ordonné *produit restreint* des ensembles ordonnés E_1 et E_2, Ω désignant l'ordre produit de Ω_1 et Ω_2.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties non vides X de E^* telles que

$$X = \overset{1}{\Omega^*}(X) \quad (^3)$$

$$(x, y_i) \in X \quad \text{quel que soit } i \in I \quad \text{et} \quad \bigvee_{i \in I} y_i \text{ existe} \to \Big(x, \bigvee_{i \in I} y_i\Big) \in X$$

$$(x_j, y) \in X \quad \text{quel que soit } j \in J \quad \text{et} \quad \bigvee_{j \in J} x_j \text{ existe} \to \Big(\bigvee_{j \in J} x_j, y\Big) \in X.$$

La relation d'ordre produit restreint Ω^* peut être immergée dans la relation d'inclusion $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Nous appellerons ce prolongement de Ω^* l'*ordre produit tensoriel* (restreint) de Ω_1 et Ω_2.

On démontre alors que, lorsqu'on suppose que Ω_1 et Ω_2 sont des relations d'ordre latticiel complet, le quotient de Ω^* par les lois distributives redonne la définition du produit tensoriel de deux lattices complètes étendu au cas infini telle qu'elle a été énoncée dans les Notes citées en (1).

ALGÈBRE. — *Sur certaines applications remarquables des treillis dans eux-mêmes*. Note (*) de M. **Marcel-Paul Schützenberger**, présentée par M. Gaston Julia.

Étant donné un treillis quelconque complet $\mathcal{L}$, on appellera *S-application croissante* une application s de $\mathcal{L}$ dans lui-même telle que :

I. Pour tout x, $x \leqq s(x)$.

II. Pour tout x et y, si $x \leqq y$, alors, $s(x) \leqq s(y)$.

III. Pour tout x et y, $s(x)s(y) = s(xy)$; de I et III on déduit sans peine :

III'. Pour tout x et y, $s(x) + s(y) \leqq s(x+y)$.

Manifestement, les itérées s^n de s sont aussi des S-applications. D'après III, si u et u' sont tels que $x \leqq s(u)$ et $x \leqq s(u')$, alors, $x \leqq s(uu')$, donc, $\mathcal{L}$ étant complet, l'intersection $t(x)$ de tous les u tels que $x \leqq s(u)$ définit une application t de $\mathcal{L}$ dans lui-même telle que, $ts(x) \leqq x \leqq st(x)$ et l'on montre que :

$\bar{\text{I}}$. Pour tout x, $t(x) \leqq x$.

$\bar{\text{II}}$. Pour tout x et y, si $x \leqq y$, alors $t(x) \leqq t(y)$, car

$$x \leqq xy \leqq st(x)\, st(y) = s[t(x)\, t(y)],$$

donc $t(x) \leqq t(x)\, t(y)$, donc $\bar{\text{II}}$.

---

(3) En posant $\Omega[X] = \bigcap_{x \in X} \Omega(x)$, $\Omega(X) = \bigcup_{x \in X} \Omega(x)$.

(*) Séance du 3 novembre 1948.

$\overline{\mathrm{III}}$. Pour tout x et y, $t(x)+t(y)=t(x+y)$, car, d'après III′,

$$x+y \leqq st(x)+st(y) \leqq s[t(x)+t(y)],$$

donc $t(x+y) \leqq t(x)+t(y)$, mais, d'après $\overline{\mathrm{II}}$, $t(x) \leqq t(x+y)$ et $t(y) \leqq t(x+y)$, donc $\overline{\mathrm{III}}$, t sera appelée S-*application décroissante adverse* de s et l'on montre que :

$\overline{\mathrm{III}}'$. Pour tout x et y, $t(xy) \leqq t(x)t(y)$.

IV et $\overline{\mathrm{IV}}$. Pour tout x, $s^n t^n s^n(x)=s^n(x)$, $t^n s^n t^n(x)=t^n(x)$, car $u \leqq s^n t^n(u)$ et $t^n s^n(x) \leqq x$.

Par leur composition, une S-application s de $\mathcal{L}$ et son adverse t engendrent un *monoïde associatif* $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}, \mathcal{L})$ et, d'après IV et $\overline{\mathrm{IV}}$, on montre qu'il existe une représentation de tout élément de $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}, \mathcal{L})$ par $s^{\alpha_1}t^{\beta_1}s^{\alpha_2}t^{\beta_2}\ldots s^{\alpha_i}t^{\beta_i}s^{\alpha_{i+1}}\ldots s^{\alpha_j}t^{\beta_j}$, où la suite α_1, $\beta_1\,\alpha_2\ldots\alpha_i$, β_i, $\alpha_{i+1}\ldots\alpha_j\beta_j$ est *unimodale*, c'est-à-dire telle que, pour un certain i,

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \leqq \beta_1 \leqq \alpha_2, \leqq \ldots \leqq \alpha_i \leqq \beta_i\\ &\beta_j \leqq \alpha_j \leqq \beta_{j-1} \leqq \ldots \qquad \leqq \alpha_{i+1}.\end{aligned}$$

A toute S-application on peut associer une *S-relation*, écrite $<$ et définie par : $x<y$ équivalent à $x \leqq y \leqq s(x)$; équivalent à $t(y) \leqq x \leqq y$.

