ALGÈBRE. — *Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle :* $F(x+y)=F(x)F(y)$. Note (*) de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Émile Borel.

Nous nous plaçons dans l'anneau des suites formelles d'une algèbre de Banach non commutative $\mathcal{B}$ et nous nous proposons de trouver une série

$$\mathrm{Exp}_u(x)=1+\frac{x}{a_1}+\frac{x^2}{a_1a_2}+\frac{x^3}{a_1a_2a_3}+\ldots,$$

telle que l'on ait identiquement

$$\mathrm{Exp}_u(ax)\,\mathrm{Exp}_u(by)=\mathrm{Exp}_u(ax+by) \tag{1}$$

pour tout a et b appartenant au centre de $\mathcal{B}$, chaque fois que x et y satisfont à la condition de commutativité faible :

$$yx=uxy, \tag{2}$$

où u est un élément du centre de $\mathcal{B}$ possédant un inverse. Dans ce cas :

$$(x+y)^n=x^n+(1+u+u^2+\ldots u^{n-1})\,x^{n-1}y+\ldots+\begin{bmatrix} n \\ m\end{bmatrix}_u x^{n-m}y^m+\ldots+y^n,$$

où l'on a posé (¹)

$$\begin{bmatrix} n \\ m\end{bmatrix}_u=\frac{[n]_u!}{[m]_u!\,[n-m]_u!},\qquad \text{avec}\quad [0]_u!=1\qquad\text{et}\qquad [n]_u!=\prod_{i=0}^{i=n}\left(\frac{1-u^i}{1-u}\right).$$

Par conséquent

$$\mathrm{Exp}_u(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]_u!} \tag{3}$$

(*) Séance du 22 décembre 1952.

(¹) Ces expressions ont été fréquemment étudiées en analyse du point de vue de la théorie des partitions (*Cf.* Littlewood, *Theory of group characters*, London, 1950) ou des méthodes énumératives dans les groupes abéliens finis (*Cf.* Zassenhauss, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Leipzig, 1937).

et l'on peut démontrer les formules suivantes

$$(4)\qquad \mathrm{Exp}_u(x)\,\mathrm{Exp}_{u^{-1}}(-x) = 1,$$

$$(5)\qquad \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathrm{Exp}_u(x+\lambda y) - \mathrm{Exp}_u(x)}{\lambda} = y\,\mathrm{Exp}_u(x),$$

$$(6)\qquad \mathrm{Exp}_u(\Sigma x_i) = \Pi(1+x_i),$$

si les x_i sont nilpotents et satisfont à l'équation de commutativité faible (2).

Interprétation. — Soit S la matrice d'incidence d'une géométrie projective $\mathfrak{g}_h$ à h dimensions et à coordonnées dans un $\mathrm{GF}(p^n)$. Soit C la matrice de la relation de consécutivité associée ([2]). Il est possible de montrer que l'on a $\mathrm{S} = \mathrm{Exp}_{p^n}(\mathrm{C})$. Soit maintenant $\mathfrak{g}'_{h'}$, une variété linéaire à h' dimensions de $\mathfrak{g}_h$, S' la matrice correspondant aux relations d'incidence qui deviennent des équivalences dans tout homomorphisme de $\mathfrak{g}_h$ qui annule $\mathfrak{g}'_h$, C' la matrice de consécutivité associée et enfin $\mathrm{C}'' = \mathrm{C} - \mathrm{C}'$. On a

$$\mathrm{C}''\mathrm{C}' = p^n \mathrm{C}'\mathrm{C}'', \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{S} = \mathrm{Exp}_{p^n}(\mathrm{C}'+\mathrm{C}'') = \mathrm{Exp}_{p^n}(\mathrm{C}')\,\mathrm{Exp}_{p^n}(\mathrm{C}'') = \mathrm{S}'\mathrm{S}''.$$

D'autre part si S^{-1} est la matrice inverse de S, la relation (4) montre que la fonction de Möbius est bien égale à

$$(-1)^k \frac{[k]!_{p^n}}{[k]!_{p^{-n}}} = (-1)^k p^{n\frac{k^2-k}{2}} = \mu(k).$$

Cas particuliers. — Pour $u = 1$ on retrouve la fonction exponentielle habituelle avec $\mu(k) = (-1)^k$.

Pour $u = 0$ on obtient

$$\mathrm{Exp}_0(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = (1-x)^{-1},$$

avec

$$\mu(0) = 1; \qquad \mu(1) = -1; \qquad \mu(k>1) = 0.$$

et pour $u = \infty$ (c'est-à-dire $xy = 0$) :

$$\mathrm{Exp}_\infty(x) = 1 + x.$$

Ces deux derniers cas correspondent dans notre interprétation à ceux du treillis distributif complémenté et de la chaîne. On observera qu'il est alors possible de calculer *a priori* C' et C'' comme produits *kroneckeriens* $\mathrm{C}_{h'} \otimes \mathrm{I}_{h''}$ et $\mathrm{C}_{h''} \otimes \mathrm{I}_{h'}$ des matrices de consécutivités et des diagonales correspondant aux treillis de hauteur h' et $h'' = h - h'$. Dans le cas des treillis modulaires non distributifs, cette construction nécessiterait une généralisation que nous ne pouvons pas exposer ici de la notion de produit kroneckerien.

([2]) J. Riguet, *Bull. Soc. Math.*, 76, 1948, p. 140.

Enfin il est possible de démontrer que l'expression de S comme somme pondérée de puissance de C ne peut se faire que dans les cas que nous avons étudiés si l'on se limite aux matrices S relatives à des relations d'ordre latticiel. Par contre dans des cas très généraux (produits directs ou subdirects de treillis modulaires, en particulier) on a la relation

$$S = \mathrm{Exp}_{U_1}(C_1)\,\mathrm{Exp}_{U_2}(C_2)\ldots\mathrm{Exp}_{U_i}(C_i),$$

où les C_i sont des matrices de consécutivité correspondant à des classes de quotients modulo certaines relations d'équivalence sur le treillis considéré.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **236**, p. 352-353, séance du 26 janvier 1953.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
143486-53 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.