TITRES ET TRAVAUX DE

M.P. SCHÜTZENBERGER

===========

Avril 1988

1. Statistique

En 1948 mon Maître le Professeur R. Turpin m'accueillit dans son service à l'Hôpital St. Louis et me fit obtenir le soutien généreux du Fonds d'Etude de la Société Médicale des Hôpitaux de Paris. Qu'il reçoive ici le témoignage respectueux de ma reconnaissance. J'y employais mes techniques statistiques, peu répandues à l'époque, et quelques notions de génétique apprises à Londres de J.B.S. Haldane. Mes travaux personnels portèrent sur les dermatoglyphes [15] dont R. Turpin avait su voir toute l'importance: les empreintes digitales distinguent l'homme parmi les primates et peuvent refléter des troubles de l'embryogénèse, notamment, de façon caractéristique dans ce que l'on appelle maintenant la trisomie et qui était, comme on le sait, l'un des centres principaux d'activité du Laboratoire de R. Turpin. Je n'ai pas gardé trace de toutes les recherches auxquelles j'ai été mêlé. Cependant l'une m'a beaucoup influencé. C'est la part marginale que je pris à la préparation de la très importante thèse de M. Lamotte sur la génétique des populations d'escargots. Elle me fit prendre conscience des limites inhérentes de l'usage des mathématiques dans les sciences de la vie.

Je travaillais simultanément au Laboratoire de Bouchet avec mon ami P. Gavaudan qui y développait les aspects multiples de sa théorie de la narcose indifférente. En particulier nous étudiâmes l'olfaction [8], [23] où les substances agissent à des activités thermodynamiques très inférieures au millième en contraste avec la gustation où le seuil est en règle au-dessus de quelques pour cents. Ce ne sont bien sûr là que des ordres de grandeur parce que le calcul précis de l'activité thermodynamique est impossible faute d'avoir les valeurs exactes des paramètres physico chimiques de la phase dans laquelle agissent les substances étudiées.

Ces connaissances me furent utiles quelques vingt ans plus tard quand, conseiller scientifique du Dr. Candau, Directeur Général de l'Organisation Mondiale de la Santé, je participai à l'organisation de véritables norias d'experts internationaux pour établir un rapport sur (ou mieux contre) les armes chimiques et biologiques et, au lendemain de la catastrophe de la thalidomide afin de mettre en place un réseau mondial d'alerte sur les accidents causés par les médicaments..

A cette même époque de l'Hôpital St. Louis, une certaine intolérance (qu'on peut juger pathologique) à l'égard du charlatanisme me fit entreprendre une longue étude critique [30] d'un test psychologique qui menaçait de devenir à la mode. Aussi à abuser de la bienveillance inépuisable de mon Maître G. Darmois en lui faisant cosigner un livre aux Editions Rationalistes contre la radiesthésie. Tous ces travaux et d'autres de cette époque ne sont guère que des exercices ou des applications et je n'ose citer que celui concernant les "plans d'expérience" (ou "block designs") introduits par le grand statisticien Ronald A. Fisher. La construction de ces configurations a été une des activités favorites de certains statisticiens avant que Bose et Chaudury (deux statisticiens aussi) précédés sans le savoir par Hocquenghem, ne mènent le sujet à évoluer vers la grande théorie des codes correcteurs d'erreurs. Le problème est le suivant.

Etant donné n, m, k il s'agit de choisir n ensembles E_i de m éléments, chacun dans un ensemble ayant lui même n éléments, de telle sorte que d'une part, chacun des éléments figure dans m des E_i et d'autre part, que $k = \mathrm{Card}(E_i \cap E_j)$ $(i,j = 1,2,\ldots,n\ ;\ i \neq j)$. Une condition nécessaire immédiate est $m(m-1) = k(n-1)$. Un bel exemple que je ne peux me retenir de décrire est celui des $16 (= n)$ ellipses distinguées de la surface de Kummer. Elles contiennent chacune $6 (= m)$ points parmi 16 points remarquables et se rencontrent deux à deux en $2 (= k)$ de ces points. On a bien $6 \times 5 = 2 \times 15$. Par contre on ne peut pas trouver de configuration analogue, même abstraite, pour $n = 46$, $m = 10$, $k = 2$, bien que $10 \times 9 = 2 \times 45$. Je montrai par un argument très simple que si n est pair il n'y a de solution que si $m - k$ est le carré d'un entier [17]. C'était un premier exemple où une condition non immédiate exclut une infinité de cas. Je reçus une carte de félicitations de Sir Ronald.

2. Théorie de l'information

Dans son travail mémorable "On the mathematical theory of communications", Claude Shannon avait introduit en 1949 une série de concepts nouveaux fournissant un modèle efficace des processus de communications et, en particulier, il avait proposé une variante de la notion d'entropie comme mesure de l'information transmise. Je notais dans [14] la parenté formelle entre la négentropie et une expression connue des statisticiens sous le même nom d'information qu'avait introduit Fisher pour évaluer le gain de précision apporté par chaque observation indépendante dans les problèmes d'estimation statistique d'un paramètre inconnu. J. Ville et moi-même découvrimes indépendamment une réinterprétation du modèle de Shannon qui rendait ces deux notions encore plus semblables [25], [29]. Encouragé par Georges Darmois, je consacrais ma thèse [40] à l'étude de ces questions. J'y montrais que la notion générale d'information que je proposais contenait outre les informations de Shannon-Wiener et de Fisher une autre expression due à A. Wald et qui joue un rôle de base dans la technique statistique connue sous le nom d'analyse séquentielle ; je trouvais même un quatrième cas intervenant dans un problème - d'ailleurs extrêmement particulier - d'observation statistique. Cette famille d'analogies se révéla assez fructueuse parce que de nombreux énoncés concernant l'une de ces "informations" suggèrent en règle des énoncés parallèles relatifs aux situations relevant d'une autre (cf. [54]). Elle me mena à analyser de façon générale les propriétés formelles de l'entropie comme fonction définie sur un certain treillis et ces treillis eux-mêmes. Dans une deuxième partie j'étudiais un modèle général où ces différents concepts s'appliquent efficacement. Les situations couvertes sont illustrées par divers problèmes d'estimation de fréquence en génétique des populations ou dans la méthode de mélange des échantillons. J'ai eu quelques très rares occasions de m'en servir pendant les quelques années où je fus épidémiologiste itinérant de l'Organisation Mondiale de la Santé de Rangoon à Surabaya. Le même modèle a été repris et analysé avec beaucoup plus de détails par Cl. Picard et ses élèves sous le nom de théorie des questionnaires.

Je dois cependant reconnaître que ma thèse n'a pas résolu le problème qu'elle posait : les diverses "informations" considérées conduisent chacune à une "inégalité fondamentale" qui exprime le maximum de ce que peut apporter une observation élémentaire par rapport à la poursuite du but (diagnostic, précision de l'estimation, test de rejet, etc...) que schématise le modèle. Ces inégalités sont non-triviales - en ce sens que chacune d'elle requiert une preuve spéciale qui est assez délicate. Il eût été souhaitable de pouvoir unifier ces preuves, du moins en partie. Je n'y ai pas encore réussi, non plus d'ailleurs que les autres chercheurs qui depuis quarante ans s'attaquent répétitivement à ce même problème. Quoiqu'il en soit, ce travail m'a valu d'être appelé au Research Laboratory of Electronics au M.I.T. pour faire partie de l'équipe que Cl. Shannon était en train d'organiser et où je passai un an avant de venir enseigner le Calcul des Probabilités à Poitiers.

3. Théorie des codes

Le terme code a reçu de nombreuses acceptions ; je l'emploierai ici dans le premier sens qu'il avait dans la Théorie des communications : un code d'un ensemble E de messages élémentaires sur un alphabet A est l'attribution à chaque e de E d'un mot $e\alpha$ dans les lettres de A ; c'est le cas par exemple du code génétique universel des êtres vivants : E est l'ensemble des vingt acides aminés, A celui des quatre nucléotides Adenine, Cytosine, Guanine et Uracile, et chaque $e\alpha$, chaque "codon", étant un mot de trois lettres sur ce dernier alphabet. Un autre exemple serait le codage de $E = \{0,1,...,9\}$ par les dix mots $0^i\,1$ $(0 \le i \le 9)$ sur l'alphabet $A = \{0,1\}$. Ce cas est plus représentatif de la théorie qui nous occupe ici parce que les mots $e\alpha$ sont de longueur variable. L'ensemble des mots d'un code doit alors avoir une structure très spéciale pour qu'une suite de lettres de A puisse être décodée sans ambiguité. Par exemple les trois mots 0, 01, et 10 ne forment pas un code parce que la suite 010 admet *deux* décodages (0) (10) et (01) (0). Ni les problèmes, ni les méthodes ne sont les mêmes que dans la théorie des codes correcteurs d'erreurs.

Il y a une manière très simple de fabriquer des codes ; les objets obtenus sont maintenant appelés *codes préfixes* et il semblait plus ou moins implicitement admis qu'il n'en existait pas d'autres. Cependant pour l'algébriste que j'étais le problème se posait différemment [45], [46] : un code est la base d'un sous monoïde *libre* du monoïde libre A^* ou, si l'on préfère, le codage $\alpha : E^* \dashrightarrow A^*$ est un morphisme injectif. La plupart des propriétés intéressantes du point de vue des communications peuvent alors être formulées en langage mathématique. Par exemple une certaine condition naturelle de complétude nécessaire pour utiliser sans perte une ligne de transmission équivaut à la condition que l'image $E^*\alpha$ rencontre tous les idéaux de A^*. Cette théorie rend possible de fabriquer des codes complets qui ne soient ni préfixe, ni suffixe. L'exemple le plus simple est {00, 010, 011, 10, 11}. Dans cette optique, j'observais que les codes préfixes complets (finis ou infinis) pouvaient être interprétés à peu près directement comme les supports de certains processus stochastiques qu'avait introduit W. Feller sous le nom *d'évènements récurrents* pour modéliser des situations telles que les files d'attente. Ceci permettait en retour d'appliquer aisément divers résultats du calcul des probabilités aux problèmes de codage.

