PRÉSENTATIONS.

Dans la formation d'une liste de candidats à la Chaire de Théorie des équations différentielles et fonctionnelles du Collège de France, pour la première ligne, M. *Jean Leray* obtient 41 suffrages; il y a deux bulletins blancs.

Pour la seconde ligne, M. *André Lichnerowicz* obtient 30 suffrages; il y a deux bulletins blancs.

En conséquence, la liste présentée à M. le Ministre de l'Éducation Nationale comprendra :

En première ligne............ M. Jean Leray.
En seconde ligne............. M. André Lichnerowicz.

CORRESPONDANCE.

Sir Edward John Russell, élu Associé étranger, et M. Théodore de Karmán, élu Correspondant pour la Section de Mécanique, adressent leurs remercîments à l'Académie.

M. le Secrétaire perpétuel signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Union géodésique et géophysique internationale. Comité National français. Section d'Hydrologie scientifique. *Commission du Bassin de la Seine.* Cahier n° 6. *Niveau journalier de la Seine à Vernon* (1885-1940).

ALGÈBRE. — *Sur certains treillis gauches.* Note (1) de M. Maurice-Paul Schützenberger, transmise par M. Gaston Julia.

On étudiera brièvement ici certains treillis non commutatifs. Des résultats déjà connus (Klein Barmen, *Math. Zeitschrift*, 1940, pp. 41, 42, 43) seront approfondis.

Axiomes des treillis gauches. — Ce sont des structures algébriques où existe une loi de composition interne partout définie, associative, strictement idempotente ($aa = a$). On examinera ultérieurement la loi plus faible : pour tout a, il existe un entier n tel que $a\,a^n = a^n$. On postulera en outre l'existence de $\mho$ (pour tout a : $a\mho = \mho a = a$) et de Ω (pour tout a : $a\Omega = \Omega a = \Omega$).

Inégalité et isotopie — On écrira

$$a \dot{\subset} b \quad \text{équivalent à} \quad ab = a;$$
$$a \underset{\cdot}{\subset} b \quad \text{équivalent à} \quad ba = a;$$
$$a \subset b \quad \text{équivalent à} \quad ab = ba = a.$$

(1) Séance du 6 janvier 1947.

Cette relation est *transitive* et a une *réflexivité presque complète* (*croisée*). On a en outre, pour tout c,

$$\text{si } a \dot{\subset} b, \quad \text{alors} \quad ca \dot{\subset} b;$$
$$\text{si } a \underset{\cdot}{\subset} b, \quad \text{alors} \quad ac \underset{\cdot}{\subset} b.$$

On écrira

$$a \doteq b \quad \text{équivalent à} \quad a \dot{\subset} b \quad \text{et} \quad b \dot{\subset} a;$$
$$a \underset{\cdot}{=} b \quad \text{équivalent à} \quad a \underset{\cdot}{\subset} b \quad \text{et} \quad b \underset{\cdot}{\subset} a.$$

$\doteq$ sera appelée *isotopie*; si $a \not\doteq b$, on dira qu'ils forment un système de Klein Barmen (par exemple ba et $aba : ba.aba = ba$; $aba.ba = aba$). L'isotopie est *symétrique, transitive, presque complètement réflexive* (*croisée*). Si les a_i sont tels que $a_i \dot{\subset} a_{i+1}$ et $a_n \dot{\subset} a_0$, ils sont isotopes (et de même en changeant les symboles en leurs opposés).

L'isotopie détermine une partition en classes. On écrira

$$x \in |\dot{a}| \quad \text{équivalent à} \quad a \doteq x; \qquad x \in |\underset{\cdot}{a}| \quad \text{équivalent à} \quad a \underset{\cdot}{=} x.$$

1° Tout être appartient au moins à une classe de chaque espèce.

