Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL,
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1957/58

-:-:-:-

16 décembre 1957

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE SCHREIER SUR LES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE LIBRE PAR SON EXTENSION AU CAS DES DEMI-GROUPES LIBRES.

par M.P. SCHÜTZENBERGER.

1. Dans cet exposé, on fera toujours l'hypothèse que les demi-groupes considérés contiennent un élément unité e (sont des "monoïdes") et par "sous demi-groupe" on entendra "sous-demi-groupe contenant e" (c'est-à-dire "sous monoïde").

Le théorème de Schreier peut être formulé de la façon suivante :

(1) Une condition nécessaire et suffisante pour que le sous-demi-groupe H du groupe libre G soit un groupe libre est qu'il satisfasse la condition U_d :

$$U_d \; : \forall_G^s \quad sH \cap Hs \cap H \neq \emptyset \Rightarrow s \in H \ .$$

En effet, dans les conditions de l'énoncé, U_d signifie simplement que H est non seulement un sous-demi-groupe mais un sous-groupe de G. (Car si $s \in H$, on a $s s^{-1} = s^{-1} s = e \in H$ et , donc, $s^{-1} \in H$).

Par contre, la proposition analogue concernant les demi-groupes :

(1') Une condition nécessaire et suffisante pour que le sous-demi-groupe A du demi-groupe libre F soit un demi-groupe libre, est qu'il satisfasse U_d , peut être prouvée beaucoup plus directement (cf, par exemple, M.P. SCHÜTZENBERGER [6]) ou comme un corollaire d'un théorème de F. Levi ou, encore, comme un cas particulier d'un énoncé sur les produits libres de demi-groupes.

Le but de cet exposé est de montrer que la version "groupe" (1), du théorème de Schreier peut être déduite très simplement de la version "demi-groupe" (1') moyennant quelques corollaires des théorèmes généraux de la théorie des demi-groupes unitaires de P. Dubreil [1] (Section 2 ci-dessous) et une remarque combinatoire (section 3 ci-dessous) qui présente elle-même une certaine utilité pour un problème de mathématiques appliquées (celui de la marche au hazard sur un groupe libre).

2. Dans cette section, on considère un demi-groupe libre F , un groupe G (avec

l'élément neutre e') et un homomorphisme φ de F sur G .

PROPOSITION 2.1. - Si H est un sous-groupe de G , $A = \varphi^{-1} H$ est un sous-demi-groupe libre de F .

DÉMONSTRATION. - H est "unitaire" dans G (cf. P. DUBREIL [1]) (c'est-à-dire qu'il satisfait $U_k : \forall_G^s \; HsH \cap H \neq \emptyset \Rightarrow s \in H$). Donc A dans F satisfait U_k et, a fortiori, U_d . D'où le résultat, d'après (1').

REMARQUE. - On peut démontrer 2.1 directement en utilisant seulement le fait que F est libre et que A satisfait U_k . Soit $A_1 = (A - e) - (A - e)^2$ l'ensemble générateur de A . Il suffit de montrer que tout $x \in A - e$ a une représentation unique comme produit de $a \in A_1$. Supposons donc que $x = ab = a'b' \in A$ avec $a , a' \in A_1$ (et donc $b , b' \in A$, d'après U_k). Ou bien a est un diviseur à gauche de a' ou bien, l'inverse. Dans le premier cas, $a' = aa''$ et la condition U_k implique que $a'' \in A$. Comme $a' \in A_1$ ceci n'est possible que si $a'' = e =$ la suite vide et, donc, $a = a'$. Etc.

PROPOSITION 2.2. - Si H est un sous-groupe normal de G , A satisfait en outre aux deux conditions équivalentes suivantes :

$S \; : \forall_F^{x,y} \; xy \in A \Leftrightarrow yx \in A$ (A est "symétrique au sens de P. DUBREIL [1])

U_n : Deux quelconques des trois relations ci-dessous entraînent la troisième :

$$xyz \in A \quad ; \quad xz \in A \quad ; \quad y \in A \; .$$

et A intersecte tous les idéaux de F .

DÉMONSTRATION. - Il suffit de vérifier que les conditions sont satisfaites pour $H \subset G$.

PROPOSITION 2.3. - Réciproquement, si le sous-demi-groupe E de F intersecte tous les idéaux bilatères de F et satisfait U_n (ou U_d et S), il existe un homomorphisme φ de F sur un groupe G tel que $\varphi^{-1} e' = E$.

DÉMONSTRATION. - On vérifie facilement que U_d et S entraînent U_n (et U_k). Inversement (R.R. STOLL [7]) si E satisfait U_n et si $xy \in E$, on a $xyxy \in E$ et par conséquent $yx \in E$ (puisque $xyxy = x(yx)y$). L'implication $U_n \Rightarrow U_k$ est triviale.