Une autre question importante est celle de la *synchronisation.* Pour $\{0^i1\}$ évoqué plus haut, le décodage peut s'effectuer de façon purement locale et la perte du début d'un message n'influe pas sur le reste de la lecture. Il en va tout autrement du code génétique : une suite telle que ... GUUGUUGUUGUUGU... peut être interprétée comme codant une chaîne de Valines puisque GUU est l'un des codons de cet acide aminé ; la même suite décalée donnerait une chaîne de *Leucines* (donc un des codons est UUG) ou de *Cystéines* (UGU). Il semble même que ce phénomène de lecture multiple par simple décalage soit utilisé par certains virus. Indépendamment de ce cas particulier il y a un intérêt certain à savoir si un code possède ou non des propriétés de synchronisation et la théorie algébrique du codage que je proposais dans [45] puis [46] ramène cette question à celle de la nature de certains groupes dans un monoïde quotient associé au code considéré et que j'appelais le *monoïde syntaxique* de ce dernier.

Toute une série d'articles ont suivi ces premiers travaux. J'ai eu la chance de pouvoir intéresser à cette question des chercheurs de grande valeur et j'ai eu tout récemment l'immense joie de voir publier un ouvrage d'ensemble sur la Théorie des Codes (Theory of Codes, Academic Press 1987) par deux amis très chers Dominique Perrin et Jean Berstel qui ont éminemment contribué à son développement.

Le sujet est d'actualité car la théorie des codes synchronisants donne des résultats puissants pour étudier certains objets de la dynamique symbolique qui servent de modèle à l'optimisation de la mise en mémoire sur disques d'après les travaux de Adler et des ergodiciens de son équipe au J. Watson Research Center de l'IBM.

Avouerai-je que ces applications et d'autres à venir ne sont pour moi que l'une des raisons de l'intérêt que je porte aux codes et dirai-je que ma conception des mathématiques appliquées est de voir dans les applications une source extérieure de théorèmes et d'intuitions de techniques de preuve pouvant être utilisées pour le progrès de la science mathématique en supplément des motivations internes que fournit la structure et le mouvement mêmes de cette science.

Dans le cas des codes les deux axes qui me semblent justifier l'intérêt de ces objets sont les suivants :

d'une part au niveau le plus élevé, l'étude des sous-structures des structures libres. En effet, les monoïdes sont les structures les plus simples pour lesquels les objets libres ont des sous-objets qui ne le sont pas nécessairement, le cas des monoïdes commutatifs ayant été réglé par S. Eilenberg et moi-même [100].

A un niveau plus précis, les semigroupes finis ont, je crois, un rôle à jouer dans la pratique et l'enseignement de demain car sans même parler de l'informatique, la technique contemporaine avec ses multiples systèmes digitaux abonde en situations où l'on a besoin de résultats assez fins concernant le semigroupe engendré par des actions opérant sur un ensemble fini. La théorie des semigroupes finis n'est ni triviale, ni formelle et ne constitue en rien une variante ou une généralisation de celles des groupes ou des anneaux. Elle est indiscutablement beaucoup moins riche que ces dernières mais ses théorèmes fondamentaux (de Suschkevitch, de Greene, de Clifford) mériteraient d'être plus largement connus. Il ne s'agit pas d'élargir ou d'approfondir des galeries dans la mine d'or de la théorie des groupes mais d'inventer quasiment de toutes pièces des énoncés et des techniques de preuve et des objets nouveaux pour appréhender les systèmes discrets finis. La théorie des codes et celle des automates finis proposent des problèmes précis et parfois suggèrent des solutions. Au bout de nos efforts nous espérons trouver parfois quelque chose à apporter au courant principal de la Mathématique.

Par exemple les codes bipréfixes (complets finis) sont un objet remarquable. Y. Cesari a donné une méthode permettant en principe de les calculer tous. Un théorème profond de D. Perrin montre que leur monoïde syntaxique contient nécessairement un groupe *deux fois* transitif. C'est un nouveau cas où de tels groupes peuvent être produits de façon systématique.

Autre exemple : une famille particulière de codes synchronisants se trouve en bijection avec certaines bases de l'algèbre de Lie libre [55] (par effacement des crochets) ce qui ramène la preuve du théorème de Poincaré Birkhoff Witt à un résultat de factorisation des monoïdes libres et permet diverses autres applications étudiées par Viennot dans un fascicule des Lectures Notes de Springer.

La théorie des codes pose encore une énigme : est-il vrai que tout code (complet fini) X est commutativement équivalent à un code préfixe ce qui indiquerait que ces derniers sont optimaux par rapport à toute attribution d'un coût aux signaux élémentaires ? La formulation algébrique de ce résultat serait que $A^* = PX^*Q$ où X^* est le monoïde engendré par X, et P et Q deux polynômes à coefficients *non négatifs*. J'ai donné dans [81], [93] un résultat plus faible impliquant que les codes non préfixes sont des objets très très particuliers. Récemment C. Reutenauer a démontré l'existence de la factorisation voulue de A^* mais sans pouvoir établir la positivité des coefficients. La preuve est fort difficile et la question reste posée.

Je mentionne encore un résultat. Les méthodes de la théorie ergodique permettent d'étendre divers résultats probabilistes aux suites infinies. Un théorème de F. Blanchard et D. Perrin fait apparaître une complémentarité surprenante entre les incertitudes que laisse l'observation des messages reçus soit sur la distribution de probabilité à la source fournissant les messages émis soit à cause de l'absence de synchronisation entre émetteur et récepteur sur ces messages eux-mêmes. On peut se demander s'il n'y a pas là un lien avec des problèmes propres de la théorie de l'information.

4. Langages algébriques et rationnels

De retour à Cambridge (Mass.) en 1961 je m'aperçus que le principe des grammaires génératives du linguiste Noam Chomsky recoupait certains des travaux que j'avais entrepris dans les années précédentes [63]. Chomsky proposait de réduire toute grammaire des langues naturelles à un système de règles d'un type uniforme exprimant la possibilité de remplacer un mot par une suite de mots (on dit aujourd'hui syntagme) sans altérer la grammaticalité de la phrase, par exemple un substantif par une clause relative. De tels systèmes avaient déjà été rencontrés épisodiquement par les logiciens mais c'est Chomsky qui a su en voir toute l'importance et qui a commencé à en développer les conséquences.

De mon côté, pour expliquer l'apparition de nombres algébriques (non rationnels) dans divers problèmes classiques de probabilité (retour à l'origine, loi Arcsin, etc...), j'avais été conduit à exploiter à fond l'idée de fonction génératrice de Laplace en associant à un ensemble de mots leur somme (infinie à coefficients 0 ou 1) dans l'algèbre large du monoïde libre et à examiner les cas où une telle série est solution d'une équation (ou d'un système fini) d'équations polynomiales (non commutatives). Pour prendre l'exemple le plus simple l'équation quadratique $\xi = a\xi\xi + b$ en l'inconnue ξ définit l'ensemble des mots en a et b dont tous les segments initiaux (propres) ont au moins autant de a que de b et qui ont eux-mêmes un b de plus que de a. Or cet ensemble est précisément celui produit par les deux règles de Chomsky $\xi \dashrightarrow a\xi\xi$ et $\xi \dashrightarrow b$ qui donnent par itération b, abb, aabbb, ababb ... etc. Le lien avec la syntaxe informatique se voit en interprétant a comme la parenthèse ouvrante "(" et b comme la parenthèse fermante ")", les mots obtenus devenant alors, au dernier b près, les "expressions bien parenthésées".

L'usage de telles séries algébriques non commutatives permettait de retrouver et de développer sans peine les résultats de Chomsky et de ses collaborateurs. Après avoir consigné ceci dans les très confidentiels Quaterly Progress Report du M.I.T conformément à une vieille tradition du R.L.E. [64], je proposai à Noam de rassembler dans une publication commune tout ce que nous savions sur ce sujet [78]. En cours de route se découvrit le phénomène surprenant que le groupe libre jouait pour les séries algébriques un rôle analogue à celui joué par les groupes finis pour les automates finis. Ce résultat est resté l'une des bases de la théorie. De façon équivalente il exprime que tout langage "context free" peut être obtenu par des opérations de niveau plus élémentaire à partir du noyau d'un morphisme d'un monoïde libre dans un *groupe* libre. Les premiers cas que j'avais considérés et qui apparaisent en calcul des probabilités relèvent du groupe libre à un seul générateur, c'est-à-dire du groupe Z des entiers. Nous appelâmes ces ensembles de mots (ou plus précisément d'autres étroitement apparentés, "langages de Dyck" en hommage au pionnier de la théorie des groupes libres.

C'est à cette époque que débutaient indépendamment de nous les premières recherches dans ce qui devait devenir l'informatique théorique. S. Ginsburg avait fait observer que les langages de programmation tels que le Fortran ou l'Algol qui étaient alors d'origine récente pouvaient, pour l'essentiel, être commodément décrits au moyen de règles du type proposé par Chomsky. D'autres chercheurs avaient introduit pour l'analyse syntaxique et la compilation de ces langages un type d'automates infinis dits "à pile" ou "push-down". Notre technique permettait de traiter systématiquement ces question et le théorème sur les "langages de Dyck" équivaut à l'assertion que les automates à pile sont en quelque sorte l'algorithme universel de compilation. Ces mêmes méthodes permettaient d'obtenir bien d'autres résultats nouveaux tant sur les langages algébriques ("context-free") que sur les automates à pile et apparentés et le sujet est devenu un des chapitres standard de l'enseignement de l'informatique théorique. Pour plus de détails je renvoie au livre bien connu de M. Gross et A. Lentin (Notions sur les grammaires formelles 1967) qui, en diverses langues, et pour plus de dix ans, a été le seul manuel consacré à une question de pure informatique théorique avant d'être relayé par le livre de J. Berstel (Transductions and Context free languages).

