 par Marco Schützenberger

Une sotie sur les nombres parfaits

Marco Schützenberger exprimait ici ses impressions sur les recherches arithmétiques. Cet article d'un géant de l'esprit est à lire entre les lignes...

Certes les mœurs sont devenues plus douces, mais s'il ose parler au milieu des poètes, un informaticien n'en redoute pas moins de se voir pelé et sa défroque suspendue aux branches. Sa seule ambition ne peut donc être que de divertir à l'abri d'un texte classique.

« Deux tours énormes s'apercevaient dans la vallée. En les multipliant par deux, le produit était quatre. Mais je ne saisissais pas très bien la nécessité de cette opération d'arithmétique, et je continuais ma route avec la fièvre au visage et je m'écriais sans cesse : "Non, non, je ne distingue pas très bien la nécessité de cette opération d'arithmétique". » Je confesse que moi non plus ou du moins pas encore, pas ici. »

C'était bien sûr un extrait d'un chant de Maldoror, et les méthodes de la critique moderne prouveront qu'indubitablement il s'agit du quatrième (où $4 = 2 \times 2 = 2^2$).

Veuillez avoir l'indulgence d'admettre que le calculateur, c'est-à-dire celui qui aligne des calculs comme d'autres des pensées ou des vers n'est ni un faune, ni un satyre, ni un sciapode, ni Fafner, tapi au fond de ses ateliers. Qu'il est doué d'une espèce de parole, bien qu'elle diffère de celle des poètes par le mode et le temps et surtout par la contrainte de pouvoir supporter à l'infini paraphrases et retraductions.

C'est bien peu, trop unidimensionnel, décident les communicateurs, mais c'est la loi de notre cité telle que nous la tenons d'Euclide.

L'histoire que je vous soumets remonte d'ailleurs à lui.

Six est un nombre parfait parce que $6 = 3 + 2 + 1$ est égal à la somme de ses diviseurs. Huit ne l'est pas parce que la somme correspondante, $4 + 2 + 1 = 7$ et que huit n'est pas sept.

Gravure d'un sciapode se protégeant du Soleil avec son pied unique.

Il y a une excellente explication qui est fournie par Alcuin : six est parfait, parce que la Création s'est faite en six jours. Ce n'est pas le cas de huit et d'ailleurs la seconde création, celle qui a lieu après le Déluge, a impliqué les huit âmes qui étaient dans l'Arche.

Euclide commence par établir la théorie des nombres premiers et conclut par la démonstration qu'il n'en existe pas un qui soit plus grand que tous les autres, c'est-à-dire, en langage codé, qu'il y en a une infinité. Le mouvement surprenant de cette preuve en préfigure d'autres qui, à travers Du Bois-Raymond et Cantor, mèneront aux grands théorèmes de Gödel. Puis viennent quelques propositions irrelevantes à notre propos et enfin l'énoncé dramatique que si l'entier p est tel que $2^p - 1$ est premier alors $2^{p-1} \times (2^p - 1)$ est parfait. C'est le cas pour $p = 2, 3, 5, 7$ … mais pas 9, et les quatre (encore) plus petits nombres parfaits sont connus depuis l'Antiquité :

$6 = 2^1 \times (2^2 - 1) = 2 \times 3$;

$28 = 2^2 \times (2^3 - 1) = 4 \times 7$

qui admet des explications évidentes dès que l'on a abandonné le vieux rythme des semaines de cinq jours ;

$496 = 2^4 \times (2^5 - 1) = 16 \times 31$

et $8128 = 2^6 \times (2^7 - 1) = 64 \times 127$.

Observez 127.

Oui, je le sais, hélas, ces choses-là sont rudes dans nos siècles de fer, de verre et plastique. Pourtant elles faisaient partie des connaissances des clercs passés par le trivium et le quadrivium. D'ailleurs, assis à cette table, j'ai un garant que l'abbesse Hroswitha ne négligeait pas d'en informer ses moniales, ce qui était d'autant plus méritoire que l'on ne disposait pas encore de la limpidité des notations modernes. En particulier, manquait la convention d'écriture que 2^k désigne le résultat de la multiplication têtue de deux par lui-même k fois, grande simplification prosaïque de ce qui fit, dit-on, l'amusement du roi Gélon, et de divers sages princes orientaux.

Aussi, personne ne pouvait alors s'aviser que $1 = 2^0 \times (2^1 - 1)$ peut être considéré comme un nombre parfait, le zéro-ième et, c'est là encore un très profond mystère, peut-être le seul nombre parfait qui soit impair (cf. Lautréamont).

