ALGÈBRE. — *Sur les homomorphismes d'un demi-groupe sur un groupe.*

Note de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Georges Darmois.

En vue de leur utilisation dans un problème de mathématiques appliquées on déduit des théories générales développées dans (1), (2), (3) deux caractérisations de ces homomorphismes.

Notations. — S, $R = RS$, $L = SL$ désigneront toujours un demi-groupe (2) avec l'élément neutre e et deux de ses idéaux. $\tilde{\xi}$ étant une équivalence sur S, ${}_{R}\xi_{L}$ désignera l'homomorphisme naturel associé à la congruence $a\,{}_{R}\tilde{\xi}_{L}\,b \rightleftharpoons \forall^{r,l}_{R,L}\, ral\,\tilde{\xi}\,rbl$; si $\tilde{\xi}$ n'a que deux classes X et $S - X$ [*cf.* (1)] et que $R = L = S$, on écrira φ_X au lieu de ${}_{S}\xi_{S}$; si $T \subset S$, $[\tilde{\xi}]^{T}$ désignera la restriction de $\tilde{\xi}$ à $T \times T$; on utilisera les remarques suivantes : 1° [*cf.* (1), section IV], soit $\psi : S \to S'$, un épimorphisme, $\tilde{\xi}'$ une équivalence sur S', $R' = \psi R$, $L' = \psi L$; le demi-groupe quotient ${}_{R'}\xi'_{L'}S'$ est isomorphe à ${}_{R}\xi_{L}S$ où $\tilde{\xi}$ est définie par $a\tilde{\xi}b \rightleftharpoons \psi a\,\tilde{\xi}'\,\psi b$; en particulier si S' est un groupe avec zéro ${}_{R}\xi_{L}S = {}_{S}\xi_{S}S = {}_{R'}\xi'_{L'}S'$ dès que $\psi LR \neq 0$. 2° En tant que partie de $S \times S$, ${}_{R}\tilde{\xi}_{L}$ contient l'union de toutes les congruences $\tilde{\varphi}$ telles que $[\tilde{\varphi}]^{RL} \subset [\tilde{\xi}]^{RL}$ et lui est donc égale quand $[{}_{R}\tilde{\xi}_{L}]^{RL} \subset [\tilde{\xi}]^{RL}$; cette condition est vérifiée quelle que soit $\tilde{\xi}$ quand R et L sont des unions d'idéaux principaux idempotents, donc quand $R = L = S$ (3); elle entraîne que l'image de $\tilde{\xi}$ par ${}_{R}\xi_{L}$ soit une équivalence $\tilde{\xi}' = {}_{R}\xi_{L}\tilde{\xi}$ sur $S' = {}_{R}\xi_{L}S$ et que ${}_{R'}\xi'_{L'}$ soit l'application identique de S' sur lui-même.

I. *Soit* $\emptyset \neq Y \subset S$; *il existe un homomorphisme* γ *de* S *sur un groupe avec* $\overset{-1}{\gamma}\gamma Y = Y$, *si et seulement si, pour tout* $s \in S$, $Ss \cup sS$ *contient un* n *tel que* $ab \in Y \rightleftharpoons anb \in Y$.

Démonstration. — Considérons plus généralement une équivalence $\tilde{\xi}$ et soit $N = \mathfrak{N}(\tilde{\xi}) = \{n \in S : ab\,\tilde{\xi}\,anb\}$ [*cf.* (1), section V]; N satisfait ($\star$) : si $n \in N$, $xy \in N \rightleftharpoons xny \in N$, ce qui entraîne que $\varphi_N N$ soit un élément unique e' de $S' = \varphi_N S$; e' est un élément neutre puisque $e \in N$; comme $\varphi_N s = 0 \rightleftharpoons SsS \cap N = \emptyset$, il y a pour tout $s' \in S' - 0$ au moins une paire r', l' avec $r's'l' = e'$; S' n'a donc pas d'idéaux bilatères propres sauf 0. Considérons sa représentation par des translations à droite; si $r'l' = e'$, r' correspond à une injection et l' à une surjection; réciproquement si l' correspond à une surjection, il existe r' avec $r'l' = e'$; donc la $\overline{\mathcal{H}}$, $\overline{\mathcal{R}}$ et $\overline{\mathcal{L}}$-classe de e' correspondent respectivement au groupe G' des bijections, au demi-groupe simplifiable à droite des injections qui appartiennent à la $\overline{\mathcal{D}}$-classe de e', au demi-groupe simplifiable à gauche des surjections. On en conclut que S', qui n'est pas nécessairement un groupe (6), se réduit à $G' \cup o$ quand il admet un idéal à droite minimal en dehors de o ($\Leftrightarrow$ un s' tel que $s's'' \neq o \Rightarrow s' \in s's''S'$) ou quand $s' \neq o \Rightarrow e' \in S's' \cup s'S'$. Soit $T = S - \overset{-1}{\varphi}_N o$; $\tilde{\eta}$ l'équivalence telle que $[\tilde{\eta}]_T = [\tilde{\tilde{\xi}}]^T$ admettant la classe $S - T$; $M = \mathfrak{N}(\tilde{\eta})$; $\tilde{\tilde{\xi}}{}' = {}_S\xi_S\tilde{\tilde{\xi}}$; on a : $\mathfrak{N}(\tilde{\tilde{\xi}}{}') = {}_S\xi_S N$ et, si $\varphi_N S$ est un groupe avec zéro, ce que nous supposons désormais, $[\tilde{\varphi}]^T \subset [\tilde{\tilde{\xi}}]^T$; $N \subset M$; $SsS \cap M \neq \varnothing \Leftrightarrow s \in T$; ${}_S\tilde{\tilde{\xi}}_S \subset \tilde{\varphi}_N \subset {}_S\tilde{\eta}_L = \tilde{\varphi}_M$. D'où le résultat énoncé puisque alors $S' = G'$ et $\tilde{\eta} = \tilde{\tilde{\xi}}$.