Soit donc E satisfaisant les conditions de l'énoncé et φ l'homomorphisme associé à la relation d'équivalence sur F définie par $x \equiv y$ (E) si et seulement si pour tout z , $t \in F$

$$zxt \in E \Leftrightarrow zyt \equiv E .$$

On vérifie successivement :

i. $x \equiv y(E)$ pour tout x , $y \in E$.

Donc, φE est un élément idempotent e' de φF .

ii. Pour tout $x \in F$, il existe au moins un $x' \in F$ tel que $\varphi x \varphi x' = \varphi x' \varphi x = e'$. (Puisque E intersecte tous les idéaux bilatères, il correspond à tout x au moins une paire y , z avec $yxz \in E$ et, d'après S , $(zy)x$ et $x(zy)$ appartiennent à E).

Ces deux remarques prouvent que $G = \varphi F$ est un groupe et que E est bien le noyeau de φ .

PROPOSITION 2.3. - Dans les mêmes conditions 2.2., si φ' est un homomorphisme de F sur un groupe G'' (d'élément neutre e'') et si $\overset{-1}{\varphi} e' = E \subset E'' = \overset{-1}{\varphi} e''$, il existe un homomorphisme χ de G sur G'' telque $\varphi' = \chi \circ \varphi$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit évidemment de montrer que $x \equiv y$ (E) entraîne $x \equiv y$ (E'') . Or, si la première relation est vérifiée et si $zxt \in E''$, il existe u avec $xtzu \in E$, donc, $ytzu \in E \subset E''$. Mais, $xtz \in E''$ et $xtzu \in E \in E''$ impliquent $u \in E''$ et, d'après U_k , ytz (et donc $zyt) \in E''$.

PROPOSITION 2.4. - L'ensemble des sous-demi-groupes de F qui satisfont U_n forme un treillis $L(F)$ complet et, si F' est un sous-demi-groupe quelconque de F , $A \in L(F)$ entraîne $A \cap F' \in L(F')$.

La démonstration est une paraphrase de l'énoncé.

Les propositions 2,i et leurs démonstrations sont les cas particuliers de théorèmes établis par P. DUBREIL [1][2] , F. LEVI [3][4] et R.R. STOLL [7] .

3. Dans cette section on considère encore un demi-groupe libre F engendré par l'ensemble $F_1 = \{f\}$ et une application involutive fixe $f \to f^*$ de F_1 sur lui-même. Cette application est étendue de façon naturelle à un antiisomorphisme de F par $e^* = e$; $(xy)^* = y^* x^*$.

F_1 se décompose en deux sous-ensembles :

F_1' , consistant en tous les $f \in F_1$ tels que $f = f^*$

F_1'' , consistant en toutes les paires (f , f') telles que $f^* = f' \neq f = f'^*$.

On suppose que l'on a su choisir un élément dans chacune de ces paires et on désigne par G_1 l'ensemble de ces éléments.

Enfin on dénote par F_2 l'ensemble formé par l'union de F_1' et des produits ff^* où $f \in F_1''$.

Soit maintenant G le groupe libre engendré par G_1 . On définit une application θ de F_1 sur $\{G_1 \cup e'\}$ par les règles suivantes :

Si $f \in F_1'$, $\theta f = e'$

Si $f \in G_1$, $\theta f = f$

Si $f = f'^*$ et $f' \in G_1$, $\theta f = f'^{-1}$.

Puisque F est libre, θ peut être étendue de façon naturelle à un homomorphisme de F sur G dont le noyau $\theta^{-1} e'$ sera désigné par E .

PROPOSITION 3.1. - Si $x \in E$ est de la forme fyf' avec f , $f' \in F_1$ et $f^* \neq f'$, alors $x = zt$ où z et t appartiennent tous les deux à $E - e$.

DÉMONSTRATION. - Pour simplifier, nous utilisons le résultat bien connu que E est l'ensemble des suites finies de symbôle $\{f\}$ qui peuvent être réduites à la suite vide e par cancellation répétée de paires d'éléments appartenant à F_2 . Si donc les conditions de l'énoncé sont remplies, la dernière cancellation ne peut être celle de ff' puisque ce produit n'appartient pas à F_2 . Donc x doit avoir la forme $fy'f^*y''f'$ où $z = fy'f^* \in E$ n'est pas la suite vide. D'après U_n , $t = y''f'$ appartient aussi à $E - e$.

PROPOSITION 3.2. - Le noyau E peut être défini de façon équivalente comme le plus petit sous-demi-groupe $E' \in L(F)$ qui contienne F_2 ou, E'' qui contienne le sous ensemble F^* des $x \in F$ tels que $x = x^*$.

DÉMONSTRATION. - Que E soit le plus petit sous-demi-groupe contenant F_2 est une conséquence directe de 2.3 et 2.4 quand E est défini comme $\theta^{-1} e'$ où e' est l'élément neutre du groupe libre G . Réciproquement, E' , d'après 2.2, est le noyau d'un homomorphisme sur un groupe (la condition accessoire que E intersecte tous les idéaux bilatères est automatiquement satisfaite puisque pour tout x , $xx^* \in E$, d'après S) et ce groupe est libre d'après la proposition 2.3 et le caractère minimal de E .