2° Les classes de même espèce sont deux à deux exclusives :

Si $$x \in |\dot{a}| \quad \text{et} \quad x \in |\dot{b}|, \quad \text{alors} \quad a = ax \quad \text{et} \quad x = xb,$$

d'où

$$ab = axb = ax = a,$$

donc

$$a \in |\dot{b}| \quad \text{et} \quad b \in |\dot{a}|, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\dot{a}| = |\dot{b}|.$$

On a encore les propriétés suivantes :

1° $$|\dot{a}| \cap |\underset{\cdot}{a}| = a.$$

2° Si $$a \doteq a' \quad \text{et} \quad b \underset{\cdot}{=} b', \quad \text{alors} \quad ab \doteq a'b' \quad \text{et} \quad ba \underset{\cdot}{=} b'a'.$$

3° Si $$a \doteq a' \quad \text{et} \quad a \dot{\subset} b, \quad \text{alors} \quad a' \dot{\subset} b;$$
$$a = a' \quad \text{et} \quad a \underset{\cdot}{\subset} b, \quad \text{alors} \quad a' \underset{\cdot}{\subset} b.$$

L'axiome CJ. — Pour aller plus loin, il faut introduire un axiome supplémentaire permettant de composer ces classes :

$$\text{Axiome } \overline{\text{CJ}}, \quad \text{pour tout } a \text{ et } b, \quad aba = ab;$$
$$\text{Axiome } \underline{\text{CJ}}, \quad \text{pour tout } a \text{ et } b, \quad aba = ba.$$

On se limitera désormais au cas de $\overline{\text{CJ}}$ qui entraîne :

1° Si $a \underset{\cdot}{\subset} b$, alors $a \dot{\subset} b$, donc $a \underset{\cdot}{\subset} b$ équivalent à $a \subset b$;

2° Tout a, b : $$ab \doteq ba,$$

d'où le résultat essentiel :

si $$a \doteq a' \quad \text{et} \quad b \doteq b', \quad \text{alors} \quad a'b' \in |\dot{ab}| \quad \text{et} \quad b'a' \in |\dot{ab}|$$

($|ab|$ peut comprendre d'autres êtres que les $a'b'$ et les $b'a'$). Il en découle que le système des classes a même structure qu'un *treillis commutatif*.

3° Les treillis CJ de base finie sont finis;

4° Pour tout *monome* B si $a \doteq a'$, alors $aBa' = aB$.

Il est maintenant possible d'introduire une deuxième opération « + », duale de la première et jouissant des propriétés habituelles, à condition de faire des hypothèses supplémentaires. Par exemple :

1° On distingue un être dans chaque classe et l'on convient que $a+b$ désigne l'être distingué de la classe correspondant à l'être $a+b$ du treillis commutatif associé.

2° S'il existe un isomorphisme entre chaque classe et un système de Klein-Barmen *fixe*, la structure est une *structure produit* (par exemple les domaines convexes orientés) et + compose les classes comme précédemment; à l'intérieur d'une même classe, + opérant suivant la loi du système de Klein-Barmen. Au contraire de la précédente, cette convention est compatible avec toutes les lois universelles (cf. *infra*) de distributivité au sens large. Toute loi de ce type y implique son opposée (par exemple la distributivité à droite y implique la distributivité à gauche). D'autres conventions sont encore possibles.

Hiérarchisation des lois commutatives. — On appellera *loi universelle* une loi algébrique s'exprimant sous la forme de l'*égalité* de deux (ou plusieurs) monomes pour *toutes* valeurs des variables.

La loi la plus forte est la loi commutative : $ab = ba$ équivalente (entre autres) à la composition de $\overline{\mathrm{CJ}}$ et $\underline{\mathrm{CJ}}$. Il est facile de voir que cette loi est *immédiatement plus forte* que les deux lois CJ et que ce sont là les trois seules lois universelles à deux êtres : en effet la loi $aba = a$ n'est pas compatible avec l'existence de Ω.

Comme aba et ba sont isotopes et ne sont égaux que si $\underline{\mathrm{CJ}}$ est vérifiée, on peut montrer que toute loi universelle à plus de deux êtres est *simultanément plus faible* que $\overline{\mathrm{CJ}}$ et $\underline{\mathrm{CJ}}$ et par conséquent *plus faible* que CM définie par : pour tout a, b, c :

$$abaca = abca; \qquad abacb = abcb; \qquad acbab = acab.$$

Tout treillis CM de base finie est fini (la première des trois relations est d'ailleurs suffisante pour cela). Si la base est constituée par trois êtres, la *longueur* maxima des monomes est 5.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Système général de coordonnées dans un espace séparable de Hilbert-Hermite.* Note de M. **Otton Martin Nikodym**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

1. Reprenons les notions et la terminologie de deux Notes précédentes [1]. Soient x un espace séparable, (L) une classe ordonnée et fermée engendrant une

[1] *Comptes rendus*, 224, 1947, pp. 322 et 628.