° presidente degli Stati Uniti

2 Secondo Teorema di Pitagora

Riporto qui di seguito il riquadro di pagina 244 di [1]: *Era tradizione che un rettangolo fosse considerato esteticamente gradevole se, dopo aver tagliato un quadrato di lunghezza* a*, il rettangolo rimanente avesse la stessa forma dell'originale. Le lunghezze dei lati* a, b *di tale rettangolo dovevano soddisfare* $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$*. Ponendo* $\tau = \frac{b}{a}$ *per la proporzione, otteniamo* $\tau = \frac{1}{\tau - 1}$ *ovvero* $\tau^2 - \tau - 1 = 0$*. Risolvendo l'equazione quadratica otteniamo la sezione aurea* $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$*.*

Si consideri ora un pentagono regolare di lato a *e sia* d *la lunghezza delle sue diagonali. Era già noto ad Euclide (Libro XIII,8) che* $\tau = \frac{d}{a}$*, e che il punto di intersezione di due diagonali divide le diagonali nella sezione aurea. Ecco la Book Proof di Euclide.*

Poiché la somma totale degli angoli del pentagono è 3π*, l'angolo ad ogni vertice è uguale a* $\frac{3\pi}{5}$*. Ne segue che* $A\widehat{B}E$ *è* $\frac{\pi}{5}$ *poiché* ABE *è un triangolo isoscele. Ciò, a sua volta, implica* $A\widehat{M}B = \frac{3\pi}{5}$ *e concludiamo che i triangoli* ABC *e* AMB *sono simili. Il quadrilatero* $CMED$ *è un rombo poichè i lati opposti sono paralleli (si guardino gli angoli) e pertanto* $|MC| = a$ *e dunque* $|AM| = d - a$*. In base alla similitudine di* ABC *ed* AMB *concludiamo*

$$\frac{d}{a} = \frac{|AC|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AM|} = \frac{a}{d-a} = \frac{|MC|}{|MA|} = \tau$$

Ora osservo che la relazione $d : a = a : (d - a)$ appena provata può essere riscritta nel modo seguente:

$$d^2 = a^2 + da$$

che è la formula del

Secondo Teorema di Pitagora. *Dato un pentagono regolare il quadrato costruito sulla sua diagonale è equivalente alla somma del quadrato costruito sul suo lato e del rettangolo avente dimensioni la sua diagonale ed il suo lato.*

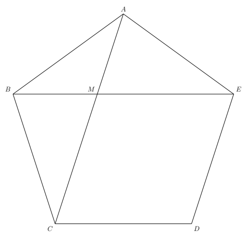

Figura 2: due diagonali che si incontrano in un punto interno del pentagono

Mi sembra assai opportuno riportare qui quanto dice Mirelle Hibon [7] a proposito del Numero d'Oro: *Buongiorno! Si! Si! Avete letto bene : si tratta infatti del famoso, leggendario Numero d'Oro, proprio quello che ha incantato durante i secoli generazioni di costruttori, matematici, filosofi, artisti e poeti. Solo i nostri contemporanei immaginano che il Numero d'Oro sia qualcosa d'oscuro, complicato, misterioso: in breve, non abbordabile se non da persone capaci di sguazzare a loro agio nel grande oceano della matematica.*

Quale errore! Vi dico che non è affatto così. Direi addirittura che i matematici sono persone fin troppo serie per poter loro affidare questa piccola meraviglia. Le persone troppo serie, rivettate al loro intelletto, semplicemente dimenticano ... di giocare e di sognare ... E così passano vicini all'essenziale (senza vederlo).