On montre que :

5. Pour tout x, y et z, si $x<y$, alors $x+z<y+z$ et $xz<yz$ car, d'après II, $s(x) \leqq s(x+y)$, donc si $x \leqq y \leqq s(x)$, alors $x+z \leqq x+y+z \leqq s(x+z)$.

Réciproquement, étant donnée une relation $<$ satisfaisant à :

1. Pour tout x, $x<x$.
2. Pour tout x et y, si $x<y$, alors $x \leqq y$.
31. Pour tout x, y et z si $x \leqq y \leqq z$ et $x<z$, alors $x<y$.
32. Pour tout x, y et z si $x \leqq y \leqq z$ et $y<z$, alors $y<z$.

Cette relation définit deux applications adverses l'une de l'autre et en outre :

4. Pour tout x, y et z, si $x<y$ et $x<z$, alors $x<y+z$.
4. Pour tout x, y et z, si $y<x$ et $z<x$, alors $yz<x$.

Et ces applications satisfont à III et $\overline{\mathrm{III}}$ si l'une des deux conditions 5 est satisfaite.

Pour un treillis $\mathcal{L}$, l'ensemble des S-applications (ou des S-relations), ordonné par la relation :

S $\prec$ S′, équivalent à : pour tout x, $s(x) \leqq s'(x)$;

Équivalent à : pour tout x, $t'(x) \leqq t(x)$;

Équivalent à : pour tout x et y, si $xy <$ alors $x<y'$ constituent un *treillis* $\mathfrak{G}(\mathcal{L})$ dont le plus petit élément S_0 est : $t_0(x)=s_0(x)=x$; $x<y$ équivalent à $x=y$.

Et le plus grand élément S_1 est : $s_1(x)=1$, $t_1(x)=0$; $x<y$ équivalent à $x \leqq y$.

On désignera par σ et τ la plus petite S-application telle que pour tout x et y : si $x<y$, alors $x<(x+z)\sigma(x)$.

Si $\mathcal{L}$ est modulaire, Σ correspond à la relation : $x < y$ équivalent : à $x|y$ est complémenté et le treillis quotient $S_0|\Sigma$ est un treillis distributif complémenté de puissance 2^N où N est le nombre de paramètres indépendants dont on dispose pour normer $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ est non seulement modulaire mais distributif, $\mathfrak{T}(\mathcal{L})$ est aussi distributif. Enfin, si $\mathcal{L}$ est complémenté, $\mathfrak{T}(\mathcal{L})$ est isomorphe à $\mathcal{L}$.

ALGÈBRE. — *Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices.* Note de M. **Jean-Marie Souriau**, présentée par M. Jean Chazy.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Nous désignerons par $T(A)$ la trace de cette matrice (c'est-à-dire la somme des éléments de la diagonale principale), et par

$$P(x) = x^n + k_1 x^{n-1} + \ldots + k_n$$

le polynome caractéristique de cette matrice.

Définissons comme suit les matrices B_i :

$$B_0 = 1 \text{ (matrice unité d'ordre } n),$$
$$B_1 = A - T(A),$$
$$B_2 = AB_1 - \frac{1}{2}T(AB_1),$$
$$B_3 = AB_2 - \frac{1}{3}T(AB_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_n = AB_{n-1} - \frac{1}{n}T(AB_{n-1}).$$

Nous avons démontré les résultats suivants :

1° Les quantités $-T(A)$, $-(1/2)T(AB_1)$, …, $-(1/n)T(AB_{n-1})$ sont les coefficients $k_1, k_2, \ldots, k_n$ du polynome caractéristique. En particulier, le *déterminant* de A vaut $[(-1)^{n-1}/n]\,T(AB_{n-1})$.

2° La matrice B_n est nulle, la matrice $(-1)^{n-1} B_{n-1}$ est la transposée de la *matrice adjointe* de A, et, si A possède une *inverse*, on a

$$A^{-1} = -\frac{1}{k_n} B_{n-1}.$$

3° En posant

$$Q(x) = x^{n-1}B_0 + x^{n-2}B_1 + \ldots + B_{n-1},$$

on a

$$[x - A]\,Q(x) = P(x),$$
$$T\big(Q(x)\big) = P'(x),$$

et, si x_i est une racine simple de $P(x)$, la matrice $Q(x_i)$, qui n'est pas nulle, est le *covariant de Frobenius* attaché à la valeur propre x_i (c'est-à-dire le produit du mode à droite et du mode à gauche correspondants).