ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Remarques sur des relations d'ordre entre variables aléatoires indépendantes*. Note de M. **Marcel-Paul Schützenberger**, présentée par M. Gaston Julia.

En vue d'applications à des problèmes pratiques de statistique mathématique, on s'efforcera de formuler les conditions générales auxquelles doit satisfaire une relation entre variables aléatoires indépendantes pour pouvoir être considérée comme une relation d'ordre.

Structure d'ensemble préordonné. — Étant donné un ensemble Φ_I de variables aléatoires X_i, $i \in I$ définies sur un même ensemble C, illimité, totalement ordonné et B-mesurable, on dira que Φ est *préordonné* pour S, L : $o(\Phi, S, L)$, s'il existe une partie symétrique L de $I \times I$ contenant la diagonale, et une application S_{ii} sur l'ensemble formé par -1, 0 et $\Gamma + 1$ des couples X_i, X_ι faisant partie de L, telle que :

o_1. — pour tout i, i' : $S_{i,i'} = - S_{i',i}$.

o_2. — $S_{ii'} = 0$ entraîne : $i = i'$.

o_3. — $S_{ii'} \geqq 0$ entraîne : pour tout $d > 0$. $S(X_i, X_{i'} + d) = 1$ même si $X_{i'} + d$ n'est pas dans Φ.

o_4. — Le groupe G des transformations de C pour lequel les $S_{ii'}$ sont invariants a pour sous-groupe le groupe linéaire : $y = c(x - m)$ où $-\infty < m < +\infty$; $0 < c < +\infty$.

Structure d'ensemble ordonné. — Φ sera dit *ordonnée* pour S : [$O(\Phi, S, L)$ si $o(\Phi, S, L)$ et même O_1 : $S_{ii'} S_{i'i''} = 1$ entraîne $S_{ii'} S_{ii''} = 1$.

Structure de treillis. — Φ sera dit *treillis* pour S : $\mathfrak{T}(\Phi, S, L)$ si $o(\Phi, S, L)$ et $\mathfrak{T}_1$: $S_{ii'} S_{i'i''} = 1$ entraîne (i, i'') dans L, $\mathfrak{T}_2$: pour tout ii', il existe ι'' telle que $S_{ii''} \geqq 0$ et $S_{i'i''} \geqq 0$, et $S_{ii''} \geqq 0$ et $S_{i'i'''} \geqq 0$ entraîne $S_{i''i'''} \geqq 0$.

Structure d'ensemble presque totalement ordonné. — Φ sera dit *presque totalement ordonné* pour S $t(\Phi, S, L)$ si $\mathcal{O}(\Phi, S, L)$ et t_1 :(i, i') non dans L et (i', i'') non dans L entraîne (i, ι'') non dans L.

Structure d'ensemble totalement ordonné. — Φ sera dit *totalement ordonné* pour S : $T(\Phi, S, L)$, si $\mathcal{O}(\Phi, S, L)$ et T_1 : $L = I \times I$.

Il est facile de voir que ces conditions sont indépendantes. Cependant o_1, o_2, $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ entraînent O_1, comme il ressort de ma Note à l'Académie des Sciences du 6 janvier 1947.

D'un point de vue pratique, il faut mentionner deux faits importants, d'ailleurs immédiats :

1° Pour tout Φ il existe une infinité de S pour lesquelles Φ est presque totalement ordonné : il suffit de prendre une relation d'ordre entre valeurs typiques de position.

2° On peut toujours adjoindre à Φ des fonctions lui donnant une structure de treillis presque totalement ordonné; ces treillis ont pour loi universelle (1)

$$(a+b)(c+ab)=ab+c(a+b), \qquad ab[c+d(a+b)]=a(bc+bd)+b(ac+ad).$$

Enfin, lorsque G est le groupe de toutes les transformations conservant la structure d'ordre de C, il est possible d'exprimer les S en fonction de la série (infinie) des moments des $\Gamma_{ii'}(\lambda)$ définies dans le plan de p_i et $p_{i'}$ par

$$\Gamma_{ii'}(\lambda) : F_i^{-1}(p_i) = F_{i'}^{-1}(p_{i'}) + \lambda,$$

où

$$p_i = F_i(x_i) = \text{Prob}\,(X_i < x_i),$$

et complétée par des segments de droites là où les fonctions F_i et $F_{i'}$ sont *simultanément* discontinues.

Ces fonctionnelles sont en outre astreintes à être nulles quand $\Gamma_{ii'}(0)$ est la diagonale $p_i = p_{i'}$ et égales à 1, quand $\Gamma_{ii'}(0)$ est la réunion $\Gamma_{(\infty)}$ des deux segments

$$\Gamma_{(\infty)}\begin{cases} 0 \leqq p_i < 1 & \text{et} \quad p_i = 0, \\ p_i = 1 & \text{et} \quad 0 < p_{i'} \leqq 1, \end{cases}$$

vers laquelle $\Gamma_{ii'}(\lambda)$ converge quand $\lambda \to \infty$

Treillis des S^J. — Étant donné un ensemble Φ, l'ensemble des S^J, L^J tels que *au moins* $o(\Phi, S^J, L^J)$, forme un treillis $\Theta(\Phi)$ pour la relation « S^J *plus stricte* que $S^{J'}$ » ($S^{J'} \subset S^J$) définie par

$$\text{pour tout } i, i' \qquad S_{ii'}^{J'} = 1 \qquad \text{entraîne} \quad S_{ii'}^{J} = 1.$$

Ce treillis a un élément minimal donné par S^∞, correspondant à $\Gamma_{ii'}(0) = \Gamma(\infty)$ et la structure de Φ est alors une structure presque totalement ordonnée que l'on appellera « structure minimale de Φ ».

Il est manifeste que les S^J, L^J tels que $\mathcal{O}(\Phi, S^J, L^J)$, $\mathcal{C}(\Phi, S^J, L^J)$, $t(\Phi, S^J, L^J)$ ou $T(\Phi, S^J, L^J)$, forment des sous-treillis de Θ et n'en sont pas *nécessairement* des treillis quotients.

(1) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 512.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **224**, pp. 878-880, séance du 24 mars 1947.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
126098-47 Paris — Quai des Grands-Augustins, 55