Une autre application notable de ces séries qui a été développée par R. Cori et ses élèves est l'énumération (à vrai dire, mieux : la construction systématique) des graphes planaires. Grâce à un théorème de Lentin et de Jacques lié lui même aux équations quadratiques dans le groupe libre, chacun de ceux-ci peut être codé aussi bien par un mot que par une paire de permutations des sommets, ces objets étant soumis à des contraintes qui garantissent la planarité et en ce qui concerne les mots ces contraintes sont de nature "algébrique" au sens donné ici à ce terme.

Un des problèmes les plus importants est de retrouver la structure de la "grammaire", (c'est-à-dire du système d'équations) à partir de l'ensemble de mots qu'elle définit. La méthode la plus profonde est celle de la "double étoile" de J. Bersson. Elle caractérise facilement le cas des séries définies par un système d'équations du premier degré.

Cependant pour obtenir des séries ayant de "bonnes propriétés" les distinguant utilement du cas général il faut supposer en outre que les inconnues n'apparaissent que comme facteur initial (ou final) des mots définissant les équations. On trouve alors ce que j'ai appelé les "séries rationnelles" (non commutatives) [67]. A la différence des séries algébriques générales où il n'y a pas grand'chose à dire quand les coefficients ne sont pas positifs, le cas générique des séries rationnelles à coefficients quelconques (dans Z ou dans Q) offre une foule de questions mathématiques que l'on peut espérer traiter et, il se trouve de surcroît servir de modèle à des situations assez diverses ; je cite par exemple : la théorie des relations rationnelles (où l'on remplace le monoïde libre A^* par le produit direct de deux monoïdes libres) dont M. Nivat a montré toute l'importance dans la théorie des séries algébriques et dans ses applications à la compilation ; l'usage par M. Fliess de ces mêmes séries rationnelles non commutatives montrent qu'elles peuvent fournir des développements utiles dans la théorie du contrôle.

Le résultat de base est que toute série rationnelle non commutative est obtenue par projection à partir d'une représentation d'un monoïde libre par un monoïde de matrices de dimensions finies à entrées dans l'anneau de ses coefficients. Ceci équivaut à l'existence d'un système fini de récurrences linéaires entre ces coefficients et réciproquement, tout système de ce type correspond à une série rationnelle. Nombre de problèmes d'énumération se ramènent à ce modèle et plusieurs livres en France (J. Berstel et C. Reutenauer) ou à l'étranger (A. Salomaa) ont été consacrés à ce sujet et à ses diverses applications.

Un résultat utile est l'extension du produit de Hadamard. Il est naturel de faire correspondre à l'intersection de deux ensembles le produit de Hadamard de leurs séries génératrices (c'est-à-dire la série dont les coefficients sont les produits terme à terme des deux séries) et cette idée tout comme l'usage des séries formelles dans l'algèbre large d'un monoïde fait maintenant partie des techniques standard de l'analyse combinatoire. De façon analogue le produit de Hurwitz de la théorie classique des fonctions analytiques se généralise aux séries non commutatives en faisant intervenir le "shuffle" (ou "produit de mélange") des mots au lieu de leur produit de concaténation.

Une technique simple (qui est essentiellement l'usage d'un produit tensoriel) permet de montrer que dans le cas général (non commutatif) le produit de Hadamard d'une série algébrique par une série rationnelle est encore une série algébrique. En prenant une image appropriée on obtient comme corollaire un théorème ancien de Jungen qui énonce exactement la même chose pour les fonctions d'une seule variable [70]. Un énoncé semblable s'applique au produit de Hurwitz. Si l'on se borne aux séries associées à des ensembles de mots, le même résultat signifie que l'image d'une partie algébrique par une relation rationnelle est encore algébrique. Une telle image serait, par exemple, l'intersection (ou le shuffle) avec une partie du monoïde libre définie par un automate fini. Ces considérations ont été reprises en toute généralité par S. Eilenberg qui consacre plusieurs chapitres de son traité Automate, Languages and Machines aux séries formelles en général et aux séries rationnelles en particulier.

5. Automates finis et transducteurs

Pour des raisons de commodité d'exposition je n'ai pas respecté l'ordre chronologique qui eût voulu que cette section vint avant la précédente car je commençai à m'occuper des automates dès 1959 quand nous offrîmes aux étudiants du M.I.T. un cours d'été sur ce sujet tout nouveau.

Les automates finis - assez malencontreusement nommés - sont des algorithmes dont le fonctionnement, quelque soit sa durée, ne fait appel qu'à une mémoire *bornée*. Bien que leur mémoire soit fort courte, les calculettes ne sont pas considérées utilement comme des automates finis puisque leur emploi normal exige que l'on reste en deçà des limites de capacité des registres. Par contre tous les ordinateurs gros ou petits fourmillent d'automates finis qui y assurent mille fonctions ancillaires répétitives - à commencer par l'addition - et les programmes de traitement de texte ne sont guère qu'un réseau de tels algorithmes plus ou moins ingénieux.

Faisant usage de la nomenclature actuelle, nous dirons qu'une partie X d'une structure S est *reconnaissable* si et seulement si il existe un morphisme φ de S' sur un objet fini tel que l'on ait $X = X\varphi\varphi^{-1}$, c'est-à-dire tel que l'appartenance à X d'un élément, w, puisse être reconnue à partir de la seule connaissance de l'image $w\varphi$.

D'autre part, un automate fini est une représentation du monoïde libre A^* par des applications d'un ensemble fini dans lui-même (dont les éléments sont les *états* du système physique qui réalise l'automate) et qui fournit donc immédiatement un algorithme de reconnaissance des mots une fois choisis des états initiaux et finaux distingués.

Le théorème fondamental de la théorie est dû au grand logicien Kleene qui l'avait formulé sans employer les monoïdes dans le langage biscornu alors fort à la mode des réseaux de neurones abstraits.

Ce théorème affirme qu'une partie X d'un monoïde libre A^* est reconnaissable si et seulement si on peut l'obtenir à partir des parties finies de A^* par une chaîne (finie) d'unions, de produits et d'opérations : $Y \dashrightarrow Y^*$ consistant à prendre le sous-monoïde Y^* engendré par une partie Y déjà obtenue.

Toutes ces notions m'étaient déjà familières : dans ma terminologie X est reconnaissable si et seulement si son monoïde syntaxique, déjà mentionné plus haut à propos des codes, est fini ; d'autre part, recourant aux séries non commutatives, on peut relever l'union en somme, le produit restant le produit et l'opération $Y \dashrightarrow Y^*$ devenant $Y \dashrightarrow 1 + Y + Y^2 + ... + Y^n + ... = (1-Y)^{-1}$, sans qu'il y ait grande difficulté à esquiver tout problème de convergence. Le théorème de Kleene pouvait donc être présenté à nos auditeurs comme l'assertion que le monoïde syntaxique d'une partie X de A^* est fini si et seulement si X appartient à un *semi* anneau des séries rationnelles satisfaisant certaines conditions de régularité. Ces dernières sont trop lourdes pour être reproduites ici ; le terme *semi* précise que seule l'addition est autorisée, la soustraction ne figurant pas parmi les opérations de cette structure.

Ce glissement était d'autant plus justifié que la simple considération des automates montre que l'on peut associer à toute partie reconnaissable X de A^* une série dont les coefficients sont 1 ou 0 et qu'en particulier on peut limiter l'usage de l'opération infinitiste $Y \dashrightarrow Y^*$ au cas où Y est un code.

Un autre résultat de Kleene - assez évident d'après la définition de la reconnaissabilité - est que l'intersection de deux parties reconnaissables est encore reconnaissable. Ceci équivaut au théorème classique (étendu aux séries non commutatives) que le produit de Hadamard de deux séries rationnelles est une série rationnelle, un énoncé qui on l'a vu plus haut s'étend au cas algébrique.

La preuve du théorème de Kleene reste toujours relativement longue et délicate et ce théorème a un statut assez exceptionnel en mathématiques car malgré maints efforts il ne semble admettre aucune variante ou généralisation non triviale qui s'appliquerait à d'autres structures que les monoïdes (ou semigroupes libres). Ainsi, comme l'a observé S. Eilenberg, les parties reconnaissables des groupes ou des monoïdes commutatifs ne sont pas nécessairement rationnelles mais seulement algébriques (au sens donné à ce terme dans la section précédente).

Un autre aspect notable est que les parties reconnaissables peuvent être caractérisées par des formules appartenant à certains types de logiques restreintes, un sujet qui a suscité des travaux importants de O. Rabin, de P. Schupp et aussi les premières recherches de Conway.

Quoiqu'il en soit la théorie des automates finis est riche en problèmes : certains ont un intérêt pratique comme les problèmes de minimisation, ou de hiérarchisation précisant la nature des sous automates minimaux nécessaires pour synthétiser - par mise en série, par produit en couronne, ou autrement, un "gros" automate donné. Citons aussi les problèmes liés à l'existence de mots ayant telle ou telle action sur les états, par exemple assurant la synchronisation. D'un point de vue théorique, le problème se pose d'établir les correspondances entre les propriétés des ensembles de mots - en tant que tels - et celles des monoïdes finis qui en sont les images syntaxiques. Cette question est importante parce que la possibilité d'une telle réduction (à des propriétés d'un monoïde fini) conditionne la décidabilité de la propriété correspondante d'une famille de parties de A^*. Pour mettre en valeur ce point, je mentionne qu'en ce qui concerne les parties "algébriques", le simple problème de leur égalité éventuelle est en règle indécidable, les automates à piles sous jacents n'étant pas des automates finis.

Toutes ces recherches demandaient que l'on améliore la théorie des semigroupes finis, ce à quoi je m'employais dans une série de publications en introduisant une représentation commode (parce qu'elle livre de façon à peu près immédiate l'ensemble des morphismes) par des matrices de dimension finie à entrées dans l'union d'un groupe et d'un zéro et en précisant pour ce faire un théorème de A.H. Clifford. Ceci a donné prétexte à cet auteur à associer fort généreusement mon nom dans son traité sur les semigroupes à certains groupes liés aux classes d'éléments engendrant le même idéal.