Remarque. — Moyennant des hypothèses d'une nature différente, ($\star$) peut être affaiblie; soit $A \subset S$ intersectant tous les idéaux bilatères et tel que $\varphi_A S$ admette des bi-idéaux minimaux. $\varphi_A S$ est un groupe si et seulement si :

$A^2 \subset A$ et $a \in A$ & $xay \in A \Rightarrow xy \in A$; ou bien (2) :

$A(S - A)A \subset S - A$ et $a \in A$ & $xy \in A \Rightarrow xay \in A$ (3), (4). Ces trois propriétés s'établissent directement au moyen de la représentation de Miller et Clifford (5) en observant que tout homomorphisme ψ de $B = SBS$ *dans* un groupe avec zéro G' peut être étendu de façon unique à un homomorphisme (se réduisant à ψ sur B) de tout S *dans* G'.

II. *Soit* $\varnothing \neq H \subset S$; *il existe un homomorphisme* γ *de* S *sur un groupe avec* $\overset{-1}{\gamma}\gamma H = H$ et $\gamma H = h$, *un élément unique, si et seulement si :* (1) H *intersecte tous les idéaux bilatères* de S; (1′) $HSHS \cap H \neq \varnothing$;

$$(\star\star) \qquad xHy \cap H \neq \varnothing \Rightarrow xHy \subset H \;\&\; x(SHS - H)y \subset S - H \quad (9).$$

Démonstration. — Supposons seulement (1′) et ($\star\star$). $\varphi_H H$ étant réduit à un élément unique, on fera pour simplifier l'hypothèse que $\varphi_H S = S$; $H = h$; $\{s = o \Leftrightarrow h \notin SsS\}$. Soient a et b avec $hahb = h$; on a $hahbahb = h$, donc, d'après ($\star\star$), $hbah = h$; on pose $h' = bahba$ (5). Supposons qu'il existe x, y et k avec $xh = k$ et $ky = h$; on a $xhy = h$, donc $xhyh'xhy = h$, donc d'après ($\star\star$) $hyh'xh = h$; par conséquent $h = (hyh')k$ et $k = h(h'k)$; $D = SHS - o$ est donc une $\overline{\mathcal{D}}$ classe régulière élémentaire (5). Soit $f = f^2$; ou bien $fh = o$, ou bien $f^2h = fh$ et d'après ($\star\star$) $fh = h$ (10); en particulier, si f appartient à la $\overline{\mathcal{L}}$-classe de hh', on a $fhh' = f \neq o$, donc $fh = h$ et $f = hh'$. Observons maintenant que S est isomorphe à sa représentation à droite sur D et que, par conséquent hx et hy sont égaux si et seulement si $hxz = h \Leftrightarrow hyz = h$ pour tout $z \in Sh$; en particulier, si $hx = (hx)^2 \neq o$, on a $hx = hh'$, car, hx et hh' étant les seuls idempotents de leurs $\overline{\mathcal{L}}$-classes, $hxz = h$, $z \in Sh$, n'est possible que si $z = h$; donc, finalement, h a un inverse unique h'.

