ALGÈBRE. — *Applications des $\overline{\mathcal{D}}$ représentations à l'étude des homomorphismes des demi-groupes.* Note (*) de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Georges Darmois.

La $\overline{\mathcal{D}}$ représentation d'un demi-groupe définie dans une Note antérieure ([1]) dont les notations seront utilisées ici, conduit à des résultats particulièrement simples quand S satisfait la condition J : Tout sous-demi-groupe U_d fermé ([2]) possède des idéaux minimaux à droite et à gauche. J, qui est préservée par les homomorphismes, entraîne, en particulier, $\mathcal{R} \cap \overset{-1}{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{R}\mathcal{L} \cap \overset{-1}{\mathcal{R}}\,\overset{-1}{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{D}}$. On désignera respectivement par δ^r_{D}, δ^l_{D} et $\delta^d_{\mathrm{D}} = \delta^r_{\mathrm{D}} \dotplus \delta^l_{\mathrm{D}}$ les homomorphismes de S induits par sa $\overline{\mathcal{D}}$ représentation associée à D sur les demi-groupes de matrices $\{M(s)\}$, $\{N(s)\}$ et $\{M(s) \dotplus N(s)\}$ ($\dotplus$: la somme directe) et l'on montrera que les δ sont étroitement liés aux sous-demi-groupes unitaires définis et étudiés par P. Dubreil ([3]).

Proposition 1. — S *satisfaisant* J *et* θ *étant un homomorphisme de* S *sur* S', *il correspond à toute* $\overline{\mathcal{D}}$ *classe* D' *de* S' *une* $\overline{\mathcal{D}}$ *classe* D *de* S *et des homomorphismes* $\theta'^x (x = d, r, l)$ *tels que* $\delta^x_{\mathrm{D}'}\theta = \delta^x_{\mathrm{D}'}\theta'^x \delta^x_{\mathrm{D}}$, *qui se réduisent à l'application identique pour les éléments de* δ^x_{D}S *n'appartenant pas à* δ^x_{D}D.

Démonstration. — 1° $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ étant compatibles avec les homomorphismes, toute $\overline{\mathfrak{X}}$ classe de S ($\overline{\mathfrak{X}} = \overline{\mathcal{K}}, \overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{L}}$ ou $\overline{\mathcal{D}}$) est appliquée par θ dans une $\overline{\mathfrak{X}}$ classe de S'. Soient : $e' = e'^2 \in \mathrm{D}'$; $Q_{e'} = \overset{-1}{\theta} e'$, le « noyau » correspondant; $P_e = Q^{(-1)}_{e'} Q_{e'} \cap Q_{e'} Q^{(-1)}_{e'} = \{ \overset{-1}{\theta} s' : s'e' = e's' = e' \}$, la U_d fermeture de celui-ci; D, la $\overline{\mathcal{D}}$ classe de S contenant les idéaux minimaux de $P_{e'}$; $e = e^2 \in Q_{e'} \cap \mathrm{D}$. Comme $\theta\mathrm{D} \cap \mathrm{D}' \neq \emptyset$, on a $\theta\mathrm{D} \subset \mathrm{D}'$. Montrons que $\theta\mathrm{D} = \mathrm{D}'$: si s' appartient à la $\overline{\mathcal{R}}$ classe R' de e', il existe $\bar{s}'$ tel que $e's'\bar{s}' = e'$. Donc $e \overset{-1}{\theta} s' \overset{-1}{\theta} \bar{s}' \ni f \in Q_e$ mais puisque D est de type élémentaire et que e' est dans l'idéal minimum de $Q_{e'}$, f appartient à la $\overline{\mathcal{R}}$ classe R de e et l'on a donc $\theta\mathrm{R} = \mathrm{R}'$. On montrerait de même que $\theta\mathrm{L} = \mathrm{L}'$ et $\theta\mathrm{K} = \mathrm{K}'$ pour les $\overline{\mathcal{L}}$ ou les $\overline{\mathcal{K}}$ classes de D. Par conséquent, $\delta^x_{\mathrm{D}'}\theta$S est une image homomorphe de δ^x_{D}S car, par exemple, $\delta^r_{\mathrm{D}} s_1 = \delta^r_{\mathrm{D}} s_2$ entraîne $\delta^r_{\mathrm{D}'}\theta s_1 = \delta^r_{\mathrm{D}'}\theta s_2$ puisque la première égalité signifie que pour tout $i \in \mathrm{I}$, l'ensemble d'indices des $\overline{\mathcal{L}}$ classes de D, ou bien $eu^i s_1 = eu^i s_2 \in \mathrm{R}$, ou bien $eu^i s_1 \cup eu^i s_2 \in \mathrm{S} - \mathrm{R}$.