A vrai dire la finitude n'est guère qu'une commodité d'exposition comme l'ont montré A. Wallace et son école car la condition assurant qu'un semigroupe a de bonnes propriétés algébriques est la compacité. C'est le cas par exemple de semigroupes de matrices stochastiques de dimension *finie* qui se laissent facilement compactifier donnent ainsi des résultats intéressants pour l'étude de certains processus stochastiques (Théorème de Wolfowitz) liés à l'étude des perturbations aléatoires des automates [94], [97].

Revenant au sujet principal et à la dernière perspective évoqués plus haut, le logicien R. McNaughton, un des pionniers de l'informatique théorique à la Moore School of Electrical Engineering, avait isolé un type particulier de calcul logique et démontré qu'il correspondait très exactement aux parties du monoïde libre que l'on peut obtenir par les opérations de Kleene sans employer l'opération infinitiste $Y \dashrightarrow Y^*$ à condition de la remplacer par la complémantation booléenne $Y \dashrightarrow A^* \setminus Y$, c'est-à-dire, en termes de séries formelles, par la soustraction restreinte aux séries à coefficients 0 ou 1.

Je m'aperçus qu'une autre caractérisation (décidable, cette fois) de cette famille spéciale de parties reconnaissables est que tous les groupes contenus dans leur monoïde syntaxique sont triviaux [83]. Ou, si l'on préfère, qu'on peut les reconnaître avec des automates ne disposant d'aucune boucle de comptage modulo p. Pour cette raison ces parties sont maintenant appelées *apériodiques*. Elles se rencontrent assez souvent dans la nature, si j'ose dire, mais leur structure peut être diaboliquement compliquée et leur étude est devenue un sujet majeur par le biais de la théorie des pseudo-variétés de structure qui me force à ouvrir une parenthèse d'algèbre universelle.

Un théorème classique de Birkhoff énonce qu'une famille de structures algébriques est définie par des identités si et seulement si elle contient chaque objet quotient d'un sous objet d'un de ses objets et si elle est fermée par produit direct *infini*. On dit alors que c'est une *variété* (de structures). Un exemple type est la famille des groupes résolubles ; par contre la famille des p-groupes n'est pas une variété ce qui m'avait beaucoup contrarié quelques vingt ans plus tôt quand, débutant sans expérience, je m'essayais à étudier les treillis. Avec S. Eilenberg nous substituâmes aux variétés les "pseudo-variétés" (de structures) en exigeant seulement la fermeture par produit direct fini et en montrant que chaque pseudo variété est définie par une suite infinie d'identités et la condition que chaque objet satisfasse ces identités sauf un nombre fini d'entre elles. Ainsi les p-groupes finis sont définis par la suite d'identités ($g^{p^n} \equiv 1$, $n \in N$).

Avec cette nouvelle notion, les semigroupes finis apériodiques forment une pseudo variété et l'on peut classer les parties reconnaissables d'après les pseudo variétés à laquelle appartient leur monoïde syntaxique. Le volume B du traité de S. Eilenberg est pour l'essentiel consacré à ces questions et il donne une foule d'exemples plus ou moins importants dûs à l'un ou à l'autre ou l'un et l'autre de nous deux ou à d'autres chercheurs et remis dans cette nouvelle perspective. Un des plus remarquables a été découvert par I. Simon. Il concerne les automates qui ne peuvent reconnaître que les sous mots d'un mot sans savoir si ils en sont ou non un facteur (aa ou bbc sont des sous mots de babca sans en être des facteurs). Les parties qu'ils reconnaissent ont pour monoïde syntaxique les monoïdes de la variété des monoïdes finis dont chaque idéal principal a un générateur unique. Ce sont donc des monoïdes apériodiques très spéciaux et le lien qu'a trouvé I. Simon entre eux et les idéaux par rapport à l'opération de "shuffle" (ou "mélange") dans l'algèbre du monoïde libre est extrêmement surprenant.

Riche en conjectures précises, la théorie des pseudo-variétés de langages suscite des recherches actives aux Etats Unis, dans les pays de l'Est et en France où J.-E. Pin a obtenu des résultats remarquables et publié récemment un livre faisant le point des travaux en cours. ("Théorie des variétés de langages formels").

Transducteurs

La théorie des automates a une autre province qui paraît plus immédiatement pratique mais qui s'est révélée être techniquement beaucoup plus difficile. Il s'agit de dispositifs, les *transducteurs,* dont le rôle est de transformer en un mot de sortie ("output"), $w\alpha$, tout mot d'entrée ("input"), w, de leur domaine. C'est un cas particulier des relations rationnelles étudiées par M. Nivat.

Le cas le plus simple est celui des *"machines séquentielles"*. Elles sont basées sur un automate fini et leur opération consiste à incrémenter successivement le mot de sortie, à chaque lettre lue, par un mot élémentaire dépendant à la fois de cette lettre et de la transition qu'elle provoque sur les états de l'automate. L'exemple type est l'additionneur. L'alphabet d'entrée est formé des paires de chiffres de façon à représenter par un mot unique les deux termes à sommer ; le mot de sortie est la suite de chiffres figurant le résultat de la somme et l'automate fini a pour mission de veiller aux retenues et de modifier en conséquence chaque sortie élémentaire.

Le problème de la minimisation des machines séquentielles a longtemps occupé les chercheurs. Comme bien d'autres questions de l'informatique il est si bien réglé maintenant qu'on peut l'enseigner à tous les niveaux sans trop se soucier de la théorie sous-jacente. Il reste cependant bien d'autres questions ouvertes.

On observera que l'additionneur ne peut pas opérer de gauche à droite en raison de la possibilité imprévisible d'une cascade de retenues. Ce modèle est donc trop restreint et il faut passer à un niveau supérieur pour obtenir, par exemple, le décodage d'un code qui ne serait pas préfixe. Il s'agit alors d'un transducteur plus compliqué [66] qu'Eilenberg appelle une *bimachine*. Ce dispositif peut réaliser les "fonctions rationnelles" (rationnel au sens de la section précédente) les plus générales d'un monoïde libre dans un autre et on montre que ces fonctions peuvent être effectuées par deux machines séquentielles dont la première donne par lecture de gauche à droite un mot de sortie, qui, une fois cette passe achevée, sert à son tour de mot d'entrée pour une seconde machine séquentielle fonctionnant elle dans l'autre sens.

J'ai donné [22] une autre définition de ces fonctions rationnelles en utilisant une extension (non commutative) des matrices de Hankel qui fait mieux apparaître la condition de finitude sans laquelle toute la théorie ne serait que généralités formelles oiseuses. Avec mon ami Choffrut qui a lui-même beaucoup contribué à ce sujet, nous avons étudié [146] le problème que je trouve fascinant de déterminer pourquoi et comment une bimachine doit "faire comme si" elle utilisait simultanément une lecture gauche-droite et une lecture doite-gauche bien que ceci soit physiquement absurde.

Enfin C. Reutenauer et moi avons tout récemment réussi à caractériser les transductions jouissant de la propriété qu'on peut les réaliser à l'aide d'un automate fini apériodique, ce qui ouvre la voie à de nouvelles applications de la méthode des pseudo-variétés.

6. Théorie des mots

Les mots sont apparus comme la matière première des recherches évoquées dans les sections précédentes et j'ai souligné leur intérêt dans diverses techniques contemportaines, de l'informatique à la biologie moléculaire. On voit même se constituer comme une "biologie moléculaire informatique" puisque l'on dispose maintenant de méthodes automatiques qui fournissent le décodage de séquences de nucléotides si nombreuses et si longues (de l'ordre du millier de bases ou plus) que leur étude ne peut guère être faite sans l'aide d'un ordinateur et de logiciels appropriés, qu'il s'agisse de leur régularité statistique, du calcul de divers paramètres physico-chimiques et, bien sûr, a fortiori, de leur comparaison pour essayer de retracer leur évolution dans l'échelle des êtres vivants.

Du point de vue purement mathématique je suis convaincu que les meilleurs preuves en théorie des automates finis reposent sur les propriétés des mots parce que celles-ci font directement intervenir la compacité du monoïde des transitions mais je j'ai pas réussi à faire partager cette opinion à S. Eilenberg qui préfère des techniques moins élémentaires mais plus générales.

Ces mêmes propriétés jouent un certain rôle en théorie du groupe libre [60], [75], [134] et interviennent aussi dans divers autres problèmes d'algèbre. J'ai évoqué à propos des codes synchronisants un théorème de factorisation et ses applications aux algèbres de Lie libre. Le même théorème a permis à C. Reutenauer et moi-même de donner une formule donnant le déterminant (ou n'importe quelle fonction symétrique des racines, d'ailleurs) d'une somme de matrices m_i à partir des mêmes fonctions calculées sur certains monomes en les m_i dont l'ensemble (fini) ne dépend que de la dimension commune des matrices considérées [149].

Certaines des propriétés fondamentales des mots pourraient par un simple effort de rhétorique être modifiées de telle sorte qu'elles apparaissent comme portant sur des fonctions de variable réelle $f : \mathbf{R} \dashrightarrow \mathbf{R}$. C'est le cas d'un théorème profond de Cesari. Dans ce langage il donne la période de f comme le minimum du maximum des périodes (ou plus exactement d'une ingénieuse modification de cette notion) des restrictions de f aux intervalles finis. Il permet d'améliorer sensiblement des constantes dans des problèmes d'équation (ou de présentation) dans les groupes libres. Il a le même effet dans un énoncé [126] qui précise le théorème de Kleene en montrant que quand on restreint l'opération fondamentale infinitiste $Y \dashrightarrow Y^*$ de formation de sous monoïdes aux ensembles Y d'au plus k-1 mots, tous les groupes dans le monoïde syntaxique de l'ensemble obtenu sont des produits directs de groupes commutatifs et de sous groupes du groupe symétrique sur k lettres.

