« LES EXTRAITS DE LA REVUE SCIENTIFIQUE »

AXIOMATISATION DE LA GÉOMÉTRIE DANS UN COMPLEXE LINÉAIRE DE DROITES

PAR

MARCO SCHÜTZENBERGER

M. CM. XL. VII.

EXTRAIT DU N° 3278, 1er AOÛT 1947,
FASCICULE 13 DE LA 85e ANNÉE DE LA REVUE SCIENTIFIQUE, *PAGES 782 A 784*

PUBLIÉS PAR « LES ÉDITIONS DE LA REVUE SCIENTIFIQUE »

AXIOMATISATION DE LA GÉOMÉTRIE DANS UN COMPLEXE LINÉAIRE DE DROITES

AXIOMATISATION DE LA GÉOMÉTRIE DANS UN COMPLEXE LINÉAIRE DE DROITES

PAR

MARCO SCHÜTZENBERGER

Sommaire. — De même que la géométrie projective linéaire peut être définie de façon purement formelle, indépendamment de la réalisation des êtres qui la constituent, de même il est possible de donner à la géométrie, dans un complexe linéaire, une axiomatisation exclusivement combinatoire. Pour cela, le langage de la théorie des treillis *(Lattices*, Verbände, structures) est particulièrement bien adapté si l'on ajoute aux deux opérations $\bigcap$ (intersection) et $\bigcup$ (réunion complétée) une troisième opération /, introduisant par sa définition même les propriétés caractéristiques de la structure de : complexe linéaire de droites dans un espace projectif à trois dimensions et à coordonnées dans un corps commutatif.

SOIT donc un treillis $\mathfrak{B}'$ d'êtres génériques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, constitué par :

1° un être minimal Ω (élément vide) ;

2° une classe d'êtres $a, b, c, \ldots, x, \ldots$ (que nous nommerons *points)* immédiatement supérieurs à Ω $(\Omega \mathrel{-\!\!\subset} a)$;

3° une classes d'êtres $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{X}, \ldots$ (que nous nommerons *droites)* immédiatement inférieurs à l'être suivant : $(\mathrm{A} \mathrel{-\!\!\subset} \mho)$;

4° un être maximal $\mho$ (espace complet).

Plus brièvement nous définirons $\mathfrak{B}'$ comme un treillis où toutes les chaînes ont la longueur 3, les êtres $a, b, c, \ldots$ étant de hauteur 1 $(|a| = 1)$, et les $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ de hauteur 2 $(|\mathrm{A}| = 2)$ (condition I).

Nous pouvons déjà donner certaines précisions sur la valeur de $\bigcap$ et $\bigcup$:

$$\Omega \cap \Omega = a \cap \Omega = \mathrm{A} \cap \Omega = \mho \cap \Omega = \Omega ;$$
$$\Omega \cup \mho = a \cup \mho = \mathrm{A} \cup \mho = \mho \cup \mho = \mho ;$$
$$a \cap a = a \cup a = a \cap \mho = a \cup \Omega = a ;$$
$$\mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A} \cap \mho = \mathrm{A} \cup \Omega = \mathrm{A} ;$$
$$a \cap b = \Omega ; \quad \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mho .$$

$$a \cap \mathrm{A} \begin{cases} = a & \text{si} \quad a \subset \mathrm{A}, \\ = \Omega & \text{si} \quad a \not\subset \mathrm{A}, \end{cases} \quad \Bigg\| \quad a \cup \mathrm{A} \begin{cases} = \mathrm{A} & \text{si} \quad a \subset \mathrm{A}, \\ = \mho & \text{si} \quad a \not\subset \mathrm{A}. \end{cases}$$

Enfin, pour certains couples d'êtres a et b dits *liés*,

$$(|a \cup b| = 2) : a \cup b = \mathrm{X}.$$

Pour tous les autres couples,

$$a \cup \mathrm{B} = \mho \quad (|a \cup b| = 3).$$

Pour certains couples d'êtres A et B dits *liés*,

$$(|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| = 1) : \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = x.$$

Pour tous les autres couples

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \Omega \quad (|\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = 0).$$

Mais, pour définir complétement $\mathfrak{B}'$, il faut encore introduire / ; nous le ferons à partir de l'axiome suivant (axiome C) :

Il existe une application univoque unique φ de l'ensemble H des couples (x, X) sur le sous-ensemble H' de H des couples tels que $x \subset \mathrm{X}$, laissant H' invariant et telle que : $\varphi(x, \mathrm{X}) = (y, \mathrm{Y})$ entraîne $x \cup y = \mathrm{Y}$ et $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = y$, et nous définirons / par : $x/\mathrm{X} = y$.

