THÉORIE DES GROUPES. — *Sur la théorie des structures de Dedekind.* Note de M. **Marcel-Paul Schutzenberger**, présentée par M. Gaston Julia.

I. Un ensemble ordonné par une relation d'infériorité transitive désignée par le signe $\subset$ est une structure au sens de Ore (cf. Glivenko, *Théorie générale des structures;* Ore, *Annals of Mathematics*, 1935 et 1936) si, pour deux êtres quelconques a et b, il existe des bornes inférieure et supérieure uniques $a \cap b$ et $a \cup b$. Une structure finie a des absolus supérieur et inférieur $\mho$ et Ω entre lesquels sont compris tous ses êtres x.

Deux êtres comparables a et b définissent une structure quotient $a \mid b$, qui est l'ensemble des êtres compris entre a et b et les admettent par suite pour absolus inférieur et supérieur.

II. Je m'occupe dans cette Note des structures d'un nombre fini d'êtres vérifiant la condition de Dedekind $(a \cap c) \cup (b \cap c) = c \cap [b \cup (a \cap c)]$.

Cette condition peut être mise sous diverses formes équivalentes entraînant notamment une extension du théorème de Jordan sur les suites de composition; dans une structure quotient ab on peut intercaler entre les bornes une suite d'êtres différents a_i — (de $a_0 = a$ à $a_h = b$) tels que chacun d'eux soit immédiatement inférieur au suivant, c'est-à-dire $a_i \subset a_{i+1}$ et $a_i \mid a_{i+1}$ formé des seuls êtres extrêmes. Les diverses suites ainsi obtenues ont le même nombre H d'intervalles qui est la hauteur de la structure quotient $a \mid b$.

Dans les propriétés des structures, il y a une dualité (ou corrélation) réalisée en permutant les signes $\cap$ et $\cup$, $\subset$ et $\supset$.

III. J'ai été amené à définir « élément générateur inférieur » (ou supérieur), un être E qui n'a qu'un seul être O immédiatement inférieur (ou supérieur) appelé *origine*.

J'ai énoncé à leur sujet les propriétés corrélatives suivantes : les origines O de la structure quotient $m \mid \mho$ sont constituées par les $m \cup \mathrm{O}$ (O désignant une origine de la structure $\Omega \mid \mho$).

J'appelle entière une structure qui n'a d'autre origine que les absolus, ce sont les seules à posséder au moins un inverse a' pour chacun de leurs êtres a, tel que a, tel que $a \cap a' = \Omega$ et $a \cup a' = \mho$.

Toute structure quotient d'une structure entière est entière.

Le produit direct au sens habituel de ce terme de deux structures entières est entier.

IV. J'appelle *simplex* une structure (de Dedekind) entière indécomposable par produit direct; et j'ai obtenu à ce sujet les résultats suivants :

a. Toute structure quotient d'un simplex est un simplex.

b. Un simplex S_H de hauteur H est formé d'un absolu supérieur $\mho$ et d'un certain nombre $N^H - 1/N - 1$ simplex $S_H - 1$ ayant en commun $N + 1$ à $N + 1$ un simplex de hauteur $H - 2$.

Dans un simplex ainsi caractérisé par sa hauteur H et sa densité $N \geqq 2$, le nombre de structures quotient $\Omega \mid x$ ou $x \mid \mho$ de hauteur h est

$$C_H^h(N) = \prod_0^{h-1} \left(\frac{N^{H-i} - 1}{N^{i+1} - 1} \right).$$

Pour $N = 1$ ou 0, l'on n'obtient plus des simplex, mais des structures distributives, et les $C_H^h(1)$ sont les coefficients du binôme. Pour N premier, le simplex est isomorphe à la structure des sous-groupes d'un groupe abélien engendré par H générateurs d'ordre N.

Je n'ai pu établir l'existence de simplex pour des valeurs quelconques de la hauteur et de la densité, mais j'ai pu montrer que toute structure entière finie de Dedekind était un produit direct de simplex.

Ces propriétés se généralisent pour des structures non entières.