A PROPOS DE L'INÉGALITÉ DE FRÉCHET-CRAMER

Marcel Paul SCHUTZENBERGER

1/ - Le but de cette note (1) est de montrer comment l'inégalité classique de Fréchet-Cramer s'applique au cas de l'estimation de Bayes, c'est-à-dire à celui où le paramètre à estimer, x, possède une densité de probabilité à priori f(x). Comme dans le cas habituel, nous supposons que la fonction de coût d'erreur est quadrique et qu'un nombre constant N de variables y_i est observé. Les y_i sont distribués indépendament avec la densité conditionnelle $g(\frac{y}{x})$ et l'ensemble des N valeurs observées est désigné par le vecteur z. On supposera que la densité :

$$h(z;x) = f(x) \prod_i g(\frac{y_i}{x})$$

est presque partout différentiable et ne s'annule pour aucune valeur finie de ses arguments. On posera : $f^*(z)$ = la densité de probabilité de z ; $g^*(\frac{x}{z})$ = la densité de probabilité (à posteriori) de x pour z observé.

2/ - Etablissement de l'inégalité.

Pour toute fonction d'estimation $x\#(z)$ on a :

$$E\,(x - x\#(z))^2 \geqslant \left(\frac{1}{F + N\,E_x G(x)}\right) \tag{2}$$

où E_u (resp. E) désigne la valeur moyenne par rapport à u (resp. par rapport à x et à z) et où

$$F = E_x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \;;\; G(x) = E_y\left(\frac{\delta}{\delta x}\quad \frac{g(\frac{y}{x})}{g(\frac{y}{x})}\right)^2$$

---

(1) Je tiens à signaler que cette extension a été obtenue par plusieurs auteurs indépendamment : Mr D. Slepian (de la Cie Bell) communication personnelle; Mr J. Dard (article à paraître dans "Annals of Mathematical Statistics"). Aucun de nous n'a publié autre chose que des résumés de ses résultats.

Démonstration.

On part du résultat classique :

$$E(x - x\#(z))^2 = E(x - \bar{x}(z))^2 + E(\bar{x}(z) - x\#(z))^2 > E_z\, v(z)$$

où $\bar{x}(z)$ et $v(z)$ sont respectivement la moyenne et la variance de $g^*(\frac{x}{z})$.

D'après l'inégalité de Weyl, $v(z) \geqslant \frac{1}{G^*(z)}$ (où $G^*(z)$ est la valeur moyenne du carré de la dérivée logarithmique de $g^*(\frac{x}{z})$) donc, par convexité :

$$E_z\, v(z) \geqslant (E\ v(z)^{-1})^{-1} \geqslant (E_z G^*(z))^{-1}.$$

Comme d'autre part en calculant la valeur moyenne du carré de la dérivée logarithmique (par rapport à x) de $h(z;x)$ on obtient l'identite :

$$E_z G^*(z) = F + N\, E_x\, G(x)$$, le résultat est établi.

(2) ne diffère de l'inégalité classique que par la présence de F.

3/ - Conditions d'égalité.

Reprenant le raisonnement précédent, on voit que trois conditions sont nécessaires et, dans l'ensemble, suffisantes pour que l'on ait égalité dans (2). Ce sont :

1) $x\#(z) = \bar{x}(z)$

2) $v(z)\, G^*(z) = 1$,

pour presque toutes les valeurs de z, c'est-à-dire : $g^*(\frac{x}{z})$, une distribution de Laplace-Gauss pour presque toutes les valeurs de z.

3) $v(z)$, une constante.

Il en résulte, en inversant les données du problème, qu'à toute densité $f^*(y)$ et à toute fonction $b(y)$ fixant arbitrairement la régression de x sur y, correspondent des fonctions $f(x)$ et $g(\frac{y}{x})$ donnant lieu à l'égalité dans (2).

Considérons maintenant le cas qui présente un certain intérêt pratique où y est en régression dure sur x, c'est-à-dire où y est la somme d'une fonction certaine $a(x)$ et d'un bruit de densité de probabilité indépendante de x.

On va voir que sous cette condition en apparence très faible il ne peut y avoir égalité dans (2) que si la distribution simultanée de x et y est une distribution de Laplace Gauss à deux variables, tout au moins quand on impose à a(x) d'être une fonction analytique de x.

Soit donc à résoudre l'équation fonctionnelle :

$$2\pi f(x)\, g(y - a(x)) = f^*(y) \exp - \frac{1}{2}(x - b(y))^2 \qquad (3)$$

où f, g et f* sont des densités de probabilité admettant des dérivées logarithmique du premier ordre. On obtient en dérivant :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - a'(x)\,\frac{g'(y - a(x))}{g(y - a(x))} = b(y) - x$$

$$\frac{g'(y - a(x))}{g(y - a(x))} = \frac{f^{*\prime}(y)}{f^*(y)} + b'(y)(x - b(y)).$$

On peut évidemment admettre que a'(x) n'est pas identiquement nulle car le contraire reviendrait à supposer que x et y sont indépendants. En éliminant $\frac{g'}{g}$ on obtient :

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)} + x\right)(a'(x))^{-1} + b(y)\, b'(y) - \frac{f^{*\prime}(y)}{f^*(y)} - \frac{b(y)}{a'(x)} + x b'(x) = 0. \qquad (4)$$

Désignons cette expression par K(x, y) et formons la différence :

$K(x + h; y + h) - K(x + k; y) - K(x; y + h) + K(x; y)$, il vient :

$$(b(y + h) - b(y))\left(\frac{1}{a'(x + k)} - \frac{1}{a'(x)}\right)^{-1} + k(b'(y + h) - b'(y)) = 0.$$

Si b'(y) est une constante, il en est de même de a'(x) et en portant ces résultats dans (4), on vérifie que h(x;y) est une densité de Laplace-Gauss.

Si b'(y) est une fonction de y non réduite à une constante, la dernière équation reécrite sous la forme :

$$(b(y + h) - b(y))(b'(y + h) - b'(y))^{-1} = k\left(\frac{1}{a'(x + k)} - \frac{1}{a'(x)}\right)^{-1}.$$

Ceci implique que les deux membres soient égaux à une constante, donc que b(y) soit une fonction exponentielle et a(x) une fonction logarithmique ; portant ces résultats dans (4), on constate que les variables se séparent encore et l'on obtient finalement :

$$f(x) = C_1(x + \alpha)^{\frac{\beta}{\mu}} \exp - \frac{(x - \nu)}{2}$$

$$f^*(y) = C_2 \exp \{ \beta y + \frac{1}{2} (\alpha + \nu + \lambda e^{\mu y})^2 \}$$

$$g(y;x) = C_3 \exp \{ \beta (y - \mu^{-1} \mathrm{Log}(x + \mu)) + \lambda e^{-\mu y + \mathrm{Log}(x + \alpha)} \}$$

ou $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ et ν sont des constantes arbitraires et C_1, C_2, et C_3 des constantes fixées par normalisation.