A queste belle osservazioni di M. Hibon sul Numero d'oro ed all'interessantissimo articolo di Pierre Arnoux che consiglio vivamente di leggere [2], mi limito ad aggiungere che, probabilmente, l'osservazione dei fiori a cinque petali ha giocato un ruolo importante nell'attirare l'attenzione dei pitagorici sul pentagono regolare. Forse hanno disegnato un pentagono riportando su una superficie piana un "bel" fiore pentagonale. Se il fiore fosse stato davvero "bello" e l'operazione fosse stata davvero "ben" fatta allora probabilmente avrebbero verificato che una qualsiasi diagonale (che tocca necessariamente quattro lati) è parallela al quinto lato. Si sarebbe trattato di un parallelismo prima "visto" con metodi empirici e poi formalizzato e verificato con metodi matematici; da qui sarebbero partite tutte le argomentazioni che avrebbero poi portato al Secondo Teorema di Pitagora.

3 Osservazioni sul Secondo Teorema di Pitagora

Consideriamo l'uguaglianza $d^2 = a(a + d)$ del **Secondo Teorema di Pitagora**. Salvo $d = 0$ e $a = 0$, nessun'altra coppia di interi non-negativi può esserne soluzione. Infatti:

i) se d ed a sono entrambi dispari allora $a(a + d)$ è pari ed d^2 è dispari (contraddizione),

ii) se d è dispari ed a è pari allora $a(a + d)$ è pari e è d^2 dispari (contraddizione),

iii) se d è pari ed a è dispari allora $a(a + d)$ è dispari e d^2 è pari (contraddizione).

iv) se d è pari ed a è pari siamo nel caso più delicato: prima di tutto poniamo $d' = \frac{d}{2}$, $a' = \frac{a}{2}$ e notiamo che vale ancora l'uguaglianza $a'(a' + d') = d'^2$. Ora se a' e d' sono ancora entrambi pari possiamo ancora dimezzarli ottenendo a'' e d'' per i quali vale ancora $a''(a'' + d'') = d''^2$. Se anche a'' e d'' sono ancora entrambi pari possiamo dimezzarli ancora. Questi dimezzamenti, tuttavia, non possono produrre **all'infinito** metà che sono ancora pari. Per giustificare formalmente ciò si dovrebbe far ricorso al **principio di induzione** oppure alla seguente *Proposizione Pitagorica*, si veda [8], che gioca un ruolo cruciale: *Una successione strettamente decrescente di interi positivi è necessariamente finita.* Ma, forse, più semplicemente possiamo accontentarci di far notare che ogni intero positivo n deve essere della forma $2^h k$ con $k \geq 1$ dispari e pertanto dopo h dimezzamenti si giunge necessariamente ad un numero dispari; dal caso iv), dunque, si passa necessariamente ad uno dei casi i), ii) e iii) che, come già visto, conducono tutti a contraddizione.

4 Irrazionalità di τ e numeri di Fibonacci

Come procedevano i pitagorici per determinare le lunghezze, che loro pretendevano essere intere, di diagonale e lato del pentagono regolare? Non possiamo saperlo con certezza. Per abuso di linguaggio, indichiamo con a la lunghezza del lato del pentagono regolare e con d la lunghezza della sua diagonale. Per quanto appena ricordato $a(a+d)$ e a^2 non possono essere uguali. Pertanto la loro differenza in valore assoluto deve essere un intero positivo.

Ora 1 è il più piccolo degli interi positivi ed una domanda naturale è la seguente: quando la differenza tra il più grande ed il più piccolo dei due numeri $a(a + d)$ e d^2 assume esattamente il valore 1? Questa è una tipica curiosità da matematici: quando risolvono un problema, la loro attenzione è immediatamente attratta dai nuovi e spesso numerosi problemi che la soluzione sempre porta con se. Così credo che, dopo la scoperta dell'incommensurabilità, la Scuola ha focalizzato l'attenzione su questo nuovo problema.

