ALGÈBRE. — *$\bar{\mathcal{D}}$ représentation des demi-groupes.* Note (*) de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Georges Darmois.

La $\bar{\mathcal{D}}$-classe D [1] du demi-groupe [1] S sera dite de type « élémentaire » si l'on a identiquement dans D : $\bar{\mathcal{L}} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{H}}$ et l'on montrera que sous cette hypothèse, il est possible d'associer à D deux représentations de S par des matrices dont les éléments non nuls appartiennent à un groupe Γ déterminé par D. Ceci généralise à la totalité de S une construction analogue de D.D. Miller et A. H. Clifford [3] valable pour les seuls éléments de D et une autre représentation décrite antérieurement [4].

Proposition 1. — *Si s, $\bar{s}$ et $a \in \mathrm{S}$ sont tels que $as\bar{s} = a$, l'application $x \to xs$ est une application biunivoque compatible avec $\bar{\mathcal{R}}$ de $\mathrm{S}a$ sur $\mathrm{S}a'$ ($a' = as$). En particulier, si K est une $\bar{\mathcal{H}}$-classe de S et si $\mathrm{K}s \cap \mathrm{K} \neq \emptyset$ alors $\mathrm{K}s = \mathrm{K}$, biunivoquement.*

Démonstration. — 1° Pour tout $b \in \mathrm{S}a$, $bs\bar{s} = b$ car $b = ua$ implique $bs\bar{s} = uas\bar{s} = ua = b$. Donc la translation à droite $s\bar{s}(\bar{s}s)$ est une application identique de $\mathrm{S}a(\mathrm{S}a')$ sur lui-même. 2° $\bar{\mathcal{L}}$ étant régulière à droite, $\mathrm{S}as \subset \mathrm{S}a'$ et $\mathrm{S}a'\bar{s} \subset \mathrm{S}a$; donc $\mathrm{S}as\bar{s} \subset \mathrm{S}a'\bar{s} \subset \mathrm{S}a$. 3° Pour tout $b \in \mathrm{S}a$, $b' = bs$, on a $b\bar{\mathcal{R}}b'$ car $b = b'\bar{s}$. Donc si $c\bar{\mathcal{R}}b (c, b \in \mathrm{S}a)$ on a $cs = c'\bar{\mathcal{R}}c$, $bs = b'\bar{\mathcal{R}}b$ et, en raison de la transitivité de $\bar{\mathcal{R}} : c'\bar{\mathcal{R}}b'$. 4° Si $ks = k' (k, k' \in \mathrm{K}$, c'est-à-dire $k\bar{\mathcal{L}} \cap \bar{\mathcal{R}}k')$, il existe par hypothèse $\bar{s}$ tel que $k'\bar{s} = k$. Donc s applique biunivoquement K sur une certaine $\bar{\mathcal{H}}$ classe K′ et $\mathrm{K}' = \mathrm{K}$ puisque $\mathrm{K}' \cap \mathrm{K} \neq \emptyset$.

Proposition 2. — *Soit K une $\bar{\mathcal{H}}$ classe de S; $\mathrm{G} = \mathrm{K}^{(-1)}\mathrm{K} = \{s : \mathrm{K}s \cap \mathrm{K} \neq \emptyset\}$; $\mathrm{G}' = \mathrm{K}\mathrm{K}^{(-1)}$; $\varphi(\varphi')$ l'homomorphisme de $\mathrm{G}(\mathrm{G}')$ induit par la représentation de ce sous-demi-groupe par des translations à droite (à gauche) sur K. On a $\varphi(\mathrm{G}) = \varphi'(\mathrm{G}') =$ un groupe Γ.*