Euclide est trop classique pour poser une question. D'ailleurs la question se pose d'elle-même. Existe-t-il un nombre parfait qui soit plus grand que tous les autres ?

Les auteurs du Moyen Âge restent dans le vague. Certains croient que les nombres parfaits se terminent alternativement par 6 ou par 8, ce qui est une séduisante hypothèse attribuant un rôle privilégié à dix = deux que multiplie cinq. Mais elle n'est pas vraie. Pire, les auteurs affirment que le cinquième nombre parfait est $2^{10} \times (2^{11} - 1)$. Or $2^{11} - 1 = 2047$ n'est pas un nombre premier comme tout écolier pouvait le vérifier sans trop de peine puisqu'il suffit de constater qu'il est divisible par 23.

Siegfried tuant Fafner, par **Arthur Rackham** (1911).

Gravure de Dürer représentant Hroswitha au pied d'Otto le Grand.

Édouard Lucas (1842-1891), grand amateur de mathématiques.

Sans doute la majorité des sorbonniqueurs ne faisait que recopier ce qu'elle avait lu, mais j'y vois une faute d'une tout autre gravité, celle de croire que le monde est trop simplement facile. La suite 2, 3, 5, 7, pas 9, … appelle 11 de façon trop voyante. Aurez-vous la dureté d'y dénoncer une erreur Pélagienne ?

Autre marque du temps chez les calculateurs. Chez vous les poèmes sont éternels, mais moins que les poètes et depuis les âges épiques, il n'y a plus de poèmes sans poètes alors que chez nous les théorèmes deviennent vite orphelins anonymes. Et nous ignorerons toujours qui a fait joyeusement quelque matin au Moyen Âge la découverte que $2^{12} \times (2^{13} - 1)$ est un nombre parfait, le vrai cinquième nombre parfait.

Permettez un excursus dans le jardin de l'Amitié. Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de ses parties aliquotes (se diviseurs propres), comme on disait avant que les Conciles de Bourbaki n'aient exclu les mots aux allures pédantes qui effaroucheraient les gentils étudiants. Deux nombres sont amicables, inter se amant, si chacun est la somme des parties aliquotes de l'autre. La paire la plus connue est (220, 284). Les meilleurs commentateurs la réfèrent à la Genèse car c'est le nombre des brebis et des autres présents que s'échangent Jacob et Ésau. Autres temps, autres usages. J'extraie de l'histoire de l'arithmétique que El-Magriti en 1107 rapporte avoir observé sur lui-même l'effet érotique des nombres amicables «quand on donne à manger le plus petit et qu'on consomme soi-même le plus grand. »

Je reviens au nombre parfait. L'époque moderne commence avec Cataldi qui, en 1558, construit les premières tables des nombres premiers et découvre les deux nombres parfaits suivants. Ceux-ci correspondent à $p = 17$ et à $p = 19$. Ce n'est pas un mince travail car Cataldi accomplit une à une toutes les divisions qu'il convient. Cinquante ans plus tard, Fermat démontre des théorèmes grâce auxquels ces calculs auraient été considérablement allégés, mais il ne trouve pas de nombres parfaits nouveaux, car il se présente une lacune inattendue.

Le grand Euler, en 1771, montrera que le nombre parfait suivant est $2^{30} \times (2^{31} - 1)$. Il se trouve que le nombre 2^{31} est la limite de ceux que les ordinateurs acceptent sans que l'on ait à invoquer des procédures spéciales. Et puis, plus de découvertes pendant un siècle jusqu'à Édouard Lucas, qui n'a pourtant aucune réputation chez les mathématiciens professionnels car il est inspecteur de l'enseignement, et ne publie que des livres de mathématiques amusantes. Vers 1875, il invente une méthode entièrement originale pour dépister les nombres parfaits. Elle relie de façon encore mystérieuse leur quête (que les lettrés ne manqueraient pas de dire initiatique) à l'antique nombre d'Or, c'est-à-dire au pentacle. Sa méthode réduit à presque rien les calculs exigés pour la vérification des cas déjà connus, mais il se borne à en montrer la vertu en prouvant que $2^{126} \times (2^{127} - 1)$ est parfait. Vous avez reconnu 127, mais évitez des hypothèses trop hâtives; en particulier, à un étage subalterne, que l'auteur de ces lignes serait moindrement kabbaliste. Très vite, d'autres appliquent la méthode et débusquent quelques nombres parfaits nouveaux.

Voyez comme notre temps est plus lent que celui des Arts. Pendant plus d'un demi-siècle, on ne trouvera rien malgré des efforts nombreux et bien d'autres qui demeurent des échecs inavoués. Malgré l'outil forgé par Lucas la masse des calculs est trop écrasante.

