ALGÈBRE. — *Sur une représentation des demi-groupes.*

Note de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Georges Darmois.

On a défini antérieurement la notion de demi-groupe fondamental d'un processus régénératif ou d'un code [1]. Le problème d'indécomposabilité ergodique pour ces structures revient à caractériser les demi-groupes A possédant un seul idéal à droite [2] dont le groupe Γ (défini plus bas) est réduit à son élément neutre ε. Sa solution repose sur une représentation nouvelle qui sera seule discutée ici.

Notations. — Soit A sans zéro satisfaisant à la condition minimale. Soient $C_i (i \in I)$ et $C^j (j \in J)$ respectivement ses idéaux minimaux à droite et à gauche. $C = \bigcup_{i \in I} C_i = \bigcup_{j \in J} C^j$. Si $C_i^j = C_i \cap C^j$ possède un élément unité e_i^j — ce que l'on supposera toujours — on sait [3] qu'il existe un groupe Γ, des constantes γ_j^i dans Γ et une application $a \to \bar{a}$ de C dans Γ tels que $ab = c$, $a \in C_i^j$ et $b \in C_k^l$ entraînent $\bar{a}\gamma_j^k \bar{b} = \bar{c}$. On peut supposer que $\gamma_1^i = \gamma_j^1 = \varepsilon$.

Définition. — On appellera « *ergodique à droite* » la représentation de tout $x \in A$ par une matrice carrée X à indices dans J et à éléments dans $\Gamma \cup o$ ($o\Gamma = \Gamma o = o$) dont l'élément $\xi_j^{j'}$ est égal à $\bar{u}$ si $e_1^j x = u \in C_1^{j'}$ et à o ailleurs. Si ρ_i est une équivalence régulière sur Γ on désignera par φ_i l'homorphisme de A associé à son « extension ergodique à droite », cette dernière étant définie par : $x \rho y$, si et seulement si $\xi_{j'}^j \rho \eta_{j'}^j$ pour tout $j, j' \in J$. En particulier φ désignera l'homomorphisme $x \to X$ et φ_0 l'homomorphisme associé à ρ_0, la plus fine des équivalences sur Γ telles que $\gamma_j^i \rho \gamma_j^{i'}$ pour tout i, i', j.

Proposition 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\varphi_i x \in \varphi_i C$ *est qu'il existe deux indices j et k dans* J *et* $\beta \in \Gamma$ *tels que* $\xi_{j'}^{j''} = \gamma_{j'}^k \beta$ *si* $j'' = j$ *et* $\xi_{j'}^{j''} = o$ *si* $j'' \neq j$.

Il suffit de calculer la matrice Y d'un élément générique de C pour voir que la condition est nécessaire. Réciproquement, si $\xi_{j'}^{j''} = o$ pour tout $j'' \neq j$ ces relations doivent exister car $y = xe_1^j$ appartient à C et $Y = X$ d'après les hypothèses faites sur les γ_j^1.

Proposition 2. — ρ_0 *est la plus fine des équivalences ergodiques telles que* φA *ne possède qu'un seul idéal minimum à droite.*

D'après les calculs précédents $e_i^1 \rho e_{i'}^1$ entraîne $\gamma_j^i \rho \gamma_j^{i'}$ pour tout $j \in J$; d'autre part, pour tout i, si $j \neq j'$, $\varphi_0 e_i^j \neq \varphi_0 e_i^{j'}$.

Proposition 3. — *Soit une équivalence régulière à droite dont les classes* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha, \ldots$ *sont telles que* $\emptyset \neq \mathfrak{C}_\alpha = C \cap \mathfrak{A}_\alpha \neq C \cap \mathfrak{A}_{\alpha'} = \mathfrak{C}_{\alpha'} \neq \emptyset$ *pour tout* $\alpha \neq \alpha'$. *La représentation ergodique à droite est isomorphe à la représentation à droite de* A *sur les classes* $\mathfrak{A}_\alpha$.

$X = Y$ est équivalent à $Cx = cy$ pour tout $c \in C$ puisque $c \in C_i^j$ entraîne

$ce_1^j = c$ et $ce_1^j x = cu$ avec $u \subset C^j$. D'autre part : $\mathfrak{C}_\alpha x \neq \emptyset$ pour tout α. Donc $\mathfrak{A}_\alpha x \cap \mathfrak{A}_\alpha y = \emptyset$ est équivalent à : $\mathfrak{C}_\alpha x \cap \mathfrak{C}_\alpha y = \emptyset$.

Soit en particulier la relation χ, fermeture de transitivité de χ_0 définie par $x\chi_0 y$, si et seulement si, pour quelques q, $q' \in Q \cup \emptyset$: $x = qt$; $y = q't$. Soit $\bar{\chi}$ la relation : pour tout $z \in A$, $zx\chi zy$.

PROPOSITION 4. — *Si* A *possède un sous-demi-groupe* Q *net à droite* (²), *unitaire à gauche* (²), *la représentation ergodique à droite est une représentation isomorphe du quotient de* A *par* $\bar{\chi}$. *En particulier si* A *est syntactiquement simple* (⁴) *par rapport à* Q, *la représentation ergodique à droite est une représentation isomorphe de* A.

Q, net à droite, contient tous les $e_i^j (i \in I)$ pour au moins un $j_0 \in J$. Donc $\bar{\chi}$ vérifie les conditions de la proposition 3 car à tout $x \in A$, il correspond au moins un $c \in C$ — par exemple $e_1^{j_0} x$ — tel que $c\chi x$. Si A est syntactiquement simple les classes pour χ coïncident par hypothèse avec les classes pour l'équivalence principale à droite (²) attachée à Q.

(¹) M. P. SCHÜTZENBERGER, *Comptes rendus*, **242**, 1956, p. 862.

(²) P. DUBREIL, *Mém. Acad. Sc.*, **63**, 1941, p. 8 et *Rend. Matem.*, 5ᵉ série, **10**, 1951, p. 195.

(³) SUSCHKEVITSCH, *Math. Ann.*, **99**, 1928, p. 30.

(⁴) L'équivalence appelée « syntactique » dans (¹) avait déjà été définie et étudiée par M. TEISSIER, *Comptes rendus*, **232**, 1951, p. 1987.