ALGÈBRE. — *Sur l'extension des théorèmes de dualité aux treillis distributifs non complémentés.* Note (*) de M. **Marcel-Paul Schützenberger**, présentée par M. Gaston Julia.

Deux S-applications adverses $x^1=\sigma(x)=$ réunion des y tel que $x|y$ soit complémenté et $x_1=\tau(x)=$ intersection des y tels que $y|x$ soit complémenté ont été définies dans une Note antérieure ([1]) pour les treillis modulaires quelconques.

On se restreindra ici aux *treillis distributifs* tels que pour tout $x<y$, il existe au moins un z et un t tels que $x<z\leqq y$ et $x\leqq t<y$ et que $x|z$ et $t|y$ soient complémentés. Cette condition, vérifiée notamment pour les treillis finis, équivaut à

$$(x+y)x^1=x, \text{ équivalent à } y\leqq x \qquad \text{et} \qquad xy+x_1=x, \text{ équivalent à } x\leqq y.$$

Pour tout x on appellera *complémentaire relatif inférieur* et l'on désignera par $\underline{x}$, tout élément y tels que $xy=x_1$ et $x+y=y^1$ et *complémentaire relatif supérieur* $\bar{x}$, tout y tel que $x+y=x^1$ et $xy=y_1$.

Si le treillis est lui-même complémenté, $x^1=1$ et $x_1=0$ pour tout x, et $\underline{x}$ et $\bar{x}$ se confondent avec le complémentaire absolu de x au sens habituel.

Théorème 1. — *Si y et z sont des $\underline{x}$, alors, $y=z$ car*

$$(y+z)y^1=y+zy^1=y+z(x+y)=y+x_1+zy=y,$$

d'où, d'après ([1]), $z\leqq y$ et, de même, $y\leqq z$, donc $y=z$.

Théorème 2. — *Pour tout x et tout z, $xz\leqq\underline{x}$ est équivalent à $z\leqq\underline{x}$ (même raisonnement).*

Théorème 3. — *La réunion y des z tels que $zx\leqq x_1$ est un $\underline{x}$.*

Évidemment, $yx=x_1$; d'autre part, si $y+x\neq y^1$, il existe un complément absolu u de $y+x$ dans le treillis complémenté $y|y^1$; c'est-à-dire que $y^1=y+x+u$, avec $(y+x)u=y$; d'où $yu+xu=y$; donc $xu\leqq y$, donc $xu\leqq yx=x_1$, donc, par hypothèse, $u\leqq y$, soit $x+y=y^1$.

(*) Séance du 15 novembre 1948.

([1]) *Comptes rendus*, **227**, 1948, p. 1008.

Les applications $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow x$ sont donc des *applications partout définies* et l'on a

$$\overline{(\underline{x})} = x, \qquad (\underline{\overline{x}}) = x, \qquad \text{mais en général} \quad \overline{(\overline{x})} \neq (\underline{\underline{x}}) \neq x.$$

Théorème 4. — *Si* $u + v = x$, *alors* $\underline{u}\,\underline{v} \underline{\leq} x$. *En effet* $u_1 + v_1 = x_1$ *d'où*

$$u\,\underline{u}\,\underline{v} + v\,\underline{u}\,\underline{v} = x\,\underline{u}\,\underline{v} \qquad \text{et} \qquad u\,\underline{u}\,\underline{v} + v\,\underline{u}\,\underline{u} = x\,x\,\underline{u}\,\underline{v}$$

d'où $x\underline{u}\,\underline{v} = x\underline{x}\,\underline{u}\,\underline{v}$, *d'où* (*d'après le théorème* 2) $\underline{u}\,\underline{v} \underline{\leq} \underline{x}$; *de même, si* $uv = x$, *alors* $\overline{x} \underline{\leq} \overline{u} + \overline{v}$.

Théorème 5. — *Si x est un élément $+$ irréductible $\overline{g}_i$, $\underline{x}$ est un élément $\times$ irréductible* $\underline{g}_i$ et réciproquement. *Car $x_1 | x$ est isormophe à $\underline{x} | \underline{x}'$.*

Théorème 6. — *Si x est un élément $+$ irréductible $\overline{g}_i$; x et $\underline{x}$* clivent strictement *le treillis* (*c'est-à-dire que pour tout y, ou bien $x \underline{\leq} y$, ou bien $y \underline{\leq} x$* (*immédiat d'après le théorème* 2).

Théorème 7. — *Si $x = \Sigma \overline{g}_i$ est une représentation* minimale *de x comme réunion d'éléments $+$ irréductibles, alors $\underline{x} = \Pi \underline{g}_i$ et réciproquement* (*extension des formules de Morgan*) (*immédiat d'après le théorème précédent*).

Théorème 8. — *Si $x < y$ sont des éléments $+$ irréductibles. alors $\underline{x} < \underline{y}$.*

Car d'après le théorème 6, $y \underline{\leq} \underline{x}$, ou $\underline{x} \underline{\leq} \underline{y}$, mais, $y \underline{\leq} \underline{x}$ entraînerait $x \underline{\leq} \underline{x}$, ce qui est impossible pour $x \neq 0$.

De ce résultat, on déduit sans peine :

Théorème 9. — *Tout treillis distributif fini $\mathcal{L}$ est défini biunivoquement par la donnée de l'*ensemble partiellement ordonné *$\mathcal{J}^+(\mathcal{L})$ obtenu en* restreignant *la structure aux éléments $+$ irréductibles et $\mathcal{J}^+(\mathcal{L})$ est isomorphe à $\mathcal{J}^\times(\mathcal{L})$ défini de la même manière sur les éléments $\times$ irréductibles.*

Théorème 10. — *Pour tout n entier, le nombre N_n^+ des éléments de $\mathcal{L}$* précédés immédiatement *par n éléments est égal au nombre $N_n^\times$* des éléments de $\mathcal{L}$ suivis immédiatement *de n éléments* (*car $x_1 | x$ est isomorphe à $\underline{x} | \underline{x}'$*).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 228, p. 33-35, séance du 3 janvier 1949.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
131496-49 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.