2° Considérons la restriction de δ_D^x à D. Si D n'est pas régulière ([4]), $\delta_D^x D = 0$; si D est régulière, on peut choisir $\underline{k} = e$ et $u^i = eu^i \in R$. Donc, par exemple, δ_D^r est un isomorphisme pour R et, plus généralement, δ_D^x est idempotent. Si, en outre, D est de type élémentaire, $\delta_D^x S$ admet un seul idéal minimum différent de o qui est précisément $0 \cup \delta_D^x D$. Par conséquent, toute application θ' de $\delta_D^x S$ qui est un homomorphisme pour $\delta_D^x D$ et l'application identique en dehors de cet ensemble est un homomorphisme de $\delta_D^x S$.

3° Enfin, $\theta' \delta_D^x = \delta_D^x$ si θ' est un homomorphisme de $\delta_D^x S$ se réduisant à un isomorphisme pour $\delta_D^x D$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Supposons toujours D de type élémentaire. Si s appartient à la $\overline{\mathcal{L}}$ classe $L^{i'}$ de D, $eu^i s \in R$ entraîne que cet élément appartienne à $L^{i'}$ et l'on ne peut donc avoir $\delta_D^r s_1 = \delta_D^r s_2$ pour $s_1, s_2 \in D$ que si $s_1 = v_j \overset{-1}{\varphi}(\alpha_1) u^{i'}$ et $s_2 = v_{j'} \overset{-1}{\varphi}(\alpha_2) u^{i'}$ avec $\tilde{\varphi}(u^i v_j)\alpha_1 = \tilde{\varphi}(u^i v_{j'})\alpha_2$ pour tout $i \in I$. δ_D^r ne diffère donc de D que par l'identification des $\overline{\mathcal{R}}$ classes R_j et $R_{j'}$ satisfaisant une relation du type précédent. Il en est de même dualement pour δ_D^l et les $\overline{\mathcal{L}}$ classes de D et les deux opérations commutent manifestement quand D est de type élémentaire. On écrira selon des notations évidentes $\delta_D^k = \delta_D^r \delta_D^l = \delta_D^l \delta_D^r$.

Proposition 2. — 1° *Soit* S *un demi-groupe quelconque,* $\{P_n\}$ *une famille de demi-groupes* U_{x_n} *fermés de* $S (x_n = r, l, d$ *ou* $k)$, θ *un homomorphisme de* S *sur* S′ *tel que les* $P'_n = \theta P_n$ *possèdent des idéaux minimaux à gauche et à droite, et que* $\theta_{s_1} = \theta_{s_2}$ *si, et seulement si,* $s_1 \equiv s_2 (P_n)$ *pour tout* n ([5]), *alors* S′ *est isomorphe à la somme directe* $\delta S'$ *des représentations* $\delta_{D'_n}^{x_n} S'$ *où* D'_n *est la* $\overline{\mathcal{D}}$ *classe contenant l'idéal minimum de* P'_n.

