ALGÈBRE. — *Sur les structures de Dedekind.*

Note [1] de M. **Marcel-Paul Schützenberger.**

Je me propose d'appliquer aux structures d'ordre quelconque les résultats précédemment signalés [2].

Pour tout élément a de $\Omega/\mho$ il existe un *nœud supérieur* a^0, borne inférieure des x tels que a/x soit entière, et, corrélativement, un *nœud inférieur* a_0 qui est en général différent de $(a^0)_0$, mais il existe les relations

$$((a^0)_0)^0 = a^0, \qquad ((a_0)^0)_0 = a_0.$$

Les structures entières $(a^0)_0/a^0$ et $a_0/(a_0)^0$ sont les mailles *supérieure* et *inférieure* de $\Omega/\mho$ attachées à a. L'ensemble des mailles *inférieures* est identique à l'ensemble des mailles *supérieures* attachées à tous les éléments de $\Omega/\mho$.

J'ai démontré que l'on pouvait obtenir d'une manière unique, à l'ordre près des opérations, toutes les structures de Dedekind, à partir des *simplex*, en introduisant dans une structure d'ordre inférieure, à partir d'une nouvelle origine convenable, des éléments générateurs, et les éléments nécessités par les axiomes et la condition de Birkhoff. L'on passe ainsi d'une structure à une autre d'un ordre plus élevé par une ou plusieurs des quatre opérations (*dilatations*) corrélatives suivantes effectuées à partir d'une origine nouvelle a quelconque.

1° Produit direct généralisé : si $a/a^0 = \Sigma$ l'on peut obtenir $a/(a^0)' = \Sigma \times \Sigma'$ (Σ et Σ' étant des structures de Dedekind quelconques); cette opération est valable d'ailleurs pour n'importe quelle structure.

2° Dilatation simpliciale : si $a/a^0 = \Sigma \times S^H$ (S^H simplex) l'on peut obtenir $a/(a^0)' = \Sigma \times S^{H'}$ avec $H' > H$.

3° Si $a/a^0 = \Sigma \times S^H(n) \times S^{H'}(n)$ et si S^H et $S^{H'}$ sont *induits* en a par deux dilatations précédentes l'on peut obtenir $a/(a^0)' = \Sigma \times S^{H+H'}(n)$.

4° Sous des conditions analogues et plus restrictives, si $a/a^0 = \Sigma \times S^1 \times S^1$, l'on peut obtenir $a/(a^0)' = \Sigma \times S^2(n)$; ($n$ quelconque).

Réciproquement toute structure obtenue au moyen des dilatations 1°, 2° ou 3° peut être complétée en une structure *entière* et de *même hauteur.*

Signalons une particularité des structures complètes de diviseurs d'entiers

---

(1) Séance du 15 mai 1944.

(2) *Comptes rendus,* **216**, 1943, p. 717.

et de sous-groupes de groupe abélien. Toute *origine* est l'*absolu* ou un *élément générateur*.

Dans le cas général, la construction précédente m'a permis d'établir le théorème suivant :

Dans toute structure finie de Dedekind, le nombre des éléments générateurs INFÉRIEURS *est égal au nombre des éléments générateurs* SUPÉRIEURS.

Ce nombre est aussi dans les *structures distributives* toujours obtenues par la dilatation 1°, égal à la *hauteur* et au nombre de valeurs *indépendantes* dont on dispose pour *normer* la structure.

On en déduit aussi des extensions, des théorèmes de Remack (signalées par Birkhoff, *Proc. of the Cambr. Ph. Soc.*, 1933) et de Zassenhaus, où l'isomorphie doit être entendue au sens restreint d'isomorphie structurelle.

1° THÉORÈME DE REMACK. — *a, b et c étant trois éléments quelconques d'une structure de Dedekind, les trois structures quotients* $(a\Pi b)\amalg(a\Pi c)/a\Pi(b\amalg c)$, $(b\Pi c)\amalg(b\Pi a)/b\Pi(a\amalg c)$ *et* $(c\Pi a)\amalg(c\Pi b)/c\Pi(a\amalg b)$ *sont isomorphes.*

2° THÉORÈME DE ZASSENHAUSS. — *a, a', b et b' étant quatre éléments quelconques d'une structure de Dedekind, les trois structures quotients*

$$(a\Pi a')\amalg(a\Pi b\Pi b')/(a\Pi a')\amalg(a\Pi b), \quad (b\Pi b')\amalg(a\Pi a'\Pi b)/(b\Pi b')\amalg(a\Pi b)$$

et

$$(a\Pi a'\Pi b')\amalg(a\Pi b\Pi b')/(a\Pi b)$$

sont isomorphes.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 218, p. 818-819, séance du 22 mai 1944.)

Dépôt légal d'éditeur. — 1944. — N° d'ordre 25.
Dépôt légal d'imprimeur. — 1944. — N° d'ordre 42.

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
121195-44 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.