Démonstration. — On choisit un élément fixe $\underline{k}$ de K; si s et s' sont tels que $\underline{k}s = \underline{k}s' \in \mathrm{K}$, on a $\varphi(s) = \varphi(s')$ car il existe $\bar{s}$ tel que $\underline{k}s\bar{s} = \underline{k}$, ce qui entraîne $\underline{k}s'\bar{s} = \underline{k}$, donc $ks\bar{s} = ks'\bar{s}$ pour tout $k \in \mathrm{K}$ et enfin $ks = ks'$ pour tout $k \in \mathrm{K}$. Donc : 1° $\varphi(\mathrm{G})$ et $\varphi'(\mathrm{G}')$ sont des groupes. 2° Il existe une correspondance biunivoque entre les $k \in \mathrm{K}$, les $\alpha \in \varphi(\mathrm{G})$ et les $\alpha' \in \varphi'(\mathrm{G}')$ définie par :

$\overset{1}{\varphi}'(\alpha')\underline{k} = \underline{k}\overset{-1}{\varphi}(\alpha)$. On peut identifier $\varphi(G)$ et $\varphi'(G')$ et l'on écrira indifféremment : $k = \underline{k}^{\alpha} = \overset{-1}{\varphi}'(\alpha)\underline{k} = \underline{k}\overset{-1}{\varphi}(\alpha)$ ou $\alpha = \tilde{\varphi}(k)$. On conviendra que $\tilde{\varphi}(x) = 0$ si $x \notin K$. Soit maintenant D, la $\mathcal{D}$ classe de K décomposée de la façon habituelle en ses $\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$- et $\mathcal{K}$-classes : $D = \bigcup_{i \in I} L^i = \bigcup_{j \in J} R_j = \bigcup_{i \in I;\, j \in J} K^i_j$ avec $K^i_j = R_j \cap L^i$ et $K = K^1_1$. Par hypothèse, il existe des éléments $u^i, \bar{u}^i (i \in I)$, v_j, $\bar{v}_j (j \in J)$ satisfaisant les relations : $\underline{k}u^i \in L^i$; $\underline{k}u^i\bar{u}^i = \underline{k}$; $v_j\underline{k} \in R_j$; $\bar{v}_j v_j \underline{k} = \underline{k}$. D'après la proposition 2, les applications $K \to v_j K u_i$ et $K^i_j \to \bar{v}_j K^i_j \bar{u}^i$ sont biunivoques et inverse l'une de l'autre.

Nous supposons désormais que D est de type élémentaire et nous considérons l'expression $d_i(s) = \underline{k}u^i s$. Ou bien $d_i(s) \notin R$ [et dans ce cas $d_i(st) \notin R$ pour tout $t \in S$], ou bien $d_i(s)$ appartient à une certaine $\mathcal{K}$-classe $K^{i'}_j$. Comme $d_i(s)\mathcal{L} \cap \mathcal{R}\underline{k}$, $j = 1$ et $\underline{k}u^i s \bar{u}^{i'}$ est un certain élément k de K. Nous posons $m^{i'}_i(s) = \tilde{\varphi}(k)$ et $m^{i''}_i(s) = 0$ pour tout $i'' \neq i'$ $(i'' \in I)$. Nous désignerons par $M(s)$ la $I \times I$ matrice dont les éléments $m(s)$ viennent d'être définis et l'on conviendra que $0\Gamma = \Gamma 0 = 0$. On définirait de la même manière une $J \times J$ matrice $N(s)$ avec au plus un élément non nul par colonne : $n^j_{j'}(s) = \tilde{\varphi}(\bar{v}_{j'} s v_j)$ si $s v_j \in R_{j'}$ et $= 0$, autrement.

