ALGÈBRE. — *Sur deux représentations des demi groupes finis.* Note (*) de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Georges Darmois.

Soit Σ un demi groupe [1] d'applications d'un ensemble fini E dans lui-même. A tout $\sigma \in \Sigma$ on fait correspondre dans certains problèmes l'application « inverse » $\overset{-1}{\sigma}$ définie sur $F = \mathfrak{P}(E)$ par $\overset{-1}{\sigma} x = \{ \cup y : \sigma y \subset x \}$. Les $\overset{-1}{\sigma}$ fournissent une représentation de Σ anti-isomorphe de la première. Attachons à tout σ les deux matrices carrées à indices dans F suivantes :

$$S_\sigma : \quad S_\sigma(x;y) = 1 \quad \text{si } \sigma x = y; \qquad S_\sigma(x;y) = 0 \quad \text{si } \sigma x \neq y,$$
$$S'_\sigma : \quad S'_\sigma(x;y) = 1 \quad \text{si } x = \overset{-1}{\sigma} y; \qquad S'_\sigma(x;y) = 0 \quad \text{si } x \neq \overset{-1}{\sigma} y.$$

S'_σ est la transposée de la matrice d'application attachée à $\overset{-1}{\sigma}$ et S_σ est la matrice correspondant à l'extension de σ à F. Supposant que Σ est le demi groupe de toutes les applications de E dans lui-même, nous donnerons une base du module $\mathfrak{B}$ des matrices carrées à indices dans F telles que

$$(1) \qquad S_\sigma B = B S'_\sigma \qquad \text{pour tout } B \in \mathfrak{B} \quad \text{et} \quad \sigma \in \Sigma.$$

Notations. — On utilisera les matrices particulières suivantes dont les éléments sont égaux à 0 ou à 1. (On a indiqué pour chacune d'elles ci-dessous la partie de $F \times F$ correspondant aux éléments non nuls).

$T : x = E - y$; $\quad B_0 : x = \emptyset$; $\quad B_1 : \emptyset \neq x \subset y$; $\quad B_2 = B_1 T : \emptyset \neq x \subset E - y$.
$B_3 : x \cap y \neq \emptyset \neq x \cap (E - y)$; $\quad C_0 : x = y = \emptyset$; $\quad C_3 = TC_0 : E - x = y = \emptyset$;
$B'_1 = B_0 + B_1$; $\quad C'_1 = B'^{-1}_1$; $\quad C'_2 = (B_0 + B_2)^{-1} = C'_1 T$; $\quad B'_0 = B_0 + B_1 + B_2 + B_3$

PROPOSITION. — *Les matrices* B_0, B_1, B_2, B_3 *constituent une base indépendante de* $\mathfrak{B}$.

Démonstration. — Pour un σ donné, (1) s'écrit :

$$(1') \qquad \sum_{y \in F} S(x;y) B(y;z) = \sum_{y \in F} B(x;y) S'(y;z) \qquad \text{pour tout } x, z \in F.$$

Soit encore puisque $S(x;y)$ et $S'(x;y)$ ne diffèrent de zéro que si $\sigma x = y$ et $x = \overset{-1}{\sigma} y$

$$(1'') \qquad \text{pour tout } x, z \in F : \quad B(\sigma x; z) = B(x; \overset{-1}{\sigma} z).$$

Or, pour tout σ, $z \cap \sigma x = \emptyset$ est équivalent à $x \cap \overset{-1}{\sigma} z = \emptyset$. Le système $(1'')$ d'équations se décompose donc en quatre sous systèmes tels que chaque $B(x; y)$ ne figure que dans un seul d'entre eux et ceux-ci correspondent aux cas suivants :

$(1'')_0$: $x \cap z = \emptyset = x \cap (E - z)$, c'est-à-dire $x = \emptyset$.
$(1'')_1$: $x \cap z \neq \emptyset = x \cap (E - z)$, » $\emptyset \neq x \subset z$.
$(1'')_2$: $x \cap z = \emptyset \neq x \cap (E - z)$, » $\emptyset \neq x E - z$.
$(1'')_2$: $x \cap z \neq \emptyset \neq x \cap (E - z)$.

Montrons maintenant que si $B(x; y)$ et $B(x'; y')$ figurent dans le même sous-système, ils sont égaux.