Mais en 1952, en Angleterre, Robinson, montre que $2^{520} \times (2^{521} - 1)$ est parfait.

Il a utilisé un ordinateur, et c'est aussi la première fois que ces machines fournissent un résultat proprement mathématique. Depuis, le domaine est devenu une petite industrie où amateurs et professionnels rivalisent pour enrichir la liste des nombres parfaits toujours grâce à la méthode de Lucas, et mille ingéniosités dans sa programmation.

Il est convenable (parce que $25 = 5^2$) de citer le vingt- cinquième nombre parfait. Il correspond au nombre premier 21701, et il suffit pour l'écrire d'aligner une quinzaine de milliers de chiffres. Désormais, la technique intervient dans cette longue procession. On s'active aujourd'hui autour de $p = 33843$, et des mathématiciens s'acharnent à trouver, à l'instar de Lucas, des propriétés permettant d'avancer vers la solution de l'énigme.

Dans ce travail, il faut beaucoup d'ardeur et une confiance inébranlable dans l'espoir du succès. Mais s'il n'y a pas d'autre voie que le test de Lucas, le temps de cette question ne sera plus que celui des machines.

Pourquoi perdre du temps à résoudre ces problèmes? Entre Euler et Lucas un mathématicien anglais, Peter Barlow, en 1814, écrit dans une encyclopédie que : « Les nombres premiers étant seulement curieux, sans être utiles, il est peu vraisemblable qu'il se trouve des personnes pour essayer d'en trouver de nouveaux ». Car quel est le statut des nombres parfaits correspondant à des nombres premiers ayant deux cents chiffres comme nous pouvons maintenant en produire en série et non pas cinq comme 33843 ? Il n'y a pas assez de matière dans l'univers visible pour construire un ordinateur permettant la vérification au moyen du test de Lucas. Peut-être même, Gödel l'autorise, la réponse est «??». Ultime ? ou provisoire ?

M. S.

Marcel-Paul Schützenberger, dit Marco Schützenberger (1920-1996)

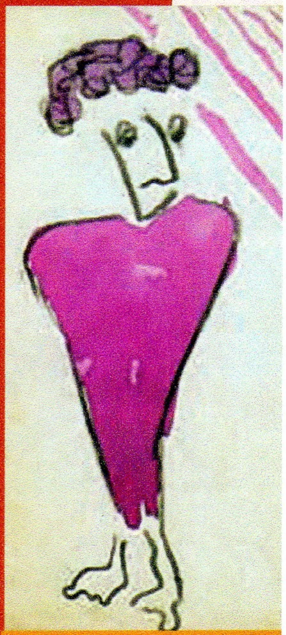
Mathématicien de renom international, Il était un esprit pluridisciplinaire, à la fois médecin, biologiste, psychiatre, linguiste, et algébriste.

Membre de l'académie des Sciences depuis 1988, ses recherches ont d'abord porté sur la médecine et la biologie, mais il est surtout connu pour ses travaux sur la théorie des langages , la combinatoire et la théorie des graphes.

Docteur en médecine en 1949, et en mathématiques en 1953 avec une thèse intitulée *Contributions aux applications statistiques de la théorie de l'information*, il fut successivement Professeur à l'université de Poitiers; détaché comme enseignant à la faculté de médecine à Harvard, directeur de recherche au CNRS professeur à l'université de Paris puis de 1970 à sa mort, professeur à l'université de Paris VII.

C'est d'ailleurs cette étude statistique et combinatoire d'informations médicales qui l'amèneront à découvrir les causes génétiques de la trisomie en 1953.

Il fut, avec Noam Chomsky, un pionnier de la théorie des langages. Ses travaux ont porté entre autres sur la théorie algébrique des codes et la théorie des automates finis



Marco, autoportrait

Marco était un érudit plein d'esprit et d'humour, débatteur acharné, ayant un goût immodéré pour les paradoxes, capable de tous les éloges comme des plus ironiques sarcasmes. Il possédait un charme personnel et une bonne humeur captivants. Son accueil était chaleureux, notamment vis-à-vis des jeunes curieux et talentueux mais ne tolérait pas des poseurs et les imbéciles.

Il fut un grand ami de Benoît Mandelbrot et de ... Boris Vian, dont il a inspiré son héros, le docteur Schutz, dans son roman *Et on tuera tous les affreux*. Son arrière grand-père, Paul Schützenberger, était le co-fondateur de l'École de Physique et Chimie de Paris, découvreur de l'acétate de cellulose et des hyposulfites. Il fut marié avec la psychologue Anne Ancelin avec qui il publia de nombreux travaux.