Proposition 3. — *La représentation $s \to M(s)$ est équivalente à la restriction à D de la représentation de S par des translations à droite.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $M(st) = M(s)M(t)$ identiquement. Or $m^{i'}_i(st) = 0$ si et si seulement $L^i st \cap D \neq \emptyset$, c'est-à-dire, ou bien si $L^i s \cap D \neq \emptyset$, ou bien si $L^i s = L^{i''}$ et $L^{i''} t \neq L^{i'}$. Dans le cas contraire on a

$$m^{i'}_i(st) = \tilde{\varphi}(\underline{k}u^i st\bar{u}^{i'}) = \tilde{\varphi}(\underline{k}u^i s\bar{u}^{i''} u^{i''} t\bar{u}^{i'}) = m^{i''}_i(s)\, m^{i'}_{i''}(t).$$

Nous considérons maintenant la $I \times J$ matrice P d'éléments $p^j_i = \tilde{\varphi}(\underline{k}u^i v_j \underline{k})$.

Proposition 4. — *Pour tout $s \in S$ on a identiquement :*

$$M(s)P = PN(s) = Q(s).$$

Démonstration. — On pose $q^j_i(s) = \tilde{\varphi}(\underline{k}u^i s v_j \underline{k}) = \tilde{\varphi}(\underline{k}u^i s\bar{u}^{i'} v_j \underline{k}) = \tilde{\varphi}(\underline{k}u^i v_j, \bar{v}_j, s v_j \underline{k})$ et l'on vérifie que la $I \times J$ matrice $Q(s)$ ainsi construite est bien la valeur commune de $M(s)P$ et de $PN(s)$.

Proposition 5. — *A des transformations par des matrices diagonales près, $M(s)$ est indépendante du choix des u^i, v_j et de $\underline{k} \in D$.*

Démonstration. — Supposons les u^i remplacés par les u'^i. On a $\underline{k}u'\bar{u} = \underline{k}^{\lambda}$ et $\underline{k}u^i\bar{u}'^i = \underline{k}^{\bar{\lambda}_i}$ avec $\lambda_i\bar{\lambda}_i = \varepsilon = \varepsilon^2$ puisque $\underline{k}u'^i\bar{u}'^i = \underline{k}$. Donc $m'^{i'}_i(s)\lambda_{i'} = \lambda_i m^{i'}_i(s)$. D'autre part, $M(s)$ ne change pas quand on remplace $\underline{k}$ par $\underline{k}' = w k \in K^1_j$.

Enfin, $M(s)$ ne change pas non plus si l'on remplace simultanément $\underline{k}$ par $\underline{k}' = \underline{k}u^{i\star}$ et les u^i par les $u'^i = \overline{u}^{i\star}u^i$.

Remarque. — Si D n'est pas régulière au sens de ([3]), P est identiquement nulle ainsi que les $M(s)$ et les $N(s)$ pour tout $s \in D$. Si D est régulière

$$M(s) = P\overline{M}(s) \qquad \text{et} \qquad N(s) = \overline{M}(s)P \qquad \text{pour tout } s \in D,$$

$\overline{M}(s)$ étant la matrice ne contenant qu'un seul élément non nul définie par D. D. Miller et A. H. Clifford ([3]). Si D est la réunion des idéaux minimaux (à droite et à gauche) de S et si $u^i = e^i_1$; $v_j = e^1_j$; $\overline{u}^i = \overline{v}_j = e^1_1 = \underline{k}$, on retrouve la représentation définie dans ([4]).

(*) Séance du 25 mars 1957.

([1]) Modifiant légèrement les notations de J.A. Green([2]) et supposant que S contient une unité on pose : $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow Sa \subset Sb$; $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS \subset bS$; $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cap \overset{-1}{\mathcal{L}}$; $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cap \overset{-1}{\mathcal{R}}$; $\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}}.\overline{\mathcal{L}}$; $\overline{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{R}}$.

([1]) P. Dubreil, *Algèbre*, Paris, p. 38.

([2]) *Ann. Math.*, **54**, 1951, p. 163-172.

([3]) *Trans. Am. Math. Soc.*, **82**, 1956, p. 270-280.

([4]) *Comptes rendus*, **242**, 1956, p. 2907.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **244**, p. 1994-1996, séance du 8 avril 1957.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
151704-57 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.