ALGÈBRE ET THÉORIE DES JEUX. — *Jeux de Nim et solutions*. Note (*) de MM. **Claude Berge** et **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Georges Darmois.

A l'aide d'une fonction de Grundy définie dans une Note antérieure ([1]) et pouvant avoir comme valeur un nombre ordinal transfini, on étudiera des propriétés d'un jeu de Nim généralisé dont on donnera des applications à la théorie des « solutions » au sens de Von Neumann et Morgenstern.

On appellera ici *jeu de Nim* tout jeu de mat alternatif à deux joueurs, compétitif, et symétrique par rapport aux deux joueurs ([2]). Une position de jeu sera le produit d'un élément x appelé *diagramme* et d'un indice i représentant le joueur ayant le trait au moment considéré. L'ensemble des positions pouvant succéder à une position $x.1$ sera désigné par $(\Gamma x).2$; il existera dans l'ensemble X des diagrammes deux ensembles K et L tels que

$$K \cap L = \emptyset, \qquad K \cup L = X_0 = \{ x : \Gamma x = \emptyset \},$$
$$(K.1) \cup (L.2) = K_1; \qquad (L.1) \cup (K.2) = K_2.$$

(K_1 et K_2 désignent les *positions gagnées* pour les joueurs 1 et 2.)

Un tel jeu sera désigné par (Γ, K, L), et dans tout ce qui va suivre, on considérera un graphe orienté comme un jeu de Nim particulier du type $(\Gamma, \emptyset, X_0)$.

On dira qu'une fonction $g(x)$ sur X est une *fonction de Grundy* du jeu (Γ, K, L) si : $x \in L$ implique $g(x) = 0$; $x \in K$ implique $g(x) = 1$; $x \in CK \cap CL$ implique que $g(x)$ est le plus petit des nombres ordinaux ne figurant pas dans $\{ g(y) : y \in \Gamma x \}$.

On voit, comme dans la Note précédente, que si le jeu (Γ, K, L) est localement fini, il existe une fonction de Grundy et une seule, que l'on déterminera par induction transfinie. Le théorème de Grundy se généralise :

Théorème I. — *Si, dans un jeu de Nim* (Γ, K, L), *il existe une fonction de Grundy* $g(x)$, *et si la position en cours est* $x.2$, *telle que* $g(x) = 0$, *le joueur* 1 *peut être sûr de gagner ou d'empêcher la partie de se terminer.*

En effet, le diagramme suivant y sera tel que $g(y) \neq 0$, et par conséquent, si $y \in K$, le joueur 1 aura gagné, et si $y \notin K$, le joueur 1 pourra choisir au coup suivant un diagramme z tel que $g(z) = 0$.

Théorème II. — *Si un jeu* (Γ, K, L) *admet une fonction de Grundy* $g(x)$ *telle que* $\Gamma^+\{x/g(x) \neq 0, 1\} = \emptyset$, *le jeu de qui-perd-gagne associé* (Γ, L, K) *admet une fonction de Grundy* $g'(x)$, *qui sera égale à zéro quand* $g(x) = 1$, *à* 1 *quand* $g(x) = 0$ *et à* $g(x)$ *quand* $g(x) \neq 0, 1$.

1° Si $\Gamma x \neq \emptyset$ et si $\lambda < g'(x)$, il existe dans Γx un y tel que $g'(y) = \lambda$.
En effet si $g'(x) = 1$, on a $g(x) = 0$; donc, puisque :

$$\Gamma^+\{x : g(x) \neq 0, 1\}\, \emptyset,$$

on a un y dans Γx tel que $g(y) = 1$, c'est-à-dire $g'(y) = 0$; si, par ailleurs, $g'(x) > 1$, on a $g'(x) = g(x)$, et il existera encore un y tel que $g(y) = \lambda$.

2° Il n'existe pas dans Γx un y tel que $g'(y) = g'(x)$, car cela entraînerait $g(y) = g(x)$.
Enfin, on étendra le raisonnement de Grundy au cas cyclique pour démontrer :

Théorème III. — *Si, pour des jeux* $(\Gamma^k, \emptyset, L^k)$, *il existe une fonction de Grundy, il existera également une fonction de Grundy pour le produit de composition d'ordre* 1, $(\Pi^{(1)}\Gamma^k, \emptyset, \Pi L^k)$, *où*

$$(\Pi^{(1)}\Gamma^k)\, x^1 . x^2 \ldots x^m = (\Gamma^1 x^1) . x^2 \ldots x^m \cup x^1 . (\Gamma^2 x^2) . x^3 \ldots x^m \cup \ldots .$$

Cette fonction sera donnée par la règle « Nim-Sum » de Grundy.

Application. — Soit X l'ensemble des imputations d'un jeu à n personnes; si $x \in X$, on désignera par Γx l'ensemble des imputations qui peuvent dominer x. On posera $X_0 = \{x/\Gamma x = \emptyset\}$, et l'on considérera un sous-ensemble A de X_0.
Un ensemble S_A dans X sera par définition une *solution relativement* à A si l'on a

1° $x, y \in S_A$, entraîne $y \notin \Gamma x$;
2° $x \notin S_A$, $x \notin A$ entraîne l'existence d'un y dans S_A tel que $y \in \Gamma x$.

$S_\emptyset$ sera une *solution forte*, au sens de J. Von Neumann-O. Morgenstern [3]; S_{X_0} sera une *solution faible*, c'est-à-dire l'ensemble maximal de tous les éléments x qui dominent tout élément pouvant être dominé. On remarque que si le jeu de Nim $(\Gamma, A, X_0 - A)$ admet une fonction de Grundy $g(x)$, l'ensemble $\{x/g(x) = 0\} = S_A$ est une solution relativement à A.

Conséquence 1. — *Si le graphe* (Γ, X) *est localement fini, à tout sous-ensemble* A *de* X_0 *correspondra une solution* S_A *et une seule.*

En effet, dans ce cas, il existe une fonction de Grundy et une seule pour le jeu $(\Gamma, A, X_0 - A)$. Dans le cas où $A = \emptyset$, on retrouve un résultat de Von Neumann-Morgenstern.

CONSÉQUENCE 2. — *S'il existe une solution* S_A *engendrée par une fonction de Grundy* $g(x)$ *telle que* $\Gamma^{+}\{x/g(x)\neq 0,1\}=\emptyset$, *il existe une solution* $S'_B = S'_{X_0-A}$ *et l'on a* : $S_A\cap S'_B=\emptyset$. Cela se déduit du théorème II.

Il résulte en particulier que, dans ce cas, la solution forte et la solution faible sont des ensembles disjoints.

(*) Séance du 19 mars 1956.

(1) *Comptes rendus*, **242**, 1956, p. 1404.

(2) Pour la terminologie, *cf.* C. BERGE, *J. Math. pures et appl.*, **32**, 1953, p. 129. Cette définition du jeu de Nim contient celle de E. H. Moore (*Ann. of Math.*, 1909) et celle de P. M. Grundy (*Eureka*, 2, 1939).

(3) *Theory of Games and Economic behaviour*, Princeton, 1947, p. 587.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **242**, p. 1672-1674, séance du 26 mars 1956).

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
149793-56 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.