ALGÈBRE. — *Sur l'extension d'un groupe de permutations d'un ensemble fini à l'ensemble des parties de celui-ci*. Note (*) de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. René Garnier.

L'extension d'un groupe de permutations $\mathcal{G}$ à l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E de puissance finie n, détermine une partition de $\mathfrak{P}(E)$ en classes d'équivalences X_i que l'on peut ordonner, $X_i < X_j$ signifiant que toute partie de E membre de X_j contient $a_j^i \neq 0$ membres de X_i.

Les résultats que l'on énoncera ici sans démonstration facilitent la solution du problème qui se rencontre dans bien des applications du calcul effectif de de ces « *nombres d'incidence* » a_j^i.

Notations. — h_i désignera la puissance de X_i (c'est-à-dire l'indice du sous-groupe de $\mathcal{G}$ laissant invariante une partie de E membre de X_i). On appellera « dimension » de la classe X_i la puissance des parties de E qui la constituent et $r(\lambda)$ sera le nombre des classes de dimension λ. A_μ^λ sera la matrice à $r(\lambda)$ colonnes et $r(\mu)$ lignes dont les éléments sont les a_j^i relatifs à l'incidence des classes de dimension λ dans celles de dimension μ. A sera la matrice carrée à $r = \sum_{\lambda=0}^{n} r(\lambda)$ lignes et colonnes formées par tous les a_j^i, C la matrice déduite de A en remplaçant tous les a_j^i par des zéros sauf quand la dimension de X_j excède d'une unité celle de X_i (c'est-à-dire que $C = A_1^0 \dotplus A_2^1 \dotplus A_3^2 \ldots \dotplus A_n^{n-1}$). Enfin H sera la matrice diagonale d'élément h_i.

1° Il est possible de permuter les lignes et les colonnes de A de telle sorte que, d'une part, A soit une matrice triangulaire d'élément diagonal $a_i^i = 1$ et, d'autre part, HA soit symétrique par rapport à la *deuxième diagonale*. $HAH^{-1} = |b_j^i|$ livre le nombre b_j^i de membres de X_j *contenant* un membre de X_i.

2° Pour tout $\lambda < \mu < \nu$ on a

$$A_\nu^\mu A_\mu^\lambda = \begin{bmatrix} \nu - \lambda \\ \nu - \mu \end{bmatrix} A_\nu^\lambda.$$

Par conséquent : $A = \exp C$ et $A^{-1} = \exp(-C)$.

(*) Séance du 26 janvier 1953.

3° Les matrices carrées $A_{n-\lambda}^{\lambda}$ (donnant l'incidence des classes de dimension λ dans les classes constituées par les complémentaires dans E des membres de celles-ci) sont complètement réductibles. Elles admettent pour valeurs propres les

$$\rho_{\lambda}(i) = (-1)^i \begin{bmatrix} n-\lambda-i \\ \lambda-i \end{bmatrix} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \lambda),$$

chacune avec le degré de multiplicité $s(i) = r(i) - r(i-1)$.

Il en découle que si $\lambda \leqq \mu \leqq n/2$ on a aussi $r(\lambda) \leqq r(\mu)$.

4° Il est possible de trouver une matrice carrée P à r lignes et r colonnes telle que PAP^{-1} soit formée de matrices rectangulaires $A_{\mu}^{*\lambda}$ n'ayant au maximum qu'un seul élément non nul dans chaque ligne et dans chaque colonne, les $A_{\mu}^{*\lambda}$ correspondant biunivoquement aux A_{μ}^{λ}.

P peut être représenté comme la somme directe $P_0 \dotplus P_1 \dotplus \ldots \dotplus P_i \dotplus \ldots \dotplus P_n$ où P_λ pour $\lambda \geqq n/2$ est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de $A_{\lambda}^{n-\lambda}$ et P_λ pour $\lambda < n/2$ se déduit de $P_{n-\lambda}$ par retournement.

Il est donc possible de construire A en se donnant seulement la valeur des $r(\lambda)$ d'une part, et, d'autre part, soit la matrice carrée $A_{n/2+1}^{n/2-1}$, si n est pair soit la matrice carrée $A_{(n+1)/2}^{(n-1)/2}$, si n est impair.

Dualité. — Les expressions formelles $V_j^{(\lambda)} = \sum_{(i)} \alpha_{ji} X_i$, *où les* α_{ji} *appartiennent à un anneau commutatif* $\mathfrak{A}$ *et où les* X_i *ont même dimension* λ, *constituent un module* $\mathfrak{M}_\lambda$. *Les matrices* A_{μ}^{λ} *définissent des homomorphismes* $\mathcal{H}_{\mu}^{\lambda}$ *de* $\mathfrak{M}_\lambda$ *dans* $\mathfrak{M}_\mu$. *D'autre part, à tout* $V_j^{(\lambda)} = \sum_{(i)} \alpha_{ji} X_i$ *correspond biunivoquement son dual* $\overline{V}_j^{(n-\lambda)} = \sum_{(i)} \alpha_{ji} \overline{X}_i$, où $\overline{X}_i$ *désigne la classe formée par les complémentaire dans* E *des parties constituant* X_i. *Les résultats formulés plus haut permettent d'énoncer*

Si $\mathcal{H}_{\mu}^{\lambda} V_j^{\lambda} = 0$, *alors :* $\mathcal{H}_{n-\lambda+\mu}^{\lambda} V_j^{(n-\lambda)} = 0$ *et réciproquement et les* α_{ij} *sont les composantes d'un vecteur propre de* $A_{n-\lambda}^{\lambda}$ *correspondant à la valeur* $+1$ *ou* -1.

Généralisation. — Sans pouvoir non plus entrer dans le détail des énoncés, ni développer les démonstrations, on signalera enfin que les résultats précédents peuvent être généralisés notamment dans le cas suivant : au lieu de E et d'un sous-groupe du groupe symétrique, on considère un espace projectif F de dimension n et à coordonnées dans un corps de Galois $GF(p^m)$ et un sous-groupe du groupe linéaire correspondant, $\mathfrak{P}(E)$ étant remplacé par l'ensemble des variétés linéaires de F. En particulier, on a toujours :

$$A = \mathrm{Exp}_p m\,(C)$$

où $\mathrm{Exp}_p m$ désigne la fonction que l'on a introduite dans une Note antérieure [1].

---

[1] *Comptes rendus*, **236**, 1953, p. 352.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **236**, p. 449-450, séance du 2 février 1953.)

GAUTHIER-VILLARS. IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
143522-53 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.