CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Une généralisation de la notion de valuation pour les treillis quelconques et son application aux distributions de la statistique quantique.* Note de M. **Marcel-Paul Schützenberger**, présentée par par M. Émile Borel.

Dans une précédente Note [1] j'ai défini une classe d'expressions (contenant en particulier les informations au sens de Fisher et au sens de Wiener) comme les solutions continues homogènes et de degré 1 de l'équation

$$\text{(1)}\qquad K(x, y+z)+K(y, z)=K(y, z+x)+K(z, x)=K(z, x+y)+K(x, y),$$

où x, y et z sont les probabilités relatives à trois sous-ensembles disjoints de l'ensemble des valeurs d'une variable aléatoire.

$K(x, y)$ est le gain d'information attaché à la distinction des deux sous-ensembles X et Y à l'intérieur de $X \cup Y$. L'équation (1) exprime le fait que la somme des gains attachés à une suite admissible de semblables opérations ne dépend que de la partition résultante et qu'elle est donc une fonction $|\varpi|$ des éléments ϖ du treillis $\mathcal{M}$ des relations d'équivalence de l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire considérée. Réciproquement, la possibilité d'une semblable définition implique pour toute fonction $|\varpi|$ des éléments de $\mathcal{M}$ des propriétés qui en font une généralisation naturelle de la notion de valuation et qui permettent en outre de résoudre simplement (1).

Définition d'une valuation généralisée. — Soit un treillis T d'éléments $a, b, \ldots$. Nous dirons que l'application $x \rightarrow |x|$ des éléments de T dans un anneau commutatif $\mathcal{A}$ est une valuation généralisée si :

(2) Pour tout a et b :

$[a\cap b, a\cup b]$ isomorphe à $[a\cap b, a]\times[a\cap b, b]$ entraîne $|a\cap b|+|a\cup b|=|a|+|b|$

Cette condition, plus faible que la condition classique, s'y réduit cependant pour les treillis distributifs. L'existence d'une valuation généralisée non triviale n'entraîne pas nécessairement la modularité de T. Par exemple si T est le matroïde des relations d'équivalence d'un ensemble fini E, toute valuation géné-

---

[1] *Comptes rendus*, 232, 1951, p. 925.

ralisée de la relation ϖ de E formée des sous-ensembles disjoints $X_1, X_2, \ldots, X_i$ est de la forme

$$(3) \qquad |\varpi| = f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_i) + f(E),$$

où f est une application dans $\mathcal{A}$ des parties de E.

Réciproquement on montrerait que (2) entraîne (1) puisqu'il permet de définir

$$K(x_i, x_j) = |(X_1)(X_2)\ldots(X_i)(X_j)| - |(X_1)(X_2)\ldots(X_i \cup X_j)|.$$

Les f étant arbitraires et K satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles $\partial^3 K(x, y)/\partial^2 x \partial y = \partial^3 K(x, y)/\partial x \partial^2 y$, on voit l'analogie qui existe entre les valuations généralisées d'un matroïde de relations d'équivalence et les valuations classiques du treillis distributif que définit sur l'espace-temps la théorie de la relativité [*cf.* G. Birkhoff (2)].

Application aux distributions des statistiques quantiques. — Posons $P\begin{Bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_i \\ n_1, n_2, \ldots, n_i \end{Bmatrix}$ = probabilité conditionnelle de trouver respectivement n_1, $n_2, \ldots, n_i$ particules dans les domaines $1, 2, \ldots, i$ de mesure $g_1, g_2, \ldots, g_i$ quand sont déjà fixés $N = \Sigma n_i$ et $G = \Sigma g_i$.

D'après l'axiome des probabilités composées :

$$P\begin{Bmatrix} g_i, g_j + g_k \\ n_i, n_j + n_k \end{Bmatrix} P\begin{Bmatrix} g_j, g_k \\ n_j, n_k \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} g_j, g_k + g_i \\ n_j, n_k + n_i \end{Bmatrix} P\begin{Bmatrix} g_k, g_i \\ n_k, n_i \end{Bmatrix}.$$

Donc Log P satisfaisant à (1) se déduit d'une valuation du matroïde des partitions de N. $P\begin{Bmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_i \\ n_1, n_2, \ldots, n_i \end{Bmatrix}$ est donc de la forme $\Pi f(g_i, n_i)/f(G, N)$ D'autre part, d'après l'axiome des probabilités totales,

$$P\begin{Bmatrix} g_i, g_j + g_k \\ n_i, n_j + n_k \end{Bmatrix} = \sum_{a=0}^{n_j+n_k} P\begin{Bmatrix} g_i, g_j, g_k \\ n_i, a, n_j + n_k = a \end{Bmatrix}.$$

C'est-à-dire pour tout g_i, g_j, g_k :

$$f(g_i, n_i) f(g_i + g_k, n_j + n_k) = \sum_{a=0}^{n_j+n_k} f(g_i, n_i) f(g_j, a) f(g_k, n_j + n_k - a).$$

Soit maintenant $f(u)$ une densité de probabilité et $\psi(v)$ sa deuxième caractéristique. Écrivons $f^{\star g}(u)$ pour la densité de probabilité dont la deuxième caractéristique est $g\psi(v)$. Les équations précédentes montrent que pour toute distribution

$$P\begin{Bmatrix} g_1, g_2, g_3, \ldots, g_i \\ n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i \end{Bmatrix} = \frac{\Pi f^{\star g_i}(n_i)}{f^{\star G}(N)}.$$

---

(2) *Lattice theory*, New-York, 1948, p. 150-151.

Il est intéressant de remarquer que si l'on admet que les raisonnements ci-dessus s'appliquent aux probabilités $\overline{\mathrm{P}}\left\{\begin{matrix} g_1, g_2, \ldots, g_i \\ n_1, n_2, \ldots, n_i \end{matrix}\right\}$ pour que les particules $1, 2, \ldots, n_1, n_1+1, n_1+2, \ldots, n_{i+k}, \ldots, \mathrm{N}$ occupent des domaines de mesures respectives $g_1, g_2, \ldots, g_i$, on doit avoir une expression analogue pour les $\overline{\mathrm{P}}$. On constate qu'il en est bien ainsi pour les trois statistiques habituelles avec g variant continûment pour la statistique de Boltzmann et par valeurs entières pour les deux autres. En général, $\mathrm{P} \neq \overline{\mathrm{P}}$.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **232**, p. 1805-1807, séance du 16 mai 1951.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
140075-51 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.