Géométriquement, en désignant par $\widehat{x}$ l'ensemble des êtres z liés à x (c'est-à-dire tels que $|x \cup z| = 2$), y est l'intersection (au sens de la Théorie des ensembles) de $\widehat{x}$ et de X, ou, si l'on préfère, de X et du plan polaire $\widehat{x}$ de x, que l'axiome C postule unique.

Désormais ce seront exclusivement des treillis satisfaisant à C que nous désignerons par $\mathfrak{B}$. Ces treillis jouissent de propriétés spéciales :

1° Tout A peut être représenté comme réunion d'au moins deux a et, de même, tout a est l'intersection d'au moins deux A ; cela justifie l'équivalence de nos deux définitions des $\mathfrak{B}'$.

2° Si

$$|x \cup y| = 2 \quad \text{et} \quad |x \cup z| = 2, \quad \text{alors} \quad |y \cup z| = 3.$$

Autrement dit, il n'existe pas de triangles dont les trois côtés appartiennent à un même complexe linéaire.

3° Dans le cas fini, toutes les droites ont le même nombre de points m, et tous les points sont sur le même nombre de droites n. Réciproquement, s'il existe N points et M droites dans un treillis $\mathfrak{B}'$ *sans triangles*, et si (condition II)

$$M \cdot n \cdot (m - 1) \cdot (n - 1) = N \cdot (M - n) = M \cdot (N - m),$$

alors $\mathfrak{B}'$ satisfait à l'axiome C.

4° Quels que soient les êtres génériques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et de manière duale, en permutant $\bigcap$ et $\bigcup$, l'on a les identités suivantes :

(I) $\alpha \bigcap (\beta \bigcup \gamma \bigcup \delta) = [\alpha \bigcap (\beta \bigcup \gamma)] \bigcup [\alpha \bigcap (\gamma \bigcup \delta)] \bigcup [\alpha \bigcap (\delta \bigcup \beta)]$,

(II) $[\beta \bigcup \gamma] \bigcap [\alpha \bigcup (\beta \bigcap \gamma)] = \{\alpha \bigcap [\beta \bigcup \gamma]\} \bigcup \{\beta \bigcap [\alpha \bigcup (\beta \bigcap \beta]\} \bigcup \{\gamma \bigcap [\alpha \bigcup (\beta \bigcap \gamma)]\}$,

(II') $[\alpha \bigcup \beta] \bigcap [\alpha \bigcup \gamma] = \alpha \bigcup [\beta \bigcap (\alpha \bigcup \gamma)] \bigcup [\gamma \bigcap (\alpha \bigcup \beta)]$,

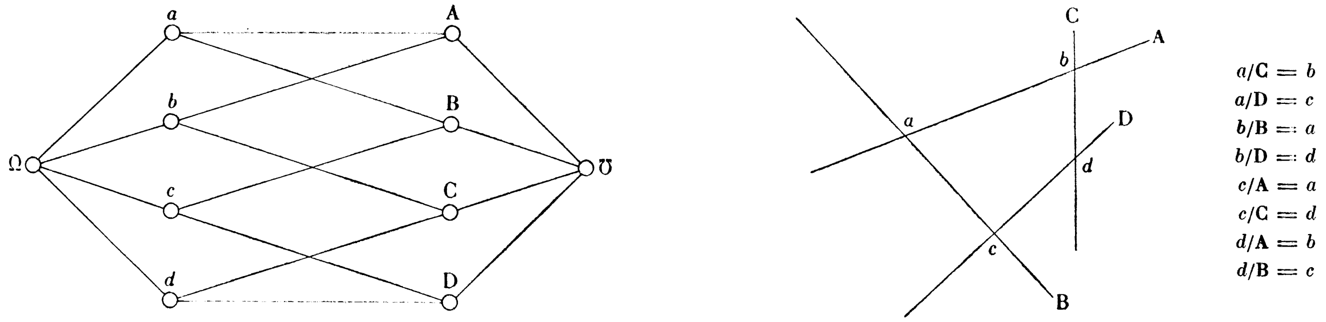

Fig. 1.

