CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur certains paramètres caractéristiques des systèmes d'événements compatibles et dépendants et leur application au calcul des cumulants de la répétition.* Note (¹) de M. **Marcel-Paul Schutzenberger**, transmise par M. Gaston Julia.

Étant donné l'événement *composé* : $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, réalisé quand et seulement quand les n événements *simples* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le sont simultanément, on appellera *déviation d'indépendance* de A, l'expression

$$\gamma(A) = \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 2^n \Sigma(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\, \mathrm{Pr}(B_1)\mathrm{Pr}(B_2), \ldots, \mathrm{Pr}(B_\nu),$$

où la sommation est étendue à toutes les partitions de l'ensemble $a, a_1, \ldots, a_n$, en $\nu(1 \leqq \nu \leqq n)$ sous-ensembles auxquels sont attachés les événements B_i.

Par exemple :

$$\gamma(ab) = 4\big(\mathrm{Pr}(ab) - \mathrm{Pr}(a)\mathrm{Pr}(b)\big),$$
$$\gamma(abc) = 8\{\mathrm{Pr}(abc) - \mathrm{Pr}(a)\mathrm{Pr}(bc) - \mathrm{Pr}(b)\mathrm{P}(ca) - \mathrm{Pr}(c)\mathrm{Pr}(ab) + 2\,\mathrm{Pr}(a)\mathrm{Pr}(b)\mathrm{Pr}(c)\}.$$

On pose

$$\gamma(a) = 2\left(\mathrm{Pr}(a) - \frac{1}{2}\right).$$

Si l'on suppose que n_1 événements sont identiques à a_1, n_2 à a_2, ..., n_i à a_i, on obtient une *déviation contractée* par

$$\gamma(a^2b) = 8\Big[\mathrm{Pr}(ab) - 2\,\mathrm{Pr}(a)\,\mathrm{Pr}(ab) - \mathrm{Pr}(a)\,\mathrm{Pr}(b) + 2\big(\mathrm{Pr}(a)\big)^2\,\mathrm{Pr}(b)\Big],$$
$$\gamma(a^3) = 8\Big[\mathrm{Pr}(a) - 3\big(\mathrm{Pr}(a)\big)^2 + 2\big(\mathrm{Pr}(a)\big)^3\Big].$$

On démontre directement : si l'ensemble $a_1, a_2, \ldots, a_n$ peut être décomposé en deux sous-ensembles tels que tout événement composé à partir des événements simples du premier soit indépendant de tout événement composé à partir du second, alors $\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$. Notamment $\gamma(A) = 0$ si l'un des a_i ou son négat est presque certain.

De cette constatation découle immédiatement : les γ sont des fonctions alternées des a_i, c'est-à-dire que si A′ ne diffère de A que par la substitution de m négats d'événements simples à ces événements eux-mêmes,

$$\gamma(A') = (-1)^m \gamma(A).$$

(¹) Séance du 28 juillet 1947.

Un calcul direct à partir des formules classiques montre alors que le $i^{\text{ième}}$ cumulant (semi-invariant) $\varkappa_i$ de la répétition r dans un système de n événements peut s'écrire symboliquement

$$2^i\varkappa_i = \big((a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\big)^i,$$

où chaque terme $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_\nu^{n_\nu}$ du développement doit être remplacé par la déviation correspondante $\gamma(a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_\nu^{n_\nu})$.

On obtient ainsi pour les premiers cumulants

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= 2\bar{r} - n\\
\varkappa_2 &= 2\sum_{(a,b)}\big(\Pr(ab) - \Pr(a)\Pr(b)\big) + \sum_{(a)}\Pr(a)\big(1 - \Pr(a)\big)\\
\varkappa_3 &= 6\sum_{(a,b,c)}\big(\Pr(abc) - \Pr(a)\Pr(bc) - \Pr(b)\Pr(ac) - \Pr(c)\Pr(ab) + 2\Pr(a)\Pr(b)\Pr(c)\big)\\
&\quad + 6\sum_{(a,b)}\big(\Pr(ab) - \Pr(a)\Pr(b)\big)\big(1 - \Pr(a) - \Pr(b)\big)\\
&\quad + \sum_{a)}\big(\Pr(a)\big)\big(1 - \Pr(a)\big)\big(1 - 2\Pr(a)\big).
\end{aligned}$$

A partir de ces formules, on peut aisément retrouver ou établir un certain nombre de cas de tendances vers la normalité. On citera : si les a_i en nombre n sont tels que tous les $\gamma(a_i, a_j)$ soient positifs, finis et différents de zéro, la distribution de $\rho = (r - \bar{r})/\sigma$ tend vers une distribution normale quand $n \to \infty$, car les cumulants d'ordre i de ρ sont au plus d'ordre $n^{1-(i/2)}$.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 225, pp. 277-278, séance du 4 août 1947.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
127083-47 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.