ALGÈBRE. — *Le problème des mots dans les treillis modulaires libres*. Note de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Gaston Julia.

Les seuls treillis pour lesquels soit connue la solution du problème des mots sont : le treillis libre $\mathfrak{T}$ (1) et les treillis distributifs (2) auxquels peut être ajouté le $\mathfrak{U}$-treillis libre (3) union subdirecte de treillis distributifs et de M_5 puisque l'on connaît la forme canonique de ses éléments irréductibles.

On indiquera ici les grandes lignes de la théorie correspondante pour les treillis modulaires libres $\mathcal{M}$ (4).

Définitions :

E : un ensemble d'éléments e_i (les « générateurs »);

$\mathcal{A} \supset$ E : le système algébrique libre constitué par toutes les expressions finies formées par récurrence à partir des e_i au moyen de deux opérations (notées ici $+$ et $\times$ avec les conventions habituelles d'omission du signe $\times$, la congruence dans $\mathcal{A}$ étant écrite $=$) *commutatives* et *associatives*;

$\mathcal{N}$: le quotient de $\mathcal{A}$ par $\{\equiv\} = \{\rho, \rho^{-1}\}$ (5) avec ρ définie par

$$(A + B)(C + AD)\ \rho\ (A + B)C + AD \qquad (A, B, C, D \in \mathcal{A} \text{ et } C \neq \text{mot vide});$$

$\mathfrak{T}$ (le *treillis libre* engendré par E) : le quotient de $\mathcal{A}$ par $\{\simeq\} = \{\sigma, \sigma^{-1}, \check{\sigma}, \check{\sigma}^{-1}\}$, avec σ définie par $(A + B)C\ \sigma\ A\ (A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}$ ou vide);

$\mathcal{M}$ (le *treillis modulaire libre* engendré par E) : le quotient de $\mathcal{A}$ par $\{\equiv, \simeq\}$;

$|X|$ (la « formule » de $X \in \mathcal{A}$) : le vecteur dont les composants ξ_+, $\xi_\times$, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_i, ... sont respectivement le nombre de fois où les deux opérations et les e_i apparaissent dans l'expression X.

---

(1) P. Whitman, *Ann. Math.*, 42, 1941, p. 325-330 et 43, 1942, p. 104-105.

(2) G. Birkhoff, *Lattice Theory*, New-York, 1948, p. 145.

(3) M. P. Schützenberger, *Comptes rendus*, 221, 1945, p. 218.

(4) C'est le problème 28 de G. Birkhoff (*loc. cit.* p. 70).

(5) J. Riguet, *Bull. Soc. Math.*, 76, 1948, p. 122.

On écrira $\{\lambda, \mu, \ldots\}$ pour désigner la fermeture algébrique de la fermeture d'équivalence de la réunion des relations λ, μ, ... Le diacritique $\check{}$ symbolisera la dualité canonique échangeant entre elles les deux opérations.

Les formules seront ordonnées par $|X| \leqq |X'|$ équivalent à : tout i : $\xi_i \leqq \xi'_i$.

$\mathfrak{T}^\star \subset \mathfrak{T}$: l'ensemble des expressions *semi réduites*, c'est-à-dire telles que $X' \simeq X \in \mathfrak{T}^\star$ entraîne $|X| \leqq |X'|$;

$\mathfrak{M}^\star \subset \mathfrak{T}^\star$: l'ensemble des expressions *réduites*, c'est-à-dire telles que $Y \simeq X' \equiv X \in \mathfrak{M}^\star$ entraîne $|X| \leqq |Y|$.

On sait que $\mathfrak{T}$ est isomorphe à $\mathfrak{T}^\star$ et $\mathfrak{M}$ à une image $\overline{\mathfrak{M}}^\star$ de $\mathfrak{M}^\star$.

La démonstration repose sur les remarques suivantes :

1° Quand les relations telles que ρ et σ ne sont pas permutables ([6]), les expressions figurant dans l'énoncé où elles interviennent peuvent être mises sous une forme canonique.

2° La formule d'une expression ne peut pas s'accroître par application de ρ ou de σ.

Lemme I. — *Si* $X \equiv X'$ *alors* $|X| = |X'|$ *et* $X \in \mathfrak{T}^\star$ *entraîne* $X' \in \mathfrak{T}^\star$ (*on peut se limiter à vérifier le résultat pour* ρ).

Lemme II. — *Si* $X \equiv X' \simeq YX'$ *où* $Y \not\simeq X$ et X', *alors* $X \simeq YX''$ (*on peut se limiter à* $X \rho X' \sigma YX'$).

Lemme III. — *Si* $X \sigma^{-1} Y \rho Z \rho Z'$ *il existe* Y' *et* X' *avec* $Z' \rho Y' \sigma X'$ *et* $|X| = |X'|$.

Le seul cas non trivial est celui où la relation précédente (notée θ) entre X et X' se réduit à celle entre

$$X = U(V + (U + U')V') \qquad \text{et} \qquad X' = U((U + U')V + V').$$

Par conséquent θ et $\breve{\theta}$ qui sont strictement plus faibles que ρ et ρ^{-1} laissent comme elles les formules invariantes. D'autre part

$$\{\rho, \breve{\rho}, \sigma, \breve{\sigma}, \sigma^{-1}, \breve{\sigma}^{-1}\} = \{\theta, \breve{\theta}, \rho, \rho^{-1}, \sigma\, \breve{\sigma}\}.$$

Donc :

Lemme IV. — *Si* $X \simeq Y \equiv Y'$ *il existe* $X' \simeq Y'$ *avec* $|X| = |X'|$. D'où enfin :

Théorème. — $\mathfrak{M}^\star$ *est le quotient de* $\mathfrak{T}^\star$ *par* $\{\theta, \breve{\theta}, \rho, \rho^{-1}, \sigma, \breve{\sigma}\}$.

Corollaire 1. — *Si deux expressions de* $\mathfrak{A}$ *ont des formules finies, il est possible en un nombre fini d'opérations de les ramener à une forme réduite et de déterminer si elles sont ou non modulairement équivalentes.*

Corollaire 2. — *Une condition nécessaire (mais non suffisante si la puissance de* E *dépasse* 3) *pour que deux expressions réduites soient modulairement équivalentes est qu'elles aient même formule.*

([6]) P. Dubreil et M. Dubreil-Jacotin, *J. Math. pures et appl.*, 18, 1939, p. 63.

On remarquera que cette dernière propriété n'est plus vraie dans le treillis modulaire $\mathcal{M}'$ quotient de $\mathcal{M}$ par les identités latticielles vérifiées dans tous les treillis de sous-groupes distingués ([3]).

Nous pouvons cependant annoncer qu'elle subsiste dans le cas où tous les éléments du groupe sont d'ordre 2.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. **237**, p. 507-508. séance du 7 septembre 1953.)

GAUTHIER-VILLARS, IMP.-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
144614-53 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.