$(1'')_0$: Quel que soit $z \neq \emptyset$, E, on peut trouver σ et σ' tels que $\overset{-1}{\sigma} z = \emptyset$ et $\overset{-1}{\sigma'} z = E$. Donc $B(\emptyset; z) = B\big(\emptyset; \overset{-1}{\sigma} z\big) = B(\emptyset; \emptyset)$, d'une part, et, d'autre part, $B(\emptyset; z) = B\big(\emptyset; \overset{-1}{\sigma'} z\big) = B(\emptyset; E)$.

$(1'')_1$: Si $\emptyset \neq x \subset z$, on peut trouver σ tel que $\sigma E = x$ et $\overset{-1}{\sigma} z = E$. Donc, $B(x; z) = B(\sigma E; z) = B\big(E; \overset{-1}{\sigma} z\big) = B(E; E)$.

$(1'')_2$: Quels que soient σ et z, on a $\overset{-1}{\sigma} z = E - \overset{-1}{\sigma}(E - z)$. Donc, comme pour $(1'')_1$, $B(x, z) = B(E; \emptyset)$.

$(1'')_3$: Nous désignons par $|u|$ le nombre d'éléments de E contenus dans $u \in F$. Sous l'hypothèse $(1'')_3$, il existe plusieurs y tels que

$$0 < |x \cap z| \leqq |y| \leqq |E| - (|x| - |x \cap z|) < |E|. \tag{2}$$

En outre, pour tout semblable y, on peut trouver un σ tel que $\sigma y = x \cap z$ et $\sigma(E - y) = x - x \cap z$; c'est-à-dire

$$\sigma E = \sigma y \cup \sigma(E - y) = x \quad \text{et} \quad \overset{-1}{\sigma} z = E - \overset{-1}{\sigma}(E - z) = y.$$

Donc $B(x; z) = B(E; y)$, pour tout y satisfaisant (2).

Proposition. — *Si le corps de base de* $\mathfrak{B}$ *est commutatif, le déterminant* β *de* $B = \lambda_0 B_0 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3$ *est égal à* $\lambda_0(\lambda_1 - \lambda_2)^m (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)^{n-1}$ ou $n = |E|$ *et* $m = 2^{n-1}$.

Démonstration. — λ_0 est un facteur simple de β. Formons les combinaisons suivantes de colonnes de B :

1° « Colonne z » — « colonne $(E - z)$ » pour tous les z tels que $|z| < |E|/2$ et si $|E|$ est paire pour tous les z contenant un élément fixe de E quand $|z| = |E|/2$. $B(x; z) - B(x; E - z) = 0$ si $x = \emptyset$; $= \lambda_1 - \lambda_2$ si $x \neq \emptyset$.

2° « Colonne $\emptyset$ » — « colonne E » — « colonne z » — « colonne $(E - z)$ » pour tous les $z \neq \emptyset$, E. $B(x; \emptyset) + B(x; E) - B(x; z) - B(x; E - z) = 0$ si $x = \emptyset$; $= \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3$ si $x \neq \emptyset$.

Proposition. — *Toute matrice* C *telle que* $CS_\sigma = S'_\sigma C$, *identiquement, est de la forme* $C = \mu_0 C_0 + \mu_1 C'_1 + \mu_2 C'_2 + \mu_3 C'_3$ *et* $BC = 1$ *si et seulement si*

$$\lambda_0(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = 1, \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2) = 1,$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)(\mu_1 + \mu_2) = 1, \qquad \lambda_1 \mu_3 + \lambda_2 \mu_0 + \lambda_3(\mu_1 + \mu_2) = 0.$$

Démonstration. — C_0 et C_3 satisfont manifestement la relation précédente de même que $(B_0 + B_1)^{-1}$ et $(B_0 + B_2)^{-1}$; le résultat en découle puisque ces quatre matrices sont linéairement indépendantes.

On trouve de même l'expression générale des matrices D (resp. D′) satisfaisant identiquement $S_\sigma D = DS_\sigma$ (resp. $S'_\sigma D' = D' S'_\sigma$) :

$$D = \delta_0 I + \delta_1 (B_0 + B_2) B'^{-1} + \delta_2 C_0 + \delta_3 B'_0 C_0 \qquad \text{et} \qquad D' = \delta'_0 I + \delta' T + \delta'_2 B_0 + \delta_3 T B_0.$$

(*) Séance du 22 octobre 1956.

(1) P. Dubreil, *Algèbre*, Gauthier-Villars, 1946, p. 34.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **243**, p. 1385-1387, séance du 5 novembre 1956.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
150798-56 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.