ALGÈBRE. — *Sur une propriété combinatoire des demi-groupes libres.* Note (*) de M. **Marcel-Paul Schützenberger**, présentée par M. Georges Darmois.

Soit S le demi-groupe [2] libre engendré par $F = \{f_i\}$, fini. On pose pour tout $s \in S$: $|s|_i =$ le nombre de fois où f_i figure dans l'expression de s et $|s| = \sum_i |s|_i$. Deux sous-ensembles W et W′ de S seront dits « commutativement équivalents d'ordre n » s'il existe une correspondance biunivoque $w_j \leftrightarrow w'_j$ entre les éléments de longueur inférieure à n de W et W′ telle que $\alpha w_j = \alpha w'_j$ dans toute image homomorphe commutative αS de S.

Proposition [1]. — *Si* $P = P^2 \subset S$ *satisfait les conditions* (U), P *est libre,* (N*), *il existe* $k < \infty$ *tel que pour tout* $s \in S$ *on puisse trouver* s', $s'' \in S$ *avec* $|s'| + |s''| \leq k$ *et* $s'ss'' \in P$, *alors, pour tout* $n < \infty$, *on peut construire* $P' = P'^2$, *commutativement équivalent d'ordre n à* P, *libre, et satisfaisant* (U_r), $P's \cap P' \neq \emptyset$ *entraîne* $s \in P'$ *et* (N_r), P′ *intersecte tous les idéaux à droite de* S [*d'après P. Dubreil* [2], P′ *est unitaire à gauche et net à droite et, d'après W. Feller,* P′ *correspond à un événement récurrent dont la probabilité n'est jamais zéro*].

On peut observer que (N*) est vérifiée notamment quand P satisfait (N), P intersecte tous les idéaux bilatères de S et (H), il existe un homomorphisme φ avec $\overset{-1}{\varphi}\varphi P = P$ tel que φS possède un idéal bilatère minimum fini. Donc, quand les éléments de l'ensemble Q des générateurs de P ont une longueur bornée, (N) est équivalent à (N*) [3].

On posera, pour tout $w \in W \subset S$,

$$\mathrm{Pr}(w) = \prod_i p_i^{|w|_i}; \qquad \Phi_W(t) = \sum_{w \in W} \mathrm{Pr}(w)\, t^{|w|},$$

où $\mathfrak{P} = \{p_i\}$ est une distribution de probabilités sur les f_i avec $p_i > 0$.

(T) [respectivement (T*)] sera la condition que pour au moins un $\mathfrak{P}$ (pour tout $\mathfrak{P}$) la racine τ de plus petit module de $\Phi_Q(t) = 1$ soit égale à 1 et l'on rappellera la proposition suivante :

Proposition. — (N*) *et* (U) *entraînent* (T*) ; (N*) *et* (T) *entraînent* (U) ; (U) *et* (T) *entraînent* (N).

Démonstration. — Soient c_1, c_2, ... des constantes strictement positives; $\overline{\mathrm{A}}(n) = n^{-1}\sum_{n'=0}^{n}\mathrm{A}(n')$ où $\mathrm{A}(n) = \sum_{|s|=n}\nu(s)\mathrm{Pr}(s)$ est le coefficient de t^n dans $\Phi_{\mathrm{P}}(t) = (1 - \Phi_{\mathrm{Q}}(t))^{-1}$ et $\nu(s)$ le nombre de décompositions de s en un produit d'éléments appartenant à Q;

$$\overline{\mathrm{B}}(n) = n^{-1}\sum_{n'=0}^{n}\mathrm{B}(n) = n^{-1}\sum_{|s|\leq n;\, s\in\mathrm{P}}\mathrm{Pr}(s).$$

(U) est équivalent à $\mathrm{A}(n) = \mathrm{B}(n)$, identiquement, et, comme $\overline{\mathrm{B}}(n) \leq 1$, (U) entraîne $\tau \geq 1$. Inversement si $\nu(p) \geq 2$ pour au moins un $p \in \mathrm{P}$, $\overline{\mathrm{A}}(n) \geq (1 + c_1)^n\mathrm{B}(n)$.

($\mathrm{N}^\star$) entraîne que tout s soit un diviseur d'au moins un $p \in \mathrm{P}$ avec $s| \leq |p| \leq |s| + k$. Donc

$$\overline{\mathrm{A}}(n) \geq \overline{\mathrm{B}}(n) \geq c_2\sum_{n'=n}^{n+k}\mathrm{B}(n') \geq c_3\sum_{|s|=n}\mathrm{Pr}(s) = c_3 \qquad \text{et} \qquad \tau \leq 1.$$

Inversement, s'il existait $s \in \mathrm{S}$ avec $\mathrm{S}s\mathrm{S} \cap \mathrm{P} = \varnothing$, on aurait $\mathrm{B}(n) < (1 - \mathrm{Pr}(s))^{c_4 n}$.