Oggi, trovare i valori qui sopra richiamati di a e d è molto facile usando un computer. È possibile scrivere un programma che ricerchi, trovi ed inserisca tutti questi valori nella seguente tavola. Mio fratello Mario ha scritto il programma e questo è ciò che accade:

a	d	$a+d$	$a(a+d)$	d^2
1	1	2	1^2+1	1^2
1	2	3	2^2-1	2^2
2	3	5	3^2+1	3^2
3	5	8	5^2-1	5^2
5	8	13	8^2+1	8^2
8	13	21	13^2-1	13^2
13	21	34	21^2+1	21^2
21	34	55	34^2-1	34^2
34	55	89	55^2+1	55^2
55	89	144	89^2-1	89^2
89	144	233	144^2+1	144^2
144	233	377	233^2-1	233^2
233	377	610	377^2+1	377^2
377	610	987	610^2-1	610^2
610	987	1597	987^2+1	987^2
987	1597	2584	1597^2-1	1597^2

Se, come penso, la Scuola ha davvero cercato di trovare i valori appena descritti di a e d allora essi devono anche aver notato la peculiarità dei numeri nella tavola. I numeri di Fibonacci sono nella prima, seconda e terza colonna ed, in più, i quadrati dei numeri di Fibonacci sono nella quinta colonna mentre la quarta colonna contiene alternativamente il predecessore ed il successore di questi quadrati. La tavola e quanto precede dovrebbero essere ampiamente sufficienti per convincere gli studenti di scuola secondaria dell'effettiva origine pitagorica dei numeri di Fibonacci. Segnalo inoltre che nel mio *A characterization of Fibonacci numbers* si trova una definizione pitagorica dei numeri di Fibonacci.

5 Altri risultati di incommensurabilità

Gli irrazionali sono moltissimi così come le coppie di segmenti incommensurabili. Ritengo opportuno ricordare qui alcune di tali coppie da me già presentate in [8].

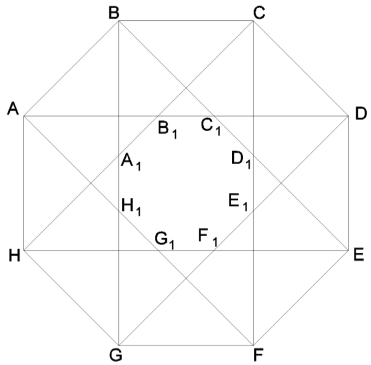

Figura 3: L'ottagono regolare ha diversi tipi di diagonale. Riprendendo la terminologia già usata nel mio articolo su Nuova Secondaria, dico *medie* le diagonali di un ottagono che lo dividono in un trapezio isoscele ed un esagono (non regolare). In questa figura sono tracciate tutte le diagonali medie di $ABCDEFGH$ le quali intersecandosi individuano i vertici di un altro ottagono regolare $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$. In [8] ho dimostrato che AB ed A_1B_1 sono incommensurabili.

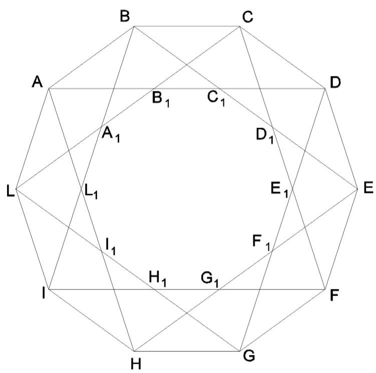

Figura 4: Il decagono regolare ha diversi tipi di diagonale. Riprendendo la terminologia già usata nel mio articolo su Nuova Secondaria, dico *corte* le diagonali di un decagono che lo dividono in un trapezio isoscele ed un ottagono (non regolare). In questa figura sono tracciate tutte le diagonali corte di $ABCDEFGHIL$ le quali intersecandosi individuano i vertici di un altro decagono regolare $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1I_1L_1$. In [8] ho dimostrato che AB ed A_1B_1 sono incommensurabili.