Bien d'autres chapitres des mathématiques font usage des propriétés des mots : par exemple les "mots sans carrés" (c'est-à-dire sans facteur de la forme ww) jouent un rôle dans la dynamique symbolique de Morse. J. Berstel a découvert un lien avec l'itération de morphismes d'un monoïde libre dans lui-même. Une autre approche est la théorie des semigroupes répétitifs de J. Justin qui donne en corollaire le théorème célèbre de Van der Waerden sur l'existence de progressions arithmétiques dans les parties de $\mathbf{N}$. (C'est un cas particulier d'un résultat sur le monoïde associé aux "automates à pile"). Une autre application, curieuse, des mots et des morphismes itérés est leur emploi sous le nom de "système de Lindenmeyer" comme modèle de la croissance et de la forme de certains végétaux.

Il manquait un ouvrage présentant avec des notations uniformes raisonnables tous les résultats de base concernant les mots épars dans la littérature mathématique. D. Perrin a eu le mérite insigne d'organiser l'effort collectif de plusieurs de mes amis qui a produit le volume 17 de l'Encyclopedia of Mathematics, devenu ouvrage de référence (jusqu'à la prochaine édition refondue qu'on attend).

7. Recherches en Combinatoire

A vrai dire je ne sais pas bien ce que signifie le mot "combinatoire" qui s'est si largement répandu depuis une quinzaine d'années. Quel est le dénominateur commun entre le vénérable "Combinatory Analysis" de MacMahon qui traite sans le dire toujours trop clairement de l'algèbre des fonctions symétriques, les recherches difficiles sur les géométries non arguésiennes ou les plans d'expérience, la "Kombinatorische Topologie" de Reidemeister et la belle "Combinatorial theory of free groups" de R. Lyndon, les problèmes extrémaux sur les graphes de l'école hongroise ou les mille questions d'énumération que suscite la théorie (et assez souvent la pratique) des systèmes discrets depuis les travaux de Polya sur le décompte des isomères.

J'évite en général ce terme et je l'utilise ici faute de mieux pour désigner des travaux portant sur des structures mineures ou encore mal connues au moyen de techniques qui, en première intention, ne relèvent pas des grandes méthodes de l'algèbre ou de l'analyse. Peut être est-ce aussi le sens que lui donnent les autres auteurs et je prie qu'on veuille bien y voir signe de modestie et point souci de mode.

En collaboration avec D. Foata nous entreprîmes l'étude systématique des polynomes eulériens de Frobenius et des nombreuses formules qui s'y rattachent [101]. Le but, qui fut atteint, était de démontrer que tous ces énoncés peuvent être établis sans recourir à l'analyse complexe par un petit nombre de constructions portant sur les permutations, considérées ici comme des mots dans lesquels chaque lettre n'apparaît qu'une fois. Comme nous l'expérions ceci permit de dégager quelques principes généraux.

L'un d'eux est la considération des séries formelles (non commutatives) dans lesquelles les coefficients sont des entiers divisés par un facteur $n!$. Dans le cas d'une seule variable ce sont les séries de Hurwitz de l'analyse classique et les fonctions génératrices de ce type (dites "exponentielles") interviennent couramment dans les problèmes d'énumération. Le passage au non-commutatif nous permit d'expliquer l'apparition des dénominateurs $n!$ par le fait que le produit sous jacent est le produit de shuffle. Ces méthodes ont été puissamment développées par Foata. Elles sont à la source de la théorie fort générale et abstraite des "espèces de structures" de Joyal dont C. Reutenauer vient de montrer l'usage dans la représentation du groupe linéaire sur l'algèbre de Lie libre filtrée par sa suite dérivée.

Le prolongement direct de notre travail était d'appliquer des techniques analogues pour rendre compte de ce que nombre de séries classiques sont des séries de Hurwitz à coefficients positifs. Le cas le plus surprenant est celui des fonctions elliptiques sn, cn, dn de Jacobi. Il a été traité par Viennot et de façon très approfondie par D. Dumont. Plus généralement D. Foata et ses élèves ont montré l'efficacité de ces méthodes dans l'étude des séries hypergéométriques, des polynômes orthogonaux et surtout de leur q-généralisation où l'introduction d'objets combinatoires permet de s'orienter dans la multitude des identités. Dans une direction différente, la même idée de représenter par des mots et des séries les objets et les familles d'objets a permis à Flageolet de développer des techniques très utiles pour évaluer l'efficacité des algorithmes informatiques.

Tableaux de Young et monoïde plaxique

Ces objets, comme on le sait, ont été introduits au début du siècle pour étudier les représentations linéaires des groupes symétriques. Ils sont aussi connus sous le nom de "Gelfand Pattern" ou "symboles de Yamanouchi" chez les physiciens qui en font grand usage depuis Hermann Weyl. J'aurais besoin d'une définition un peu différente. Etant donné un alphabet totalement ordonné, $A = \{a_i : i=1,2,\dots,n\}$ où $A = \{a < b < \dots\}$, un tableau de *forme* K est un remplissage du diagramme de Ferrers de la partition K par les lettres de A tel que les lettres aillent en croissant au sens large dans chaque ligne et au sens strict dans chaque colonne. Par exemple

$$\begin{array}{l} dd \\ bbcd \\ aaabc \end{array}$$

est un tableau de forme 245.

On l'identifie au mot t = ddbbcdaaabc obtenu en lisant le diagramme de la façon habituelle. *L'évaluation* de t est le monome (ici $a^3b^3c^2d^3$) qui en est l'image commutative et on dit que t est *standard* si chaque lettre n'y apparaît qu'une fois.

En 1965, C. Schensted inspiré par des problèmes informatiques de tri découvrit un algorithme remarquable associant de façon bijective à toute permutation w une paire de tableaux standards (wR, wR') de même forme. Cet article devenu depuis un classique de la combinatoire ne fut guère remarqué à l'époque. Dans [77], [105] j'établir plusieurs propriétés supplémentaires de la construction de Schensted : l'inversion w ---> w^{-1} correspond à l'échange des deux tableaux ; le retournement w ---> ωw (par exemple w = 31425 ---> ωw = 52413) a pour effet de remplacer wR par le tableau transposé et wR' par un tableau qui ne dépend que de wR'. D'autres propriétés expriment ce que A. Lascoux m'apprit plus tard être la formule de Pieri et permettent d'étendre les constructions à tous les mots.

Il existe en effet un autre usage des tableaux car D.E. Littlewood a montré que la fonction de Schur d'indice K est la somme (dans l'anneau des polynomes Z(A)) des évaluations de tous les tableaux de forme K. C'est à partir de cette théorie que Alain Lascoux était venu de son côté à l'étude des tableaux et nous unîmes nos forces pour une longue collaboration. Qu'il soit dit ici une fois pour toutes que nombre des articles qu'il a publiés devraient comporter des remerciements au zèle du programmeur enthousiaste qui a fourni des tables et parfois des contre exemples plutôt que ma signature à côté de la sienne. Il y a des intuitions et des techniques qui requièrent bien plus que je ne peux apporter et notamment la connaissance de la géométrie algébrique.

D'autres mathématiciens commencèrent à s'intéresser à ce problème. En particulier, D. Knuth trouva des conditions simples assurant que deux mots correspondent au même tableau et Curtis Greeene, prolongeant l'idée initiale de Schensted, caractérisa la forme de wR en fonction de sous mots remarquables de w. Dans [130], je rassemblais ces résultats et quelques autres en employant une technique qui ajoute de la souplesse à ces calculs. Elle s'est répandue sous le nom de "jeu de taquin". Ce travail contient la première preuve rigoureuse de la règle de Littlewood-Richardson donnant les coefficients de structure de l'algèbre des fonctions de Schur et servant depuis cinquante ans à en établir les tables. On y voit apparaître aussi le monoïde plaxique dont A.Lascoux et moi avions eu l'idée un peu auparavant. Il admet trois définitions équivalentes : c'est le quotient du monoïde libre A* dont les tableaux constituent une section ; c'est le monoïde syntaxique de l'application de A* dans l'ensemble des partitions envoyant chaque mot w sur la forme du tableau wR ; enfin et surtout, c'est un quotient de A* extrémal par rapport à la propriété que son algèbre contienne une sous-algèbre isomorphe de façon naturelle à l'algèbre usuelle des polynômes symétriques.

J'avais quelques réticences devant ce monoïde qui, de façon quasiment paradigmatique, n'est pas compactifiable car dès le cas de deux lettres, c'est le monoïde syntaxique de l'automate à pile numérique, ou si l'on préfère, de la série y définie par l'équation y = ayy + b déjà rencontrée dans la section 3. Il s'est cependant révélé très fructueux.

En effet, la décomposition en classes plaxiques du groupe symétrique est sous-jacente à la théorie de Kazhdan et Lusztig pour ce groupe. En utilisant nos techniques qui fournissent des résultats parfaitement explicites, nous avons résolu dans le cas particulier des grassmanniennes plusieurs des questions laissées ouvertes par ces auteurs [140].

D'autre part, les mêmes méthodes nous ont permis de donner une réponse positive [133] à une conjecture de Foulkes concernant les polynômes qui sont la q-généralisation des nombres de Kostka et grâce auxquels Green a donné l'expression des caractères du groupe linéaire en caractéristique q.

Dans un semi-groupe S, la relation de conjugaison est la plus petite équivalence telle que ss' et s's appartiennent à la même classe. Le monoïde plaxique a la propriété remarquable que deux éléments ont la même image commutative si et seulement si ils sont conjugués et si l'on peut y orienter la relation de conjugaison de telle sorte que ses classes deviennent des ensembles ordonnés munis d'une hauteur, la cocharge. Les polynômes de Foulkes-Green sont les fonctions génératrices de la cocharge sur les classes de conjugaison. Dans le cas particulier des permutations, la cocharge n'est rien d'autre que l'index majeur de Mac Mahon de leur inverse et un théorème assez mystérieux de D.Foata la rattache au nombre des inversions.