Supposons maintenant au lieu de (1) que

$$SsS \cap H \neq \emptyset \Rightarrow H \cap (SHsS \cap SsHS) \neq \emptyset.$$

D se réduit au (x) $\overline{\mathcal{H}}$-classe (s) contenant h, h', hh' et $h'h$ et, en utilisant le fait que S est isomorphe à sa représentation à droite sur D, on vérifie que S est égal à D ou à $D \cup o$. Dans les conditions de l'énoncé, $S = D$ et D n'a qu'une seule $\overline{\mathcal{H}}$-classe puisque $h^2 \neq o$.

Remarques. — 1° Si $RHL \cap H \neq \emptyset$, la condition « pour tout $(r, l) \in (R, L)$, si $rHl \cap H \neq \emptyset$ alors $rHl \subset H$ et $r(SHS - H)l \subset S - H$ » entraîne (★★). Ceci rapproche la propriété énoncée du théorème 18 de ([1]) et de la condition de F. W. Levi [([4]) et *cf.* ([7])] caractérisant les noyaux d'homomorphismes sur un groupe $[(xy \in N \Rightarrow xay \in N \Leftrightarrow a \in N)]$.

2° Les démonstrations données peuvent aussi être basées sur l'observation suivante : soient $A_i (i \in I_R)$ les classes intersectant R pour l'équivalence : $x \xi_L y \Leftrightarrow \forall^l_L xl \overline{\xi} yl$; $\mathbf{A}(s)$, la $I_R \times I_R$ matrice avec $\mathbf{a}^{i'}_i(s) = 1$ ou o selon que $A_i s \subset A_{i'}$ ou non; $\mathbf{B}(s)$ définie de façon symétrique pour ${}_R\overline{\xi} (\forall^r_R : rx \overline{\xi} ry)$; pour chaque classe X de $\overline{\xi}$, $\mathbf{X}(s)$ la $I_R \times I_L$ matrice avec $\mathbf{x}^{i'}_i(s) = 1$ ou o selon que $A_i s B_{i'} \subset X$ ou non. On a identiquement $\mathbf{A}(s)\mathbf{X}(s') = \mathbf{X}(s)\mathbf{B}(s') = \mathbf{X}(ss')$ et les demi-groupes $\{\mathbf{A}(s)\}$ et $\{\mathbf{B}(s)\}$ sont isomorphes à ${}_R\xi_L S$. Ceci permet facilement d'établir la propriété suivante : une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_H S$ soit un groupe avec zéro avec $\varphi_H H =$ un élément unique différent de zéro est que : 1° $RHL \cap H \neq \emptyset$, 2° $rHl \cap H \neq o \Rightarrow rHl \subset H$; 3° $rl \in H \,\&\, r'l \in H \,\&\, rl' \in H \Rightarrow r'l' \in H$ [H est « fort » au sens de P. Dubreil ([2]) relativement à R, L]; 4° si $ral \in H \Rightarrow rbl \in H$ alors $ral \in H \Leftrightarrow rbl \in H$ (ceci exprime quand S est un groupe, que si H est un segment d'un préordre régulier, il est nécessairement une classe de la congruence associée); 5° $SsS \cap H \neq \emptyset \Rightarrow (SsH \cup HsS) \cap H \neq \emptyset$ (où, de façon équivalente ici, $SsS \cap H \neq \emptyset \Rightarrow HSsSH \cap H \neq \emptyset$).

([1]) R. Croisot, *J. Math. Pures Appl.*, 36, 1997, p. 373-417.

([2]) P. Dubreil, *Mem. Acad. Inst. France*, 63, 1941, p. 1-52.

([3]) P. Dubreil, *Univ. Roma Rendic. Mat.*, 10, 1951, p. 183-200.

([4]) F. W. Levi, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 36, 1944, p. 141-146.

([5]) D. D. Miller et A. H. Clifford, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82, 1956, p. 270-280.

([6]) G. B. Preston, *Bull. Amer. Mat. Soc.*, 5, 1958, Abst. 540 20.

([7]) R. R. Stoll, *Amer. J. Mat.*, 73, 1951, p. 475-481

([8]) M. Teissier, *Comptes rendus*, 232, 1951, p. 1987.

([9]) (★★) est nécessaire [*cf.* ([1]), section V] car chacune des deux implications qu'elle comporte entraîne, quand S est un groupe, que H soit une classe d'un sous-groupe normal.

([10]) Plus généralement $hx \neq o \,\&\, ux = x \Rightarrow hu = h$; et si $u \in Sh$; alors $u^2 = u$.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. **246**, p. 2442-2444, séance du 28 avril 1958.)

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
153709-58 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55. Imprimé en France.