D'autre part, si $E'' \in L(F)$ contient F^* , il contient en particulier F_2 (car pour tout x , $(xx^*)^* = x^{**}x^* = xx^*$) et réciproquement, $E' = E''$.

En effet, en raisonnant par récurrence sur la longueur $|x|$ de x, le résultat est vrai par hypothèse quand $|x| \leq 2$. Quand $|x| > 2$, et $x = x^*$, x a la forme fyf^* où $f \in F_1$ et y, de longueur $|x| - 2$, appartient à E'' puisqu'il satisfait $y = y^*$.

REMARQUE. – Dans l'application évoquée au début de cet exposé, on doit considérer l'ensemble générateur E_1 de E consistant en les $x \in E$ tels que $x = yz$, $y \in E - e$ implique $z = e$ et $y = x$. Les deux propositions précédentes permettent de montrer que E_1 est en correspondance biunivoque avec l'ensemble union de F'_1 et des suites de la forme $xyztx^*$ avec $|x| \geq 1$ et, soit $yzt = e$, soit y et z appartenant à E_1 et étant respectivement de la forme $y = fy'$ et $z = z'f'$ avec f, $f' \in F_1$ et $f^* \neq f'$ (et évidemment, toujours, $z \in E$).

4. DÉMONSTRATION du théorème de Schreier (1). – Soit maintenant, avec les notations de la section 3, H un sous-groupe de G.

On a les résultats suivants :

i. D'après 1.1, $A = \theta^{-1} H$ est un demi-groupe libre.

ii. Puisque $e' \in H$, $E \subset A$ et, d'après 2.4, $E \in L(A)$.

iii. E est le noyau de la restriction de θ à A.

iv. Puisque $aa^* \in E$, a et a^* appartiennent en même temps à A. Donc, en posant $A_1 = (A - e) - (A - e)^2 =$ l'ensemble générateur de A (cf. la remarque de la section précédente), la restriction de * à A_1 est une application involutive de cet ensemble sur lui-même et l'on peut définir A'_1, A''_1, etc. pour $(A, ^*)$ comme on l'a fait pour $(F, ^*)$. En particulier, soit K le plus petit sous-demi-groupe de $L(A)$ qui contienne A_2.

Il est immédiat que $K \subset E$ et, d'après 3.2, le théorème de Schreier sera prouvé si l'on peut montrer que $K = E$ puisqu'alors $H = \theta A$ sera l'image du demi-groupe libre A par un homomorphisme θ dont le noyau a les propriétés minimales voulues.

Soit donc $x \in E$. Si $|x| \leq 2$, il est certain que $x \in K$. Supposons donc établi pour tous les éléments de longueur $\leq n$ que $x \in E$ entraîne $x \in K$ et soit maintenant $x \in E$ de longueur $n + 1$.

Si x est de la forme fyf^*, y appartient à E (d'après U_n) et, par hypothèse à K puisque $|y| = n - 1$. D'autre part, comme $E \subset A$, x appartient à A ainsi que xx^*. Mais, $(xx^*)^* = xx^*$ et, par conséquent, $xx^* \in K$ (proposition 3.2). En particulier, ff^* appartient à K, (puisqu'à E) pour tout $f \in F_1$.

Donc, en appliquant U_n à $xx^* = fyf^*fy^*f = fy(f^*f)(y^*)f^*$ (où les éléments qui appartiennent à K et qui peuvent être éliminés sont mis entre parenthèses) on trouve $fyf^* = x \in K$.

Ceci achève la démonstration, puisque, d'après la proposition 3.1, si x n'était pas de la forme précédente, on aurait $x = yz$ avec y, $z \in E - e$ et par conséquent de longueur au plus égale à n, et, donc enfin, par hypothèse, y, $z \in K$ et $x = yz \in K$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes, Mem. Acad. Sc. Inst. France, t. 63, n° 3, 1941, p. 1-52.

[2] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes (II), Univ. Roma, Rendic. Mat.., Série 5, t. 10, 1951, p. 183-200.

[3] LEVI (F.W.). - On semi-groups, Bull. Calcutta math. Soc., t. 36, 1944, p. 141-146.

[4] LEVI (F.W.). - On semi-groups II, Bull. Calcutta math. Soc., t. 38, 1946, p. 123-124.

[5] SCHREIER (Otto). - Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. math. Sem. Hamb. Univ., t. 5, 1927, p. 161-183.

[6] SCHUTZENBERGER (M.P.). - Une théorie algébrique du codage, Séminaire Dubreil et Pisot, 9e année, 1955/56, exposé n° 15.

[7] STOLL (R.R.). - Homomorphisms of a semigroup onto a group, Amer. J. of Math., t. 73, 1951, p. 475-481.