Dans [137], nous avons étudié une représentation du groupe symétrique sur le monoïde libre A* (par action sur les lettres) qui est compatible avec la congruence plaxique et la relation de conjugaison. Elle fournit des inégalités sur les polynômes de Foulkes-Greene et surtout une nouvelle interprétation des fonctions de Hall-Littlewood (qui sont la q-généralisation des fonctions de Schur), éclairant les calculs passablement compliqués dont elles sont l'objet : ce dernier travail est en cours de publication.

Enfin, une légère variante du monoïde plaxique, le monoïde nilplaxique, donne une structure à l'ensemble des décompositions réduites des éléments du groupe symétrique ; un corollaire immédiat est la preuve de la conjecture de R.Stanley affirmant que le nombre de décompositions réduites d'un élément est (de façon non triviale) une somme de dimensions de représentations irréductibles [142].

Polynômes de Schubert et opérateurs de symétrisation

Afin d'étendre nos recherches dans la théorie de Kazhdan et Lusztig, nous avions besoin d'autres objets que les fonctions de Schur, ce qui amena A.Lascoux à définir une famille nouvelle de polynômes qu'il appelat "de Schubert". Ceux-ci forment une base de l'anneau Z[A] des polynômes en tant que module libre sur l'anneau des polynômes symétriques. On les obtient à partir d'un monôme extrémal au moyen des opérateurs de différences divisées (cf [144]).

Un élève de A.Lascoux, P.Pragacz, est parvenu récemment à en donner une définition fonctorielle et, en faisant jouer à la fois les monoïdes plaxiques et nilplaxiques, nous avons trouvé leur généralisation non commutative [150]. Motivé par des considérations géométriques, A.Lascoux a étendu cette étude à la description complète de l'anneau de Grothendieck des variétés de drapeaux.

Ces calculs font intervenir les opérateurs de symétrisation δ_j et $\pi_j = a_j \delta_j$ déjà rencontrés par d'autres auteurs (Bernstein, Gelfand et Gelfand et, indépendamment, M.Demazure). Soit plus généralement D l'opérateur : f ---> f^σ r + fr', où r et r' sont des fonctions rationnelles. Dans [151] nous avons résolu l'équation de Coxeter $D_j D_{j+1} D_j = D_{j+1} D_j D_{j+1}$ et montré qu'elle entraine que tous les D satisfassent la même équation de Hecke $DD = Dr + r'$. En modifiant un peu les hypothèses, on retrouve comme cas particulier la "Bethe Ansatz" des physiciens. Si l'on impose la condition supplémentaire que les D_j préservent l'anneau des polynômes, la solution générale est une famille à cinq paramètres contenant les opérateurs σ_j, δ_j, $\pi_j \pi_{j-1}$ et $a_j a_{j+1} \delta_j$; si on veut que de plus les D n'augmentent pas les degrés, la solution se réduit à deux familles à trois paramètres.

L'application des formules obtenues aux polynômes de Schubert non commutatifs donne la possibilité de traiter de façon unifiée diverses théories, en particulier celle des caractères de Demazure et celle des bases de Seshadri. Nous avons d'autres manuscrits en cours. Ars Longua...

LISTE DE PUBLICATIONS DE M.P. SCHÜTZENBERGER

[1] Sur la théorie des structures de Dedekind, *C.R. Acad. Sci. Paris 216* (1943), 717-718 (MR 5, 226).

[2] Sur les structures de Dedekind, *C.R. Acad. Sci. Paris 218* (1944), 818-819 (MR 7, 409).

[3] Sur certains axiomes de la théorie des structures, *C. R. Acad. Sci. Paris 221* (1945), 218-220 (MR 7, 235).

[4] Remarques sur la notion de clivage dans les structures algébriques et son application aux treillis, *C.R. Acad. Sci. 224* (1947), 512-514, (MR 8, 366).

[5] Remarques sur les relations d'ordre entre variables aléatoires indépendantes, *C.R. Acad. Sci. Paris 224* (1947), 878-880, (Mr 8, 472)

[6] Sur certains paramètres caractéristiques des systèmes d'évènements compatibles et dépendants et leur application au calcul des cumulants de la répétition, *C.R. Acad. Sci. Paris 225* (1947), 277-278 (MR 9, 96)

[7] Axiomatisation de la géométrie dans un complexe linéaire de droites, *Revue Sci. 85* (1947), 782-784 (MR 9, 369)

[8] Gavaudan P., Poussel H., Schützenberger M.P., L'excitation des chimio-récepteurs de la langue par les substances du groupe des narcotiques indifférents et la règle thermodynamique de la narcose, *Compt. Rend. Acad. Sc. 224,* 1525-1527, (1947)

[9] Gavaudan P., Poussel H., Brebion G. and Schützenberger M.P., L'étude des conditions thermodynamiques de l'excitation olfactive et les théories de l'olfaction. *Compt. rend. Acad. Sc. 226,* 1395-1396, (1948)

[10] Etude statistique d'un problème de sociométrie, *Gallica Biologica Acta 1* (1948), 9 pp. (MR 9, 602)

[11] Valeurs caractéristiques du coefficient de corrélation par rang de

Kendall dans le cas général, *C.R. Acad. Sci. Paris 226* (1948), 2122-2123 (MR 10, 134)

[12] Sur certaines applications remarquables des treillis dans eux-mêmes, *C.R. Acad. Sci. Paris 227* (1948), 1008-1010 (MR 10, 279)

[13] Gavaudan P., Poussel H., Schützenberger M.P., Le mécanisme physico-chimique de l'excitation sapide et la notion d'excitant indifférent, *Compt. rend. Acad. Sc. 226,* 751-752, (1948)

[14] Cybernétique, Mathématique et Psychologie, l'évolution psychiatrique, p. 585-607, (1949)

[15] Turpin R., Schützenberger M.P., L'étude des dermatoglyphes, *Semaine des Hôpitaux de Paris, 25,* 2558-2562, (1949)

[16] Sur l'extension des théorèmes de dualité aux treillis distributifs non complémentés, *C.R. Acad. Sci. Paris 228* (1949), 33-35 (MR 10, 279)

[17] A non-existence theorem for an infinite family of symmetrical block designs, *Ann. Eugenics 14* (1949), 286-287 (MR 11, 3)

[18] Turpin R. and Schützenberger M.P., Sur la détermination du sexe chez l'homme, *Semaine des Hôpitaux de Paris, 25,* 2550-2563, (1949)

[19] Tisserand M., Schützenberger M.P., Remarque sur la statistique des becs-de-lièvre, *Semaine des Hôp. de Paris , 25,* 2545-2548, (1949)

[20] Turpin R. and Schützenberger M.P., Sur la masculinité à la naissance dans les grossesses multiples, *Compt. rendu Sc. 231,* 1098-1099, (1950)

[21] Duchene H. and Schützenberger M.P., Considérations sur l'accroissement de la population des hôpitaux psychiatriques *Semaine des Hôpitaux de Paris 26,* 106-108, (1950)

[22] Gavaudan P., Schützenberger M.P., Le problème de la spécificité chimique dans les différences génétiques de la sensibilité gustative *Compt. rend. Acad. Sc., 230,* 1622-1624, (1950)

[23] (avec G. Darmois) Etude statistique de diverses expériences radiesthésiques, *Editions Rationalistes* (1951)

[24] Lefebvre J., Schützenberger M.P., Lerique J., Analyse statistique

du tracé electroencéphalographique dans la tétanie, *Compt. rendu Acad. Sc. 232,* 552-553, (1951)

[25] Sur les rapports entre la quantité d'information au sens de Fisher et au sens de Wiener, *C.R. Acad. Sci. Paris 232* (1951), 925-927 (MR 12, 623)

[26] Une généralisation de la notion de valuation pour les treillis quelconques et son application aux distributions de la statistique quantique, *C.R. Acad. Sci. Paris 232* (1951), 1805-1807 (MR 13, 51)

[27] An extension problem in the theory of incomplete block designs, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 13* (1951), 120-125 (MR 13, 669)

[28] (avec M. Lamotte) Sur certains problèmes d'estimation dans le cas de double échantillonnage, *Biometrics 7* (1951), 275-282 (MR 13, 571)

[29] (avec J. Ville) - Les problèmes de diagnostic séquentiel, *C.R. Acad. Sci. Paris 232* (1951), 206-207 (MR 12, 515)

[30] (avec H. Duchêne) Etude statistique du test Szondi, *Evolution Psych.,* (1952), p. 178-223

[31] Turpin R., Schützenberger M.P., Sexe et gémélite, *Semaine des Hôpitaux de Paris, 28,* 1844-1848, (1952)

[32] Duchene H., Schützenberger M.P., Sutter J., De l'influence sur les caractères physio-pathologiques de l'enfant de son rang de naissance et de l'âge de ses progéniteurs, *Semaine des Hôpitaux de Paris, 28,* 747-749, (1952)

[33] Construction du treillis modulaire engendré par deux éléments et une chaîne finie discrète, *C.R. Acad. Sci. Paris 235* (1952), 926-928 (MR 14, 612)

[34] Chabbert Y., Terrial G., Schützenberger M.P., Evolution de la sensibilité aux antibiotiques des germes isolés chez les malades de la ville de 1949-1958, *Ann. Inst. Pasteur 84,* 952-955, (1953)

[35] Remarques sur un problème de codage binaire, *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, (*1953), Vol. 2, 125-128

[36] Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle $F(x+y) = F(x)F(y)$, *C.R. Acad. Sci. Paris 236* (1953), 352-353

(MR 14, 768)

[37] Sur l'extension d'un groupe de permutations d'un ensemble fini à l'ensemble des parties de celui-ci, *C.R. Acad. Sci. Paris 236* (1953), 449-450 (MR 14, 1058)

[38] Sur une définition combinatoire des espaces vectoriels classiques, *C.R. Acad. Sci. Paris 238* (1954), 2487-2488 (MR 15, 927)

[39] A tentative classification of goal seeking behaviours, *J. Mental Sci. 100* (1954), 97-102 (MR 17, 985)

