ESPACES VECTORIELS. — *Sur une définition combinatoire des espaces vectoriels classiques*. Note de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. René Garnier.

Une théorie purement combinatoire des espaces vectoriels hermitiens, orthogonaux ou symplectiques peut être développée à partir de la seule notion de fermeture de Galois (1) en postulant l'existence d'une opération ternaire qui correspond à l'intersection de l'hyperplan polaire d'un vecteur avec un sous-espace dont une base est formée de deux vecteurs conjugués. Si ces derniers sont en outre isotopes, il en est de même de l'intersection et une grande partie des résultats subsiste donc pour les « null systems » (2) qui sont la restriction d'un espace vectoriel à l'ensemble de ses vecteurs isotopes.

E sera un ensemble d'éléments que l'on appellera « points » (ce seront, en fait, les vecteurs habituels) et que l'on représentera toujours par des minuscules. ρ sera une relation binaire symétrique dite « de conjugaison » entre ces points. P étant une partie de E, P^* désignera l'ensemble des points de E conjugués avec tous les points de P; $P^{**} = (P^*)^*$ sera *la fermeture de Galois* de P. On sait (1) que l'application $P \to P^{**}$ applique le treillis $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E sur un treillis complet $\mathfrak{C}(E)$ et l'on écrira

$$P + Q = P^{**} + Q^{**} = (P \cup Q)^{**} = (P^* \cap Q^*)^* = \{x : P^* \cap Q^* \subset x^*\}.$$

Axiome I. — *Une telle structure* $\mathcal{E} = (E, \rho)$ *sera une « relation bilinéaire classique »* (RBC), *si et seulement si,* $a \neq b$; $a\rho b$; $c \not\subset a^* \cap b^*$ *entraînent* $c^* \cap (a + b) =$ *un point unique.*

On déduit de I :

1° Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{E}$ soit séparable (c'est-à-dire que pour tout a : $a^{**} = a$) est que E^* (qui est au plus un point) soit vide.

2° Si les (E_i, ρ_i) sont des RBC disjointes, leur « somme directe » $\mathcal{E} = (E = \bigcup E_i, \rho)$ avec ρ définie par : $x\rho y$ si $x \in E_i$ et $y \in E_j$ $(i \neq j)$ ou si $x \rho_i y$ quand $x, y \in E_i$, est aussi une RBC. $\mathfrak{C}(E)$ est le produit direct des $\mathfrak{C}(E_i)$.

(1) *Cf.* G. Birkhoff, *Lattice Theory*, chap. IV et J. Riguet, *Bull. Soc. Math.*, 1948, p. 114-155.

(2) R. Brauer, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42, 1936, p. 247-254 et 51, 1945, p. 903-906.

Réciproquement, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{E}$ soit décomposable de cette manière est que pour au moins un a, l'ensemble $\beta(a)$ des points b distincts de a tels que $a\rho b$ et $a+b=a\cup b$, ne soit ni vide ni formé de points tous conjugués entre eux. Si pour au moins un a, $\emptyset\neq\beta(a)\subset(\beta(a))^\star$, $\mathcal{E}$ est la réunion d'un espace vectoriel dont tous les points sont conjugués avec son espace dual.

On se limitera désormais aux RBC séparables et indécomposables $\mathcal{E}$ telles que l'on puisse trouver une autre RBC, $\mathcal{F}$, jouissant des mêmes propriétés et que $E\subset F$, $E^{\star\star}=E$ dans F. On dira que A admet une « base normale » S si $A=S^{\star\star}$ et si pour tout point $s\in S$, ou bien $S\subset s^\star$, ou bien il existe un s' unique dans S tel que $S-s'\subset s^\star$. S sera dite « orthogonale » si en outre aucun de ses points n'est conjugué avec lui-même.

3° Si E admet une base normale, $\mathcal{C}(E)$ est semi-modulaire, mais non nécessairement modulaire comme le montre l'exemple des « null systems ». On a cependant pour tout A admettant une base normale et B une base finie : $A^\star\cap(A+A^\star\cap B)=A^\star\cap A+A^\star\cap B$, identité qui généralise la *loi modulaire*.

4° Si E admet une base orthogonale ou si pour tout s et s' distincts dans la base normale S de E et tout $c\in E$, $c^\star\cap(s+s')\neq\emptyset$, $\mathcal{C}(E)$ est un treillis de géométrie projective [$\mathcal{C}(E)$ est modulaire, complémenté et indécomposable]. Il en est de même si I est remplacé par la condition plus forte : pour tout a, b et c, $a\neq b$ et $c\not\subset a^\star\cap b^\star$, entraînent $c^\star\cap(a+b)=$ un point unique; on sait en effet, dans ce cas, construire une base normale de E, qui est orthogonale si E contient au moins un point non conjugué avec lui-même.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences*, t. 238, p. 2487-2488, séance du 28 juin 1954.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
146460-54 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.