Le plus simple des $\mathfrak{B}$ est alors le treillis de la figure 1 (quadrilatère gauche), dont nous donnons la double représentation.

Mais toutes ces conditions sont insuffisantes pour caractériser les complexes habituels de la géométrie élémentaire ; en effet elles sont vérifiées si l'on identifie aux êtres $a, b, c, \ldots$ et $A, B, C, \ldots$ respectivement, les *droites* et les *points* d'un complexe linéaire. Or nous verrons tout à l'heure que cette structure (complexe dual) n'est qu'exceptionnellement isomorphe à celle que l'on obtient en identifiant les *points* aux $a, b, c, \ldots$ et les *droites* aux $A, B, C, \ldots$

Étant donné cinq points a_i (les indices sont pris modulo 5) distincts, nous nous dirons qu'ils forment un pentagone si les cinq réunions $a_i \bigcup a_{i+1}$ sont des droites de $\mathfrak{B}$ (c'est-à-dire si $|a_i \bigcup a_{i+1}| = 2$), et nous appellerons P-constructible tout être de $\mathfrak{B}$ pouvant s'obtenir à partir des a_i au moyen des opérations $\bigcap$, $\bigcup$ et $/$.

Nous introduirons alors l'axiome suivant, qui est le plus simple possible dans le système d'opérations adopté. En posant

$$b_i = a_i / a_{i+2} \bigcup a_{i-2},$$

l'on a l'axiome J :

$$c_i = b_{i+1} / a_i \bigcup b_i = b_{i-1} / a_i \bigcup b_i,$$

pour tout pentagone P de $\mathfrak{B}$.

Il est assez facile de vérifier cette identité pour un complexe au sens ordinaire, en prenant, après transformation linéaire convenable, pour équation $xY - yX + zT - tZ = 0$ et, pour pentagone,

a_0 :	1,	0,	0,	0,
a_1 :	0,	0,	0,	1,
a_2 :	0,	1,	0,	1,
a_3 :	1,	1,	1,	1,
a_4 :	0,	0,	1,	1.

Nous n'exposerons pas la démonstration complète, assez lourde, du théorème suivant qui établit la validité de l'axiome J :

« Si J est vrai pour un $\mathfrak{B}$ entièrement P-constructible, $\mathfrak{B}$ est isomorphe à un complexe linéaire à coordonnées dans un corps minimal de caractéristique quelconque. »

Nous donnerons cependant deux Lemmes qui servent de pivot à cette démonstration :

LEMME 1. — J *entraîne* $c_{i+2} / a_i \bigcup b_i = c_{i-2} / a_i \bigcup b_i$;

LEMME 2. — J *entraîne* $d_i = a_i / b_{i \pm 1} \bigcup c_{i \pm 2}$;

où les signes peuvent être combinés de manière quelconque.

Pour établir le théorème, il est commode d'introduire une relation ternaire d'alignement entre points de $\mathfrak{B}$: $(a, b, c)_{x,y}$ exprimant le fait que a, b et c sont contenus simultanément dans $\widehat{x}$ et dans $\widehat{y}$ ou, si l'on préfère, que

$$|a \bigcup x| = |a \bigcup y| = 2 ;$$
$$|b \bigcup x| = |b \bigcup y| = 2 ;$$
$$|c \bigcup x| = |c \bigcup y| = 2.$$

L'on prouve alors par récurrence, *pour tous les points* P-*constructibles* :

1° $(a, b, c)_{x,y}$ et $(a, b, d)_{x,y}$ entraînent $(a, c, d)_{x,y}$,

2° $(a, b, c)_{x,y}$ et $(a, b, c)_{x,z}$ entraînent $(a, b, c)_{y,z}$.

Cela permet de montrer que les ensembles intersections des $\widehat{x}$ jouissent des propriétés des droites de l'espace projectif.

