# COMPTES RENDUS

HEBDOMADAIRES

# DES SÉANCES

# DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PUBLIÉS,

CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE

EN DATE DU 13 JUILLET 1835,

**PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.**

## TOME DEUX-CENT-VINGT-ET-UNIÈME.

JUILLET — DÉCEMBRE 1945


PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1945

## CORRESPONDANCE.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur certains axiomes de la théorie des structures*. Note [1] de M. MAURICE-PAUL SCHÜTZENBERGER, présentée par M. Gaston Julia.

Nous indiquerons dans cette Note un certain nombre de résultats relatifs aux *ois universelles* en théorie des treillis (structures, lattices), c'est-à-dire aux lois définies par une ou plusieurs égalités pour toutes valeurs des variables entre deux polynomes en $\cap$ et $\cup$ (que nous remplaçons par . et $+$). A chaque loi $\mathfrak{U}_z$ correspond pour toute valeur de K une structure $\mathfrak{M}(K)$ homomorphe, au moyen des relations d'équivalence fournies par $\mathfrak{U}_z$ au treillis *libre* $\mathfrak{M}_\infty(K)$ (cf. Whitmann, *Ann. of Mathematics*, 1941 et 1942) engendré par K générateurs (treillis de rang K). Réciproquement, à tout treillis fini $\mathfrak{u}_z$ il est possible d'attacher une loi $\mathfrak{U}_z$ unique, plus forte que toutes les autres lois compatibles avec $\mathfrak{u}_z$ et telle que $\mathfrak{M}(K)$ soit finie pour toute valeur finie de K.

1° La loi distributive $\mathfrak{U}_0 \rightleftharpoons a(b+c) = ab+ac$ est *la plus forte* de toutes les lois universelles non dégénérées. En effet toute loi $\mathfrak{U}_z$ qui n'est pas plus faible que la loi $\mathfrak{U}_0$ entraîne l'égalité de tous les éléments de $\mathfrak{M}_z(K)$. L'on pourrait se servir de ceci pour démontrer que, si un polynome de treillis libre $\mathfrak{M}_\infty(K)$ a pour valeur $\mathfrak{M}_0(K)$ un monome, il a effectivement cette valeur dans $\mathfrak{M}_\infty(K)$.

2° Il existe deux et seulement deux lois $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ *immédiatement* plus faibles que $\mathfrak{U}_0$ :
$\mathfrak{U}_1$ est définie par

$$\begin{aligned} a_1[a_2+a_3(a_4+a_5)] = {} & a_1[a_1a_2+a_3a_4] + a_1[a_2+a_1a_3a_4] + a_1[a_1a_2+a_3a_5] \\ & + a_1[a_2+a_1a_3a_5] + a_1a_3[a_1a_3a_4+a_5] + a_1a_3[a_4+a_1a_3a_5], \end{aligned}$$

son *sous-treillis typique* est réalisé par les 5 éléments

$$\Omega = a_1a_3, \qquad x = a_3, \qquad y = a_1a_2+a_1a_3, \qquad z = a_1(a_3+a_1a_2), \qquad \mho = a_3+a_1a_2$$

entraînant

$$xz = \Omega \subset y \subset z \subset \mho = x+y, \qquad \Omega \subset x \subset \mho$$

dans $\mathfrak{M}_\infty(3)$, la loi $\mathfrak{U}_2$

$$a(b+ac) = ab+ac$$

---

[1] Séance du 23 juillet 1945.

et

$$a_1[a_2 + a_3(a_4 + a_5)] = a_1(a_2 + a_3 a_4) + a_1(a_2 + a_3 a_5) + a_1 a_3(a_4 + a_5) + a_1 a_4(a_3 + a_2 a_5) + a_1 a_5(a_3 + a_2 a_4)$$

est satisfaite par les éléments du treillis de Dedekind $\boldsymbol{\mathfrak{U}}_d(3)$. Ces deux lois donnent des treillis $\boldsymbol{\mathfrak{U}}_1(\mathrm{K})$ et $\boldsymbol{\mathfrak{U}}_2(\mathrm{K})$ finis si leur rang K est fini.

Il n'en est pas de même en ce qui concerne $\boldsymbol{\mathfrak{U}}_d(\mathrm{K})$, déduite de la loi de Dedekind $\mathfrak{U}_d$

$$a_1[a_2 + a_1 a_3] = a_1 a_2 + a_1 a_3,$$

qui pour $\mathrm{K} \geqq 4$ est non seulement infini, mais a ses chaînes infinies comme, l'on peut l'établir facilement en considérant les expressions

$$z_{i+1} = [(z_i + a_1)a_2 + a_3]a_4, \quad z_{i+1} \supset z_i, \quad z_{i+1} \not\subset z$$

(par réalisation convenable dans un espace projectif).