Par conséquent, (U) et ($\mathrm{N}^\star$) entraînent $\tau \geq 1$ et $\tau \leq 1$ pour tout $\mathfrak{T}$. Comme ($\mathrm{N}^\star$) implique $\overline{\mathrm{B}}(n) = c_5 + o(1)$, on ne peut avoir $\mathrm{A}(n)(\mathrm{B}(n))^{-1} > (1 + c_1)^n$ quand $\tau = 1$ puisqu'alors $\overline{\mathrm{A}}(n) < (1 + c_6)^n$ pour tout c_6. Enfin, comme $\tau = 1$ entraîne $\overline{\mathrm{A}}(n) > (1 - c_7)^n$ pour tout c_7 et que (U) implique $\overline{\mathrm{A}}(n) = \overline{\mathrm{B}}(n)$ on ne peut pas avoir $\mathrm{S}s\mathrm{S} \cap \mathrm{P} = \varnothing$.

Démonstration de la proposition principale. — Soit $\Phi_{\mathrm{Q}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}(n)t^n$. Les $\mathrm{C}(n)$ non nuls sont des polynomes homogènes en les p_i de degré n et ayant tous leurs coefficients entiers et non négatifs. En outre $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}(n) = 1$ identiquement quand $\sum_i p_i = 1$. Supposons d'abord que la longueur maxima $n^\star$ des éléments de Q soit bornée. Il suffira évidemment de montrer que sous les hypothèses précédentes $\Phi_{\mathrm{Q}}(t)$ est identique à $\Phi_{\mathrm{Q}'}(t)$ où Q′, l'ensemble des générateurs de P′, satisfait (U'_r), si q, $q' \in \mathrm{Q}'$ et $qs = q'$, alors $q = q'$ et (N'_r), pour tout $s \in \mathrm{S}$, ou bien $qs' = s$, ou bien $ss' = q$, avec $q \in \mathrm{Q}'$ et $s' \in \mathrm{S}$. Ceci est facilement vérifié quand $n^\star \leq 2$. Supposons-le établi pour $n^\star \leq n_0$ et soit Q avec $n^\star = n_0 + 1$. Il résulte des conditions que $\mathrm{C}(n_0 + 1)$ peut être écrit sous la forme $\mathrm{C}''(n_0)(\Sigma p_i)$ où $\mathrm{C}''(n_0)$ de degré n_0 satisfait encore les mêmes conditions. Par hypothèse il correspond donc à $\Phi_{\mathrm{Q}''}(t) = \Phi_{\mathrm{Q}}(t) - \mathrm{C}(n_0 + 1)t^{n_0+1} + \mathrm{C}''(n_0)t^n$ un ensemble Q″ avec les propriétés voulues. Définissons maintenant Q′ comme l'union des éléments de Q″ de longueur $n_0 - 1$, des éléments correspondants aux termes de $C(n_0)$ et des éléments de longueur n_0+1 formés en faisant suivre par l'une des lettres f_i les éléments correspondants aux termes de $C''(n_0)$. On vérifie sans peine que Q' est bien l'ensemble cherché.

Si Q n'est pas de longueur bornée, on considère pour tout n, l'ensemble tronqué Q_n correspondant à la fonction génératrice

$$\Phi_{Q_n}(t) = \Psi_n(t) + \Phi_Q(1) - \Psi_n(1))\, t^{n_0+1},$$

où $\Psi_n(t)$ est le polynome en t de degré n_0 identique aux n premiers termes de $\Phi_Q(t)$. Comme $Q'_{n-1} \cap Q'_n \subset Q'_{n+1}$ où Q' est l'ensemble obtenu à partir de Q par la construction précédente, la proposition est établie.

(*) Séance du 12 juin 1957.

(1) Ceci justifie la conjecture de R. S. Markus (*Quart. Prog. Rep. R. L. E.*, avril 1957) selon laquelle les codes « sans délai » [satisfaisant (U'_r)] sont strictement admissibles quels que soient les coûts des symboles élémentaires. La démonstration est d'ailleurs, comme on le verra, basée sur la méthode de D. Huffman (*I. R. E. Proc.*, 40, 1952, p. 1098) pour construire ces codes quand les $\Pr(q)$ $(q \in Q)$ sont des valeurs numériques données. L'admissibilité asymptotique pour des coûts égaux est un corollaire immédiat des théorèmes de C. Shannon ainsi que l'a noté B. Mandelbrojt (*Proc. Symp. Inf. Networks*, New York, 1954, p. 210). Une généralisation facile mais longue des remarques précédentes permet de vérifier l'admissibilité stricte pour des coûts quelconques des transitions de degré arbitraire fixe fini.

(2) *Mém. Acad. Sc. Inst. Fr.*, 63, 1941, p. 1-51. Sous l'hypothèse (H), (U_r) entraîne d'ailleurs (N_r) quand (N) et N_r entraîne (U_r) quand (U).

(3) Mais même en présence de (U_r), (N^*) n'entraîne pas nécessairement (H).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 245, p. 16-18, séance du 1er juillet 1957.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
152101-57 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.