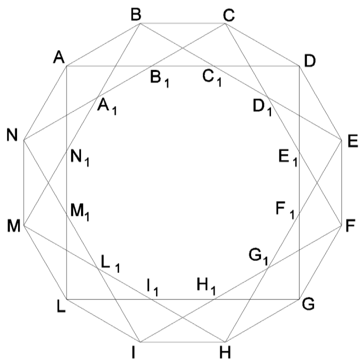

Figura 5: Il dodecagono regolare ha diversi tipi di diagonale. Riprendendo la terminologia già usata nel mio articolo su Nuova Secondaria, dico *corte* le diagonali di un dodecagono che lo dividono in un trapezio isoscele ed un decagono (non regolare). In questa figura sono tracciate tutte le diagonali corte di $ABCDEFGHILMN$ le quali intersecandosi individuano i vertici di un altro dodecagono regolare $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1I_1L_1M_1N_1$. In [8] ho dimostrato che AB ed A_1B_1 sono incommensurabili.

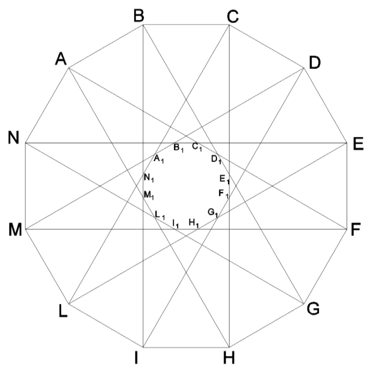

Figura 6: Il dodecagono regolare ha diversi tipi di diagonale. Riprendendo la terminologia già usata nel mio articolo su Nuova Secondaria, dico *lunghe* le diagonali di un dodecagono che lo dividono in un esagono (non regolare) ed un ottagono (non regolare). In questa figura sono tracciate tutte le diagonali lunghe di $ABCDEFGHILMN$ le quali intersecandosi individuano i vertici di un altro dodecagono regolare $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1I_1L_1M_1N_1$. In [8] ho dimostrato che AB ed A_1B_1 sono incommensurabili.

Figura 7: Alcuni argomenti qui usati sono anticipati in [9] dove, fra l'altro, con due numeri di Fibonacci F_n ed F_{n+2} costruisco un ottagono che differisce di pochissimo da un ottagono regolare. I numeri 5, 8 e 13 sono chiari su questo portale il quale è, verosimilmente, del 1163 e comunque ampiamente precedente al 1202, anno della prima pubblicazione del *Liber Abaci*.

Figura 8: Pitagorici al lavoro

Riferimenti bibliografici

[1] M. Aigner, G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2018.

[2] P. Arnoux, A. Siegel, 2004, *Dynamique du nombre d'or*, Actes de l'université d'été de Bordeaux, http://iml.univ-mrs.fr/ arnoux/articles.html. In press.

[3] J. Berstel, *Mot de Fibonacci*, Séminaire d'informatique théorique, L.I.T.P., Paris, Année (1980/1981) 57–78.

[4] Euclide, *Elementi*, in *Euclide tutte le opere*, Introduzione, traduzione, note e apparati di Fabio Acerbi Testo greco a fronte, edito da Bompiani, 2007.

[5] Fibonacci, [Leonardo Pisano, Bigollo], 1857, "*Liber abbaci*", Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo, vol. 1: Il Liber abbaci di Leonardo Pisano / pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabechiano C. 1., 2616, Badia Fiorentina, n. 73 da Baldassarre Boncompagni, socio ordinario dell'Accademia pontificia de' nuovi Lincei, Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

[6] I. Ghersi, *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano, 1967.

[7] M. Hibon, *L'enfant et le nombre d'or*, Association des amis de l'abbaye de Boscodon, Crots, janvier 1996.

[8] Pirillo, G. 2005, "Numeri irrazionali e segmenti incommensurabili", *Nuova Secondaria*, vol. 7, 87–91. citato

[9] Pirillo, G. 2017, "Figure geometriche su un portale del Duomo di Prato", *Prato Storia e Arte*, 121, 7–16.

[10] Pirillo, G. 2018, "A characterization of Fibonacci numbers", Chebyshevskii sbornik, vol. 19, no. 2, pp. 259–271, 2018. citato

[11] von Fritz, K. 1945, "The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum", *Ann. of Math.*, second series, vol. 46, pp. 242–264.