Réciproquement, soit $S' = \theta S = \delta S'$ *où* δ *est de la forme précédente. Soit* E′ *l'ensemble des idempotents contenus dans* $\bigcup_n D'_n$, *alors,* θ *est tel que* $\theta s_1 = \theta s_2$ *si et seulement si,* $s_1 \equiv s_2 (T_{e'})$ *pour tout* $T_{e'} (e' \in E')$ *où* $T_{e'}$ *est indifféremment le noyau de* e' *ou la* U_d *fermeture de celui-ci.*

Démonstration. — 1° Puisque $\overset{-1}{\theta} P'_n = P_n$, tout homomorphisme θ' de S′ tel que $\theta' s'_1 = \theta' s'_2$ si, et seulement si, $s'_1 \equiv s'_2 (P'_n)$ pour tout n est un isomorphisme de S′. Donc les P'_n sont U_{x_n} fermés en même temps que les P_n. Soit $s'_1 \not\equiv s'_2$; par hypothèse, il existe un P'_n tel que, par exemple, $y' s'_1 z' = p' \in P'$ et $y' s'_2 z' = q' \notin P'$. Choisissons un idempotent $C' \not\equiv 0$ dans l'idéal minimum de $P'_n \subset D'_n$.

(r) si $x_n = r$, $q' \notin P'$ entraîne $e' q' \notin P'$ et comme $e' y'$ et $e' p'$ appartiennent à la $\overline{\mathcal{R}}$ classe de e', on a $\delta_{D'_n}^r s'_1 \not\equiv \delta_{D'_n}^r s'_2$;

(l) si $x_n = l$, on applique le même raisonnement en multipliant à droite par e' et $\delta_{D'_n}^l s'_1 \not\equiv \delta_{D'_n}^l s'_2$; (d) : si $x_n = d$, (r) *ou* (l) sont vrais ; (k) : si $x_n = k$, (r) *et* (l) sont vrais.

2° On a encore $s_1 \equiv s_2(\mathrm{T})$ si, et seulement si, $\theta s_1 \equiv \theta s_2(\theta \mathrm{T})$. Supposons donc que $\theta s_1 \not\equiv \theta s_2$. Par hypothèse il existe un idempotent e' tel que par exemple $e' \overline{\mathcal{R}} e' u'^i \theta s_1 = s'_1 \not\equiv s'_2 = e' u'^i \theta s_2$. Ou bien s'_1 et s'_2 appartiennent à la même $\overline{\mathcal{L}}$ classe et sont de la forme $\overset{-1}{\varphi}(\alpha_1) u^{i'} = s'_1$ et $\overset{-1}{\varphi}(\alpha_2) u^{i'} = s'_2$ avec $\alpha_1 \not\equiv \alpha_2$ et alors $s_1 \not\equiv s_2(\mathrm{T}_{e'})$. Ou bien ils appartiennent à deux $\overline{\mathcal{L}}$ classes différentes et alors $s_1 \not\equiv s_2(\mathrm{T}_{f'})$ où f' est un idempotent de l'une de ces classes.

(*) Séance du 8 avril 1957.

(1) *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 1994.

(2) Rappelons que $\mathrm{X}^{(-1)}\mathrm{Y} = \{s : \mathrm{X}s \cap \mathrm{Y} \neq \emptyset\}$. Un sous-demi-groupe P est U_d fermé si $\mathrm{P}^{(-1)}\mathrm{P} \cap \mathrm{P}\mathrm{P}^{(-1)} \subset \mathrm{P}$; U_r fermé (« unitaire à gauche ») si $\mathrm{P}^{(-1)}\mathrm{P} \subset \mathrm{P}$; U_l fermé (« unitaire à droite ») si $\mathrm{P}\mathrm{P}^{(-1)} \subset \mathrm{P}$; U_k fermé si $\mathrm{P}^{(-1)}\mathrm{P} \cup \mathrm{P}\mathrm{P}^{(-1)} \subset \mathrm{P}$.

(3) *Rend. Circ. Palermo.*, 81, 1951, p. 289-306.

(4) D. D. Miller et A. H. Clifford, *Trans. Amer. Math. Soc*, 82, 1956, p. 270-280.

(5) On pose après Mme Teissier (6) qui a étudié cette congruence : $s_1 \equiv s_2(\mathrm{P})$ si, et seulement si, pour tout y, $z \in \mathrm{S}$, $ys_1z \in \mathrm{A}$ entraîne $ys_2z \in \mathrm{P}$ et réciproquement.

(6) *Comptes rendus*, 232, 1951, p. 1987.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 244, p. 2219-2221, séance du 24 avril 1957.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
151778-57 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.