CORRESPONDANCE.

L'Académie autrichienne des Sciences invite l'Académie à se faire représenter aux Cérémonies qui auront lieu à Vienne, du 11 au 16 mai 1947, à l'occasion du centième anniversaire de sa fondation.

MM. I. M. Vinogradov, élu Correspondant pour la Section de Géométrie, Walter Davis Lambert, élu Correspondant pour la Section de Géographie et Navigation, et David Keilin, élu Correspondant pour la Section d'Anatomie et Zoologie, adressent leurs remercîments à l'Académie.

M. René Bourret adresse des remercîments à l'Académie pour la distinction accordée à ses travaux.

M. K. Sinelnikov, Directeur de l'Institut physico-technique de l'Académie des Sciences de l'Ukraine, adresse les condoléances de cet Institut à l'occasion de la mort de M. *Paul Langevin*.

M. le Secrétaire perpétuel signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

N. B. Medvedeva. *Endocrinologie expérimentale* (en langue russe).

ALGÈBRE. — *Remarques sur la notion de clivage dans les structures algébriques et son application aux treillis.* Note [1] de M. Maurice Paul Schützenberger, présentée par M. Gaston Julia.

On rappellera quelques résultats dont certains ont déjà été exposés dans une Note antérieure [2] que l'on complétera et systématisera à l'aide d'un lemme très simple de la théorie générale des relations d'équivalence dans les structures algébriques. Enfin on appliquera ces résultats au domaine particulier des treillis.

Lois universelles. — Étant donnée une structure algébrique S, on appellera loi universelle de S l'ensemble U, $U = \mathfrak{U}(S)$ des égalités entre polynomes généralisés identiquement vérifiées quand les variables prennent indépendamment toutes les valeurs possibles dans S. Réciproquement, on appellera *structure libre à k générateurs de* U la structure $S' = \mathcal{L}_k(U)$, isomorphe au quotient de la structure des polynomes à k variables par les relations de U. On appellera *noyau de* U, quand elle existe, la sous-structure S'' de $\mathcal{L}(U)$, $\mathcal{N}(U)$ invariante

(1) Séance du 20 janvier 1947.

(2) *Comptes rendus*, 221, 1945, p. 218.

par toutes les substitutions de polynomes à des variables qui laissent U invariant. Par définition, $\mathfrak{U}[\mathcal{N}(\mathrm{U})] = \mathrm{U}$.

Parmi les lois universelles, on distinguera les *lois simples* définies par une égalité unique dans l'un des membres de laquelle chaque variable ne figure qu'une fois. Il est à remarquer que, lorsque toutes les opérations possèdent un inverse, toute loi universelle peut s'exprimer par la composition de lois simples. Il en est d'ailleurs de même pour les treillis.

Ordonnées par la relation $\mathrm{U}_1 \supset \mathrm{U}_2$ (U_1 plus fort que U_2, U_2 plus faible que U_1), les lois universelles forment un treillis *fermé* pour les deux opérations (.) et (+); si S_1 et S_2 satisfont à U, il en est de même du produit direct $\mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2$ et réciproquement,

$$\mathfrak{U}(\mathrm{S}_1) + \mathfrak{U}(\mathrm{S}_2) = \mathfrak{U}[\mathcal{N}(\mathrm{S}_1) \times \mathcal{N}(\mathrm{S}_2)].$$

Lemme de clivage. — *Si dans une structure algébrique libre* S *les polynomes* π_i *constituent une sous-structure* S′, *on a nécessairement pour toute loi universelle* U *plus forte que* $\mathfrak{U}(\mathrm{S})$.

1° soit U plus faible que $\mathfrak{U}(\mathrm{S}')$;

2° soit U plus fort que l'une des lois u_{ij} obtenues en posant $\pi_i = \pi_j$ pour toutes valeurs des variables.

Généralisant une notion de Whitman ([3]), on dira que le treillis des lois universelles plus fortes que $\mathfrak{U}(\mathrm{S})$ est *clivé* entre $\mathfrak{U}(\mathrm{S}')$ et l'ensemble des u_{ij}.

En effet, si 1° n'était pas vérifié, il y aurait au moins deux être π_i et π_j égaux, d'où 2°, et d'autre part 1° et 2° ne peuvent être simultanément vrais car $u_{ij}.\mathfrak{U}(\mathrm{S}')$ est différent de $\mathfrak{U}(\mathrm{S}')$.