[40] Contribution aux applications statistiques de la théorie de l'information, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 3* (1954), 3-117 (MR 17, 1099)

[41] Un treillis universel des géométries projectives, *C.R. Acad. des Sc., 239,* (1954) pp. 1754-1756

[42] Théorie combinatoire des relations bilinéaires classiques, *Bull. Sci. Math. 79* (1955), 12-32 (MR 16, 990)

[43] Théorie combinatoire des relations bilinéaires classiques II, *Bull. Sci. Math. 79* (1955), 111-128 (MR 17, 704)

[44] Sur les problèmes de communications métriques, *C.R. Acad. Sci. Paris 240* (1955), 724-726 (MR 17, 637)

[45] Une théorie algébrique du codage, *Séminaire Dubreil-Pisot année 55-56,* exp. n° 15, Inst. Henri Poincaré, Paris *C.R. Acad. Sci. Paris 242* (1956), 862-864 (MR 17, 702)

[46] On the application of semigroups methods to some problems in coding IRE Trans. Inf. Theory IT-2 (1956) pp. 47-60

[47] On some measures of information, *Third London Symposium on Information Theory,* London, (1956), pp. 18-25

[48] (avec C. Berge) Jeux de Nim et solutions, *C.R. Acad. Sci. Paris 242* (1956), 1672-1674 (MR 19, 621)

[49] Sur une représentation des demi-groupes, *C.R. Acad. Sci. Paris 242* (1956), 2907-2908 (MR 18, 13)

[50] Sur deux représentations des demi-groupes finis, *C.R. Acad. Sci. 243* (1956), 1385-1387 (MR 18, 282)

[51] $\overline{\mathrm{D}}$-représentation des demi-groupes, *C.R. Acad. Sci. Paris 244* (1957), 1994-1996 (MR 19, 249)

[52] Applications des $\overline{\mathrm{D}}$-représentations à l'étude des homomorphismes des demi-groupes, *C.R. Acad. Sci. Paris 244* (1957), 2219-2221 (MR 19, 249)

[53] Sur une propriété combinatoire des demi-groupes, *C.R. Acad. Sci. Paris 245* (1957), 16-18 (MR 19, 528)

[54] A propos de l'inégalité de Fréchet-Cramer, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* (1958), 3-6 (MR 21 # 4498)

[55] Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de mathématiques appliquées, *Séminaire Dubreil-Pisot année 58-59,* Inst. Henri Poincaré, Paris, (1958)

[56] Sur la représentation monomiale des demi-groupes, *C.R. Acad. Sci. Paris 246* (1958), 865-867 (MR 20 # 2384)

[57] Sur les homomorphismes d'un demi-groupe sur un groupe, *C.R. Acad. Sci. Paris 246* (1958), 2442-2444 (MR 20 #1720)

[58] On the quantization of finite dimensional messages, *Information and Control 1* (1958), 153-158 (MR 19, 1245)

[59] A characterisation of certain polynomials of E.F. Moore & C. Shannon, *Quarterly Progress Reports of the Research Lab. of Electronics,* MIT, (1959), p. 117-118

[60] Sur l'équation $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre, *C.R. Acad. Sci. Paris 248* (1959), 2435-2436 (MR 21 # 2000)

[61] Sur certains sous-demi-groupes qui interviennent dans un problème de mathématiques appliquées, *Publ. Sci. Univ. Alger Sér. A 6* (1959), 85-90 (MR 23 # 2476)

[62] Full decodable code-word sets, *IRE Trans. IT 5* (1959), 12-15 (MR 23 # B 3078)

[63] Un problème de la théorie des automates, *Séminaire Dubreil-Pisot,*

année 59-60, Inst. Henri Poincaré, Paris, (1960)

[64] Some Remarks on Chomsky context free languages, *Quaterly Progress Report RLE. MIT.* (1961), 68, pp. 155-170

[65] On a special class of recurrent events, *Ann. Math. Statist. 32* (1961), 1201-1213 (MR 24 # A 3718)

[66] A remark on finite transducers, *Information and Control 4* (1961), 185-196 (MR 26 # 1235)

[67] On the definition of a family of automata, *Information and Control 4* (1961), 245-270 (MR 24 # B 1725)

[68] On a family of submonoids (Russian summary), *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kölz. 6* (1961), 381-391 (MR 26 # 3805)

[69] Finite counting automata, *Information and Control 5* (1962), 91-107 (MR 27 # 4720)

[70] On a theorem of R. Jungen, *Proc. Amer. Math. Soc. 13* (1962), 885-890 (MR 26 # 350)

[71] (avec M. Eden) Remark on a theorem of Dénes (Russian summary), *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kölz. 7* (1962), 353-355 (MR 30 # 1065)

[72] (avec R.C. Lyndon) The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group, *Michigan Math. J. 9* (1962), 289-298 (MR 29 # 142)

[73] On probabilistic push-down storages, in *Self-Organizing Systems, Proceedings,* Spartan Books, Washington, (1962), 205-213

[74] (avec S. Sherman) On a formal product over the conjugate classes in a free group, *J. Math. Anal. Appl. 7* (1963), 482-488 (MR 28 # 1230)

[75] Certain elementary families of automata, in *Proc. Sympos. Math. Theory of Automata,* Polytechnic Press of Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn, N.Y., (1963) (MR 29 # 5696)

[76] On context-free languages and push-down automata, *Information and Control 6* (1963), 246-264 (MR 29 # 1109)

année 59-60, Inst. Henri Poincaré, Paris, (1960)

[64] Some Remarks on Chomsky context free languages, *Quaterly Progress Report RLE. MIT.* (1961), 68, pp. 155-170

[65] On a special class of recurrent events, *Ann. Math. Statist. 32* (1961), 1201-1213 (MR 24 # A 3718)

[66] A remark on finite transducers, *Information and Control 4* (1961), 185-196 (MR 26 # 1235)

[67] On the definition of a family of automata, *Information and Control 4* (1961), 245-270 (MR 24 # B 1725)

[68] On a family of submonoids (Russian summary), *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kölz. 6* (1961), 381-391 (MR 26 # 3805)

[69] Finite counting automata, *Information and Control 5* (1962), 91-107 (MR 27 # 4720)

[70] On a theorem of R. Jungen, *Proc. Amer. Math. Soc. 13* (1962), 885-890 (MR 26 # 350)

[71] (avec M. Eden) Remark on a theorem of Dénes (Russian summary), *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kölz. 7* (1962), 353-355 (MR 30 # 1065)

[72] (avec R.C. Lyndon) The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group, *Michigan Math. J. 9* (1962), 289-298 (MR 29 # 142)

[73] On probabilistic push-down storages, in *Self-Organizing Systems, Proceedings,* Spartan Books, Washington, (1962), 205-213

[74] (avec S. Sherman) On a formal product over the conjugate classes in a free group, *J. Math. Anal. Appl. 7* (1963), 482-488 (MR 28 # 1230)

[75] Certain elementary families of automata, in *Proc. Sympos. Math. Theory of Automata,* Polytechnic Press of Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn, N.Y., (1963) (MR 29 # 5696)

[76] On context-free languages and push-down automata, *Information and Control 6* (1963), 246-264 (MR 29 # 1109)

[77] Quelques remarques sur une construction de Schensted, *Math. Scand. 12* (1963), 117-128 (MR 32 # 7433)

[78] (avec N. Chomsky) The algebraic theory of context-free languages, in P. Brafford e D. Hirschberg (eds.), *Computer Programming and Formal Systems,* North Holland, Amsterdam, (1963), 118-161

[79] On the synchronizing properties of certain prefix codes, *Information and Control 7* (1964), 23-36 (MR 33 # 7199)

[80] (avec J. Larisse) Sur certaines chaînes de Markov non homogènes, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 13* (1964), 57-66 (MR 31 # 198)

[81] Sur certains sous-monoïdes libres, *Bull. Soc. Math. France 93* (1965), 209-233 (MR 32 # 7666)

[82] Sur une question concernant certains sous-monoïdes libres, *C.R. Acad. Sci. Paris 261* (1965), 2419-2420 (MR 32 # 7364)

[83] On finite monoids having only trivial subgroups, *Information and Control 8* (1965), 190-194 (MR 31 # 1154)

[84] A remark on incompletely specified automata, *Information and Control 8* (1965), 373-376 (MR 32 # 3970)

[85] On a factorisation of free monoids, *Proc. Amer. Math. Soc. 16* (1965), 21-24 (MR 30 # 1205)

[86] (avec J. Larisse) Sur certaines chaînes de Markov non homogènes, in *Automata Theory,* Academic Press, New York, (1966), 239-250 (MR 36 # 7209)

[87] Sur certaines variétés de monoïdes finis, in *Automata Theory,* Academic Press, New York, (1966), 314-319 (MR 34 # 5592)

[88] On a family sets related to McNaughton's L-language, in *Automata Theory,* Academic Press, New York, (1966), 320-324 (MR 36 # 2448)

[89] (avec M. Coudrain) Une condition de finitude des monoïdes finiment engendrés, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 262* (1966), A1149-A1151 (MR 33 # 2742)

[90] (avec M. Nivat) Sur les produits semi-directs droits de monoïdes, *C.R. Acad. Sci. paris Ser. A-B 263* (1966), A659-A660 (MR 34 # 4395), errata em *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 264* (1967), A383 (MR 35 # 2983)

[91] (avec F. Dejean) On a question of Eggan, *Information and Control 9* (1966), 23-25 (MR 32 # 9164)

[92] On a question concerning certain free submonoids, *J. Combinatorial Theory 1* (1966), 437-442 (MR 36 # 1234)

[93] Algorithms and the neo-darwinian theory of evolution, Wistar Institute Symposium, *Mathematical Challenge to the Neodarwinian theory of evolution,* (1967), pp. 73-80

[94] On products of finite dimensional stochastic matrices, *Proc. Amer. Math. Soc. 18* (1967), 850-853 (MR 36 # 6439)