On observera toutefois que, comme pour les géométries projectives, il n'est pas démontré que J assure la possibilité de réalisation de $\mathfrak{B}$ dans un corps quand l'ensemble des êtres P-constructibles n'épuise pas $\mathfrak{B}$.

Quelques cas particuliers sont dignes de remarque.

Lorsque le corps des coordonnées est un corps de caractéristique finie p, il est toujours possible de trouver une égalité en $\bigcap$, $\bigcup$ et / caractérisant ce module. Par exemple, l'on a

$$c_i = d_i \qquad \text{(Loi } M_2\text{)},$$

pour les corps modulo 2 ;

$$e_i = b_{i\pm 2}/b_{i\pm 2} \bigcup c_{i\pm 1} \qquad \text{(Loi } M_3\text{)},$$

pour les corps modulo 3, avec les deux combinaisons de signes +, —, —, et —, +, +, etc.

Dans le cas des corps modulo 2, il existe un isomorphisme entre la structure $\mathfrak{B}$ et la structure duale obtenue en permutant $\bigcap$ et $\bigcup$.

L'on se rend facilement compte que la formule duale de J n'est pas vérifiée dans les autres cas et que par conséquent cette dualité est le privilège des $\mathfrak{B}$ modulo 2 et du treillis donné en exemple.

Enfin, trois théorèmes importants peuvent être établis pour tous les $\mathfrak{B}$ P-constructibles :

THÉORÈME 1. — *$\mathfrak{B}$ est* P-*constructible à partir de tout autre pentagone* P′ *et ne l'est pour aucune autre configuration de cinq ou de moins de cinq points.*

THÉORÈME 2. — *L'ensemble des « a » a même puissance que l'ensemble des «* A *»* ($= p^3 + p^2 + p + 1$) *quand le corps des coordonnées est modulo p.*

THÉORÈME 3. — *Pour tout triple x, y, z, tel que*

$$|x \bigcup y| = |y \bigcup z| = |z \bigcup x| = 3,$$

il existe un et un seul « t » satisfaisant à

$$|x \bigcup t| = |y \bigcup t| = |z \bigcup t| = 2.$$

Comme exemple de treillis $\mathfrak{B}$ non représentable sous forme de complexe linéaire, il faut citer la configuration classique Γ formée par les 27 droites de la surface cubique générale.

Il est facile de voir que tout sous-treillis P-constructible de Γ est un complexe linéaire dans un espace modulo 2, et que les 12 autres droites n'appartenant pas à cette configuration ne peuvent être choisies dans cet espace de manière à satisfaire aux relations d'incidences.

Ce type de structure, intermédiaire entre le complexe linéaire *complet* dans un surcorps et le complexe dans un corps minimal, se généralise sans difficulté à tous les surcorps, en donnant de nouvelles familles de treillis $\mathfrak{B}$ fermés pour $\bigcap$, $\bigcup$ et /, et où le nombre des droites est différent du nombre des points.

Pour conclure, signalons qu'il est possible, comme pour la géométrie projective plane, de remplacer la relation d'incidence traduite par l'axiome J, par une propriété du groupe d'automorphisme de $\mathfrak{B}$.

Partons d'un quadrilatère vrai Q de $\mathfrak{B}$: a, b, c, d,

$$(|a \bigcup b| = |a \bigcup d| = |b \bigcup c| = |c \bigcup d| = 2),$$

et soit m lié à a. Nous dirons que $\mathfrak{B}$ est Q-*homogène* s'il existe un sous-groupe du groupe d'automorphisme de $\mathfrak{B}$ laissant Q invariant et transitif en m.

L'on peut alors démontrer que $\mathfrak{B}$ vérifie J si, pour tous les Q, $\mathfrak{B}$ est Q-homogène avec, en outre, les propriétés suivantes :

Le sous-groupe qui conserve Q et $M = m \bigcup a$ laisse invariantes toutes les droites issues de a, b, c, d, et des points de $\widehat{a} \bigcap \widehat{c}$ et $\widehat{b} \bigcap \widehat{d}$ (intersection au sens de la théorie des ensembles !).

(manuscrit reçu le 3 juillet 1947)