ALGÈBRE. — *Un treillis universel des géométries projectives.*

Note de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. René Garnier.

On dira que le treillis modulaire $\mathfrak{T}$ est un treillis universel des géométries projectives si le treillis $\mathcal{P}_n$ des variétés linéaires de l'espace projectif à n dimensions sur un corps K est, quel que soit le corps simple K, une image homomorphe de $\mathfrak{T}$ pour les opérations de réunion et d'intersection. Cette définition est satisfaite en particulier si $\mathfrak{T}$ est le treillis modulaire libre à $n+2$ générateurs. On montrera ici que :

Une condition nécessaire et suffisante pour que les $n+2$ éléments x_i engendrent un treillis universel des géométries projectives ne possédant aucune image homomorphe distributive non triviale, est qu'il existe $n+2$ éléments x_i tels que : 1° $x_i = p_i$ pour tout i, où les p_i sont des polynomes latticiels en les a_i, dont on donnera l'expression ci-dessous; 2° l'un au moins des segments η_j (définis ci-dessous) ne soit pas dégénéré.

Notations. — i, j et k sont trois indices génériques distincts de l'intervalle $\mathrm{I} = [1, n+2]$. E (respectivement : E′) désigne l'ensemble des couples d'indices distincts de I (respectivement : de $\mathrm{I}-j$). On pose

$$s_j = \bigcap_{i \in \mathrm{I}-j} a_i; \qquad s = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} s_i; \qquad s_{jk} = s_{kj} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}-j-k} a_i; \qquad t_j = \bigcup_{i \in \mathrm{I}-j} s_{ji};$$

$$r_{jk} = r_{kj} = s_{jk} \cap \Big(\bigcap_{i \in \mathrm{I}-j-k} t_i \Big); \qquad q_j = \bigcup_{e \in \mathrm{E}'} r_e; \qquad r = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} q_i = \bigcup_{e \in \mathrm{E}} r_e$$

et enfin $p_i = q_i \cup s$.

1° La condition est nécessaire. Soient $x_i (i \in \mathrm{I})$, $n+2$ hyperplans à $n-1$ dimensions d'un espace projectif à n dimensions et $y_{jk} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}-j-k} . x_i$ leurs intersections n à n. On vérifie que si tous les y_{jk} sont distincts, ce sont des points et que l'on a en posant $x_i = a_i$:

$$\emptyset = s_i = s; \qquad a_i = t_i = q_i = p_i; \qquad y_{jk} = s_{jk} = r_{jk}.$$

2° La condition est suffisante. Les calculs sont simplifiés en observant que d'après une remarque de Whitman [1], les s_i sont distributifs, c'est-à-dire que $f(a_i \cup s_i) = f(a_i) \cup s_i$ quel que soit le polynome $f(\quad)$. On prouve ensuite :

a. $s_j \cup s_k \subset r_{jk} \subset s_{jk}$ d'où $a_j \cap r_{jk} = s_k$.

Comme $s_{jk} \subset a_i$ pour tout $i \in \mathrm{I} - j - k$, on peut appliquer la loi modulaire successivement à chacun des termes $a_{i'}$ $(i' \neq i)$ du monome s_{jk} dans l'expression $s_{jk} \cap t_i$ qui est donc égale à $a_i \cap (s_{ij} \cup s_{ik})$, d'où :

$$r_{jk} = s_{jk} \cap \left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}-j-k} (s_{ij} \cup s_{ik}) \right) = s_{jk} \cap \left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}-j-k} (a_k \cup s_{ik}) \right).$$

b. Si F est une partie de E et $\overline{\mathrm{F}}$ la fermeture d'équivalence de F :

$$\bigcup_{e \in \mathrm{F}} r_e = \bigcup_{e \in \overline{\mathrm{F}}} r_e.$$

Par symétrie il suffit de montrer que $r_{jk} \subset r_{ij} \cup r_{ik}$. On utilise la dernière expression précédente et, avec l'aide de la loi modulaire, on obtient en regroupant les termes

$$r_{ij} \cup r_{ik} = \{ s_{ij} \cup s_{ik} \} \cap \{ (a_j \cup s_{jk}) \cap (a_k \cup s_{jk}) \} \cap \left(\bigcap_{\substack{i' \in \\ \mathrm{I}-i-j-k}} \{ (a_j \cup s_{ji'}) \cap (a_k \cup s_{ki'}) \} \right),$$

d'où le résultat, puisque chacune des accolades est en relation $\supset$ avec l'accolade correspondante de

$$r_{ij} = \{ s_{ij} \cup s_{ik} \} \cap \{ s_{jk} \} \cap \left(\bigcap_{\substack{i' \in \\ \mathrm{I}-i-j-k}} \{ s_{ji'} \cup s_{ki'} \} \right).$$

c. $q_j \cap r_{jk} = s_k$. ($r_{ik} \subset q_j$ entraîne $s_k \subset q_j$ et, d'autre part, pour tout $e \in \mathrm{E}'$: $r_e \subset s_e \subset a_j$).

d. On écrit $s'_j, s'_{jk}, \ldots p'_i$ pour représenter le polynome correspondant, mais où les a_i sont remplacés par les q_i. On a :

$$r'_{jk} = r_{jk} \qquad \text{et} \qquad q'_j = q_j$$

($q_i \subset a_i$ entraîne $s'_{jk} \subset s_{jk}$ et $r_{jk} \subset q_i$ entraîne $q_i \cap s_{jk} = r_{jk}$; donc $s'_{jk} = r_{jk}$, $t'_j = q_j$, etc.).

e. Impossibilité d'une image homomorphe distributive non triviale. — Tous les segments tels que $\eta_j = [q_j \cup s\,;\, r]$ sont projectivement équivalents et équivalents

---

[1] *Amer. J. Math.*, 65, 1943, p. 79-96.

aux $\eta_{jk} = [s_j \cup s_k ; r_{jk}]$. $\big((q_j \cup s) \cap r_{jk} = s_j \cup s_k$ et $q_j \cup s \cup r_{jk} = r$ entraînent l'équivalence de $[q_j \cup s ; r]$ et de $[s_j \cup s_k ; r_{jk}]$. D'où le résultat puisque η_j est symétrique en les $a_i (i \in \mathrm{I} - j)$ et η_{jk} en a_j et $a_k\big)$.

Dans une publication ultérieure on envisagera certaines conséquences des résultats précédents dans la théorie des lois universelles des treillis modulaires.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 239, p. 1754-1756, séance du 20 décembre 1954.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
147301-54 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.