Signalons ici que toute loi strictement plus faible que $\mathfrak{U}_d$, par exemple

$$\mathfrak{U}_l : \quad a_1 a_2 + a_1 a_3 = a_1(a_2 + a_1 a_3)(a_3 + a_1 a_2),$$

est nécessairement plus faible que $\mathfrak{U}_1$ et que toute loi plus forte que $\mathfrak{U}_d$ et différente de $\mathfrak{U}_0$ est $\mathfrak{U}_2$ ou plus faible que $\mathfrak{U}_2$.

3° Parmi les lois *comprises* entre $\mathfrak{U}_d$ et $\mathfrak{U}_2$ signalons les deux lois intéressantes $\mathfrak{U}_l$ et $\mathfrak{U}_\mathrm{L}$, obtenues en adjoignant à $\mathfrak{U}_d$ les égalités $\mathfrak{U}'_l$ et $\mathfrak{U}'_\mathrm{L}$; posons

$$\mathrm{M}_{12} = \mathrm{M}_{21} = \mathrm{M}_{34} = a_1 a_2 + a_3 a_4; \qquad \mathrm{F}_{12} = \mathrm{F}_{21} = a_1 a_2 + \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{14},$$

$$\mathfrak{U}'_l \rightleftharpoons \mathrm{F}_{12}\mathrm{F}_{23} + \mathrm{F}_{23}\mathrm{F}_{31} + \mathrm{F}_{31}\mathrm{F}_{12} = \mathrm{F}_{12}\mathrm{F}_{23}\mathrm{F}_{31} = \mathrm{A}_4$$

$$\begin{aligned} a_2 a_3 + a_5 a_6 &= \mathrm{B}'_1, & \mathrm{B}'_1 + \mathrm{B}'_2\mathrm{B}'_3 &= \mathrm{B}_1; \\ a_3 a_1 + a_6 a_4 &= \mathrm{B}'_2, & \mathrm{B}'_2 + \mathrm{B}'_3\mathrm{B}'_1 &= \mathrm{B}_2; \\ a_1 a_2 + a_4 a_5 &= \mathrm{B}'_3, & \mathrm{B}'_3 + \mathrm{B}'_1\mathrm{B}'_2 &= \mathrm{B}_3; \end{aligned}$$



par exemple

$$\mathfrak{U}'_\mathrm{L} \rightleftharpoons \alpha = a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_5 a_6 = (a_2\mathrm{B}_2 + a_3\mathrm{B}_3)(a_5\mathrm{B}_2 + a_6\mathrm{B}_3) + \alpha;$$

$\mathfrak{U}_\mathrm{L}$ assure dans tous les cas et $\mathfrak{U}_l$ dans les cas de $\mathrm{K} = 4$ (cas de Möbius) la validité du théorème de Desargues. L'on peut montrer (Veblen) que $\mathfrak{U}_l$ est plus fort que $\mathfrak{U}_d$, mais nous n'avons par pu trouver d'exemple effectif de treillis satisfaisant à $\mathfrak{U}_l$ sans satisfaire à $\mathfrak{U}_\mathrm{L}$.

Les lois $\mathfrak{U}_{m(p)}$, exprimant que les géométries projectives que l'on peut déduire des treillis $\boldsymbol{\mathfrak{U}}_{m(p)}(\mathrm{K})$ ont pour corps de coefficient un corps modulo $p$, s'obtiennent en remarquant que les 4 expressions $\mathrm{A}_i$ se comportent entre elles comme 4 points d'un plan quand $\mathfrak{U}_l$ est satisfaite. Pour les premières valeurs de $p$ nous avons trouvé des expressions plus simples; citons

$$\mathrm{M}_{12}\mathrm{M}_{13} + \mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{14} + \mathrm{M}_{14}\mathrm{M}_{12} = \mathrm{M}_{12}\mathrm{M}_{13}\mathrm{M}_{14} \qquad (\to \text{modulo } 2),$$

$$a_1\mathrm{F}_{23} = a_1\mathrm{F}_{34} = a_1\mathrm{F}_{42} \qquad (\to \text{modulo } 3);$$

ces relations sont des identités dans les groupes abeliens principaux d'ordre $p^x$.

Il existe aussi un ensemble de lois $\mathfrak{U}_{\mathrm{II}(h)} = \mathfrak{U}_d$ et $\mathfrak{U}'_{\mathrm{II}(h)}$, que l'on cut utiliser pour limiter le nombre de dimensions des espaces projectifs. On peut leur donner, par exemple, la forme simple ($d = h - 2$)

$$\mathfrak{U}'_{\mathrm{H}(h)} \rightleftharpoons a_0 \left[ \sum_{i=1}^{i=h-1} a_i \right] = \sum_{i=1}^{i=h-1} a_0 \sum_{\substack{\mathrm{J}=1 \\ \mathrm{J} \neq i}}^{\mathrm{J}=h-1} a_{\mathrm{J}}.$$

Remarquons que les points et les droites du complexe linéaire satisfont à $\mathfrak{U}_{\mathrm{H}(2)}$.

Toute loi plus forte que $\mathfrak{U}_l$ est nécessairement plus forte qu'une loi $\mathfrak{U}_m$ ou $\mathfrak{U}_{\mathrm{H}}$.