Donc $\mathfrak{U}(\mathrm{S}')$ est un élément irréductible pour (+) du treillis des U plus forts que $\mathfrak{U}(\mathrm{S})$, et de même pour (.) l'élément le plus fort des u_{ij}, quand il existe. Par exemple, le treillis des lois universelles de la structure de groupe est clivé entre la loi $xy = yx$ et l'ensemble des lois $x_p = 1$ (p premier), car le groupe formé des puissances d'un seul élément est abélien.

Applications à la structure algébrique de treillis commutatif. — On peut, ici, préciser encore la notion de clivage en faisant usage du théorème simple suivant :

Si, dans $\mathcal{L}(\mathrm{U})$ *le polynome* π_i *est irréductible, alors, pour toute loi universelle* U′ *plus faible que* U, *il existe un polynome* π'_i *irréductible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{U}')$ *et tel que* $\pi_i = \pi'_i$ *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{U})$.

On peut alors énoncer :

$\mathcal{N}(\mathrm{U}')$ peut être réalisé comme sous-structure dans toute $\mathcal{L}(\mathrm{U}' + \mathrm{U}'')$, s'il est réalisé *tautologiquement* dans $\mathcal{L}(\mathrm{U}'.\mathrm{U}'')$, donc nécessairement si U″ n'est pas plus faible que U′. Par conséquent, dans ces conditions [vérifiées notamment

([3]) *Splittings of a lattice* (*Am. J. of Math.*, 65, 1943, pp. 79-196).

quand $\mathfrak{N}(U')$ est engendré par des π_i tels que $\pi_i = \pi_j$ dans $\mathcal{L}(U'')$], le treillis des lois plus fortes que $U' + U''$ est clivé entre U' et l'ensemble des lois $\pi'_i = \pi'_j$.

En application on citera :

1° Le clivage entre la loi triviale $a = b$ et la loi distributive;

2° Le clivage dérivé du treillis de Birkhoff à 5 éléments non dédékindien A entre la loi de Dedekind et $\mathfrak{U}(A)$;

3° Les clivages dérivés des treillis duals de Löwig ([4]) B et $\bar{B}$ entre la loi $a(ab + bc + ca) = ab + ab$ et $\mathfrak{U}(B)$ et de manière duale;

4° Le clivage dérivé du treillis à 10 éléments engendré par a, b, et $a(b + c) + b(a + c)$ entre la loi $[a + b(a + c)][b + a(b + c)] = a(b + c) + b(a + c)$ (que le clivage même permet de montrer équivalente à sa forme duale) et $\mathfrak{U}(C)$;

5° Dans le treillis des lois universelles plus fortes que la loi de Dedekind, le clivage entre la loi distributive et la loi du treillis dédékindien non distributif à 5 éléments.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur une généralisation d'un théorème de M. B. de Finetti et son application à la théorie collective du risque.* Note ([1]) de M. J. **Dubourdieu**, présentée par M. Émile Borel.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ les gains respectifs d'un joueur A dans une suite de paris successifs $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$. Et soit K la fortune initiale de A. Nous désignerons par U_k la variable aléatoire égale au gain algébrique X_k de A dans la partie P_k, *si celle-ci est jouée* (ce qui suppose que A n'ait pas été ruiné par les parties antérieurement jouées), et qui est nulle dans le cas contraire. Et posant $S_n = K + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$, nous désignerons par $F_n(x)$ la fonction des probabilités totales de S_n. Pour que A soit ruiné en au plus n parties, il faut et il suffit que S_n soit $\leqq 0$, et la probabilité de cette éventualité est $\Pi_n = \Pr\{S_n \leqq 0\} = F_n(+0)$. Soit d'autre part $R(x)$ une fonction croissante de x. On a

$$\mathfrak{M}\{e^{-R(S_n)}\} \geqq \int_{-\infty}^{0} e^{-R(x)}\, dF_n(x) \geqq e^{-R(0)} F_n(+0).$$

D'où l'inégalité

$$\Pi_n = F_n(+0) \leqq e^{R(0)} \mathfrak{M}\{e^{-R(S_n)}\}. \tag{1}$$

D'autre part, comme $S_n = S_{n-1} + U_n$, il vient

$$\mathfrak{M}\{e^{-R(S_n)}\} = \mathfrak{M}\{e^{-R(S_{n-1})} \mathfrak{M}_{S_{n-1}}[e^{R(S_{n-1}) - R(S_{n-1} + U_n)}]\}, \tag{2}$$

identité dans laquelle $\mathfrak{M}_{S_{n-1}}$ désigne la valeur probable liée à S_{n-1}.

Ceci dit, supposons que notre joueur ait la faculté de choisir chaque nouvelle

([4]) *Ann. of Math.*, 42, 1943, pp. 573-579.

([1]) Séance du 6 janvier 1947.