ALGÈBRE. — *Construction du treillis modulaire engendré par deux éléments et une chaîne finie discrète* [1]. Note de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Émile Borel.

Soient y et z les deux éléments et $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_n \leq x_\infty = x_{n+1}$ la chaîne que l'on a complétée par $x_0 = x_1 yz$ et $x_\infty = x_n + y + z$.

On appellera « éléments P » les éléments de l'une des formes suivantes :

$$x_i; \quad X_{ij} = x_i(yx_j + zx_j); \quad Y_{ij} = x_j y(x_i + z); \quad Z_{ij} = x_j z(x_i + z)$$

(avec $i \leq j$) et « éléments $\overline{P}$ » les sommes d'éléments P. On définira de même les éléments $P^\star$ et $\overline{P}^\star$ par dualité en permettant les signes + et

Par calcul direct on peut établir les relations suivantes :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} X_{ij} \leq X_{kl} \rightleftarrows i \leq k \quad \text{et} \quad j \leq l, \\ Y_{ij} \leq Y_{kl} \rightleftarrows i \leq k \quad \text{et} \quad j \leq l, \\ Y_{ij} \leq X_{kl} \rightleftarrows j \leq k; \end{cases}$$

$$(1.2) \qquad \begin{cases} X_{ij} \leq X^\star_{kl} \rightleftarrows i \leq l, \\ Y_{ij} \leq y \leq Y^\star_{kl} \quad (\text{tout } i,\ j,\ k \text{ et } l), \\ Y_{ij} \leq X^\star_{kl} \quad (i \leq k \text{ ou } j \leq l), \\ X_{ij} \leq Y^\star_{kl} \quad (i \leq k \text{ ou } j \leq l); \end{cases}$$

$$(1.3) \qquad \text{Tout } i \text{ et } j \quad X_{ij} + Y_{ij} = Y_{ij} + Z_{ij} = Z_{ij} + X_{ij}.$$

A toute somme S d'éléments P on associe le produit $S^\star$ de tous les $P^\star$ plus grands (d'après 1.2) que chacun des constituants de S.

Il est facile de voir que ceci établit une correspondance de Galois entre $\overline{P}$ et $\overline{P}^\star$ où les « fermés » sont les expressions maximales eu égard aux lois d'absorption et aux relations 1.1 et 1.3.

On aura établi que le treillis ne peut contenir aucun élément irréductible non trivial en dehors de P et $P^\star$ lorsqu'on aura prouvé que tout élément de $\overline{P}^\star$ est un $\overline{P}$ (ou dualement). Or puisque par définition même $P^\star \in \overline{P}$ il suffira par récurrence de montrer que $U^\star S \in \overline{P}$ pour tout $U^\star \in P^\star$ et $S \in \overline{P}$. La démonstration complète exigeant la considération de nombreux cas particuliers, on se bornera à en indiquer le principe. Soit $U^\star = A^\star_{ij}$; $S = B_{kl} + C_{k'l'} + S'$ où l est le plus grand des indices intervenant dans S et l' l'indice immédiatement inférieur.

(1) Problème 29 de G. Birkhoff, *Lattice Theory*, p. 70.

Le seul cas intéressant est celui où l, $l' > j$ et k, $k' > i$. Il existe alors un $D^{\star}_{il'}$ plus grand que $A^{\star}_{ij}$ et que $C_{k'l'} + S$ (d'après 1.1 et 1,2) et l'on peut écrire

$$A^{\star}_{ij} S = A^{\star}_{ij} D^{\star}_{il'} S = A^{\star}_{ij}(D^{\star}_{il'} B_{kl} + C_{k'l'} + S').$$

Un calcul direct montre alors que $D^{\star}_{il'} B_{kl} \in \overline{P}$ et $D^{\star}_{il'} B_{kl} < B_{kl}$, ce qui permet (moyennant les relations 1.3) de réduire effectivement l'expression à une somme $\overline{P}$.

On a montré ailleurs [(2) et (3)] que la loi $\mathfrak{U}$: pour tout a, b, c, d et e :

$$a(b + c(d + e)) = a(b + cd) + a(b + ce) + ac(d + e) + ad(be + c) + ae(bd + c)$$

est l'élément maximal des lois non distributives plus fortes que la loi modulaire et l'on sait que dans tout treillis T satisfaisant à $\mathfrak{U}$:

1° les seuls irréductibles sont de la forme $\alpha(\beta\gamma + \beta\delta)$, où les α, β, γ, δ sont des monomes disjoints en les générateurs;

2° T est l'union subdirecte d'un treillis distributif et de treillis modulaires M_5 non distributifs à 5 éléments.

Puisque le treillis modulaire $\mathcal{L}$ libre engendré par une chaîne et deux éléments n'admet pas d'autres irréductibles que le $\mathfrak{U}$-treillis correspondant, $\mathcal{L}$ satisfait à $\mathfrak{U}$ et est l'union subdirecte de M_5 et d'un treillis distributif.

Il est alors possible de calculer les classes d'intervalles minimaux projectivement équivalents dont la forme canonique est

$$(X_{i-1,j} + X_{i,j-1} \mid X_{ij}).$$

Si la chaîne contient n éléments (x_0 et x_∞ n'étant pas comptés), il existe donc $n(n+1)/2$ treillis M_5 indépendants dans le treillis $\mathcal{L}$ et une condition nécessaire et suffisante pour que le treillis soit distributif sera :

$$(x_1 + y)(x_n + z)(y + z) = x_1 z + x_n y + yz.$$

On notera enfin l'équivalence projective pour tout $x < x'$, y et z des deux intervalles :

$$[x(x'y + x'z) \mid x(y + z)] \qquad \text{et} \qquad [x' + yz \mid x' + (x + y)(x + z)].$$

---

(2) *Comptes rendus*, **218**, 1944, p. 818.
(3) *Comptes rendus*, **220**, 1945, p. 218.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 235, p. 926-928, séance du 27 octobre 1952.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
142966-52 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.