[95] A remark on acceptable sets of numbers, *J. Assoc. Comput. Mach. 15* (1968), 300-303 (MR 38 # 6910)

[96] On an enumeration problem, *J. Combinatorial Theory 4* (1968) 219-221 (MR 36 # 1344)

[97] Sur certains semi-groupes de matrices non negatives, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 9* (1968), 265-269 (MR 37 # 2788)

[98] Besson J., Gavaudan P., Schützenberger M.P., Sur l'existence d'une certaine corrélation entre le poids moléculaire des acides aminés et le nombre de triplets intervenant dans leurs codages, *Compt. rend. Acad. Sc., 268,* (1969), 1342-1344

[99] (avec A. Lentin) A combinatorial problem in the theory of free monoids, *Combinatorial Mathematics and its Applications,* Univ. North Carolina Press, Chapel Hill, N.C., 1969, 128-144 (MR 40 # 4389)

[100] (avec S. Eilenberg) Rational sets in commutative monoids, *J. Algebra 13* (1969), 173-191 (MR 40 # 254)

[101] (avec D. Foata) *Théorie Géométrique des polynômes eulériens,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 138, Springer-Verlag, Berlin, (1970) (MR 42 # 7523)

[102] Une application de la théorie de la décomposition des monoïdes, in *Séminaire M.P. Schützenberger, A. Lentin et M. Nivat 1969/70 : Problèmes Mathématiques de la Théorie des Automates,* Secrétariat Mathématique, Paris, (1970) (MR 43 # 7532)

[103] (avec D. Foata) On the rook polynomial of Ferrers relations, in *Combinatorial Theory and its Applications II,* North Holland, Amsterdam, 1970, 413-436 (MR 50 # 12738)

[104] (avec D. Foata) On the principle of equivalence of Sparre Anderson *Math. Scand. 28* (1971), A420-A421 (MR 46 # 7410)

[105] Sur un théorème de G. de B. Robinson, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 272* (1971), A420-A421 (MR 45 # 3595)

[106] Sur les bases de Hall des algèbres de Lie libres, *manuscrito,* (1971)

[107] Parties rationnelles d'un monoïde libre, *Actes Congrès. Inter. Math. Nice 1970, Vol. 3,* Gauthiers-Villars, Paris, (1971), 281-282

[108] Promotion des morphismes d'ensembles ordonnés, *Discrete Math. 2* (1972), 73-94 (MR 45 # 8587)

[109] (avec D. Foata) Nombres d'Euler et permutations alternantes, in *A survey of Combinatorial Theory,* North Holland, Amsterdam, (1973), 173-187 (MR 50 # 6870)

[110] A propos des relations rationnelles fonctionnelles, in *Automata Languages and Programming,* North Holland, Amsterdam, (1973), 103-114 (MR 52 # 7205)

[111] Sur une construction de Gilbert de B. Robinson, in *Séminaire P. Dubreil (25è année : 1971/72), Algèbre, Fasc. 1, Exp. N° 8,* Secrétariat Mathématique, Paris, (1973) (MR 52 # 13416)

[112] Sur un langage équivalent au langage de Dyck, in *Logic, Methodology and Philosophy of Sciences IV,* North Holland, Amsterdam, (1973), 197-203

[113] Une propriété des monoïdes libres, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 278* (1974), 833-834 (MR 49 # 10801)

[114] Sur les monoïdes finis dont les groupes sont commutatifs, *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge 8* (1974), 55-61 (MR 50 # 2382)

[115] Sur certaines pseudo-variétés de monoïdes finis, in *Comptes Rendus des Journées Mathématiques, de la Société Mathématique de France,* Cahiers Math. Montpellier, N° 3, U.E.R. de Math. Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, (1974), 317-327 (MR 51 # 10514)

[116] Sur une propriété syntactique des relations rationnelles, in *Automata Languages and Programming,* Lecture Notes in Computer Science, Vol. 14, Springer-Verlag, Berlin, (1974), 612-619.

[117] Sur les relations rationnelles, em *Automata Theory and Formal Languages 2nd GI Conference,* Lecture Notes in Computer Science, vol. 33, Springer Verlag, Berlin, (1975), 209-213 (MR 52 # 16917)

[118] Sur des théorèmes de I. Simon, *manuscrit,* (1975)

[119] Sur certaines opérations de fermeture dans les langages rationnels, *Symposia Matematica, Vol. XV,* Academic Press, London, (1975), 245-253 (MR 54 # 9182)

[120] Evacuations, Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatories, Academia Nazionale dei Lincei, *Atti dei Convegni Lincei, 17,* (1976), pp. 257-64

[121] (avec S. Eilenberg) On pseudovarieties, *Advances in Math. 19* (1976), 413-418 (MR 53 # 5431)

[122] Sur le produit de concaténation non ambigu, *Semigroup Forum 13* (1976), 47-75

[123] Sur une caractérisation des fonctions séquentielles, *Rapport de Recherche 176,* INRIA, Paris, (1976)

[124] Sur les relations rationnelles entre monoïdes libres, *Theor. Comput. Sci. 3* (1976), 243-259

[125] Une caractérisation des parties reconnaissables, in *Formal Languages and Programming,* North-Holland, Amsterdam, (1976), 77-82

[126] A property of finitely generated submonoids, *in Algebraic Theory of semigroups (G. Pollack ed.) North Holland* (1976) 545-576

[127] (avec D. Perrin) Codes et sous-monoïdes possédant des mots neutres,

Rapport de Recherche 214, INRIA, Paris, (1977)

[128] Une propriété de Hankel des relations fonctionnelles entre monoïdes libres, *Advances in Math. 24* (1977), 274-280

[129] Sur une variante des fonctions séquentielles, *Theor. Comput. Sci. 4* (1977), 45-57

[130] La correspondance de Robinson, in *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 579, Springer Verlag, Berlin, (1977), 59-113

[131] (avec D. Perrin) Un problème élémentaire de la théorie de l'information, *Rapport de Recherche 78-1,* L.I.T.P, Paris, (1978).

[132] (avec D. Foata) Major index and inversion number of permutations, *Math, Nachr., 83* (1978) 143-159

[133] (avec A. Lascoux) Sur une conjecture de H.O. Foulkes, *C.R. Acad. Sci. Paris 286* (1978) 323

[134] Sur certains sous-groupes d'un groupe libre, *Atti del Convegno del Istituto di Analisi Globale del CNR,* Firenze, (1979), pp. 1-29

[135] (avec A. Lascoux) Croissance des polynômes de Foulkes-Green, *C.R. Acad. Sci. Paris 288* (1979) 95

[136] A propos du livre "On system Analysis" de D. Berlinski, *Rapport LITP 79-20* (1979)

[137] (avec A. Lascoux) Le Monoïde Plaxique, in "*Non Commutative structures " Napoli 1978 ,Quaderni della Ricerca Sc. 109 Roma* (1981) 129-156

[138] (avec A. Lascoux) A new statistics on words *Annals of Discr. Maths 6* (1980) 251-255

[139] Sur les sous-groupes de rang fini d'un groupe libre, *C.R. Acad. Sci. 290* (1980) 207

[140] (avec A. Lascoux) Polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les grassmanniennes, *Astérique n° 87-88* (1981) 249-266

[141] (avec D. Perrin) A conjecture on sets of differences of integer pairs, *J. Comb. Th. B 30* (1981) 91-93

[142] (avec A. Lascoux) Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux, *C.R. Acad. Sci. Paris 295* (1982) 629

[143] La théorie de l'information, *Rapport LITP 82-17* (1982)

[144] Schubert polynomials and the Littlewood-Richardson Rule, *Letters in Math. Physics 10* (1985) 111-124

[145] (avec A. Lascoux) Interpolation de Newton à plusieurs variables, in *Springer L.N. 1220* (1986)

[146] (avec C. Choffrut) Décomposition de fonctions rationnelles, *in* STACS 86, *Lect. N. in Comp. Sci. 210* (1985) 213-226

[147] (avec A. Lascoux) Formulaire raisonné de fonctions symétriques, *Publ. Univ. Paris 7* (1985)

[148] (avec C. Choffrut) Counting with rational functions, *in Automata Languages and Programming, Lect. N. in Comp. Sc. 226, Springer* (1986) 79-88

[149] (avec C. Reutenauer) A formula for the determinant of a sun of matrices *Letters in Math. Physics* (1987)

[150] (avec A. Lascoux) Fonctionialité des polynômes de Schubert *Contemporary Maths* - à paraître

[151] (avec A. Lascoux) Symmetrization operators on polynomial rings (à paraître dans *Funct. Anal.* (en russe))

Marcel Paul Schützenberger
Né le 24 Octobre 1920 à Paris

<u>Etats de service militaires</u> Agent P1 du réseau Arc en Ciel (sous-réseau Turma-Vengeance) des Forces Françaises Combattantes 1.9.43 à 15.5.1944.

<u>Diplômes obtenus</u>

Docteur en Médecine (Paris 1948)
Docteur ès Sciences Mathématiques (Paris 1953)

<u>Titres et fonctions occupées en France</u>

Chargé de recherches à l'Institut National d'Hygiène 1948-1953
Maître de recherches au CNRS 1953-1957
Maître de Conférences, puis Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers 1957-1963
Directeur de Recherches au CNRS 1963-1964
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris 1964-
Directeur Scientifique à l'Institut de Recherches en Informatique et Automatique 1968-1972
Membre correspondant de l'Académie des Sciences (Sc. Mécanique) 1979

<u>Fonctions occupées à l'étranger</u>

Professeur en visite MIT 1956-57
Etés 1959, 1961, 1970
U. of North Carolina 1960-1961
Harvard University 1961-1962
U. of Pennsylvania Printemps 1963
U. of California at Berkeley Printemps 1967
Université de Naples 1972-1973

Consultant IBM Research Center été 1962
Rand Corporation été 1966

Consultant	IBM Research Center été 1962 Rand Corporation été 1966 Direction scientifique de l'Organisation Mondiale de la Santé 1969-1980 University of Southern California Janvier 1988