ALGÈBRE. — *Sur la représentation monomiale des demi-groupes.*
Note de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Georges Darmois.

On applique aux demi-groupes avec unité (monoïdes) la méthode utilisée en théorie des groupes pour définir les représentations monomiales.

Notations. — Soient A et B deux demi-groupes commutant d'applications dans lui-même de l'ensemble $\Sigma^\star = \{\sigma\}$. Il sera commode de supposer que A et B sont les images homomorphes αS et βS d'un certain demi-groupe S avec unité (e) et d'écrire $s\sigma s'$ au lieu de $\sigma.\alpha s'.\beta s = \sigma.\beta s.\alpha s'$.

On utilisera les relations suivantes sur $\Sigma^\star \times \Sigma^\star$:

$$\sigma' \mathcal{T}_A \sigma \rightleftharpoons \sigma' \in \sigma S; \qquad \sigma' \mathcal{T}_B \sigma \rightleftharpoons \sigma' \in S\sigma; \qquad \sigma' \mathcal{T}_S \sigma \rightleftharpoons \sigma' \in S\sigma S;$$
$$\overline{\mathcal{T}}_A = \mathcal{T}_A \cap \mathcal{T}_A^{-1}; \qquad \overline{\mathcal{T}}_B = \mathcal{T}_B \cap \mathcal{T}_B^{-1}; \qquad \overline{\mathcal{T}}_S = \mathcal{T}_S \cap \overline{\mathcal{T}}_S^{-1}; \qquad \overline{K} = \overline{\mathcal{T}}_A \cap \overline{\mathcal{T}}_B.$$

On sait [J. A. Green (1)] que $\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{T}}_A \circ \overline{\mathcal{T}}_B = \overline{\mathcal{T}}_B \circ \overline{\mathcal{T}}_A \subset \overline{\mathcal{T}}_S$ est une équivalence et l'on dira qu'une partie Σ' de $\Sigma^\star$ est « A-élémentaire » si l'on a identiquement sur Σ' : $\mathcal{T}_A^{-1} \cap \mathcal{T}_B = \overline{\mathcal{T}}_A \cap \mathcal{T}_B$. Une $\overline{\mathcal{T}}_S$ classe qui est à la fois A- et B-élémentaire se réduit à une seule $\overline{\mathcal{D}}$-classe et sera dite « élémentaire ».

Définition de la représentation. — On considère désormais une $\overline{\mathcal{D}}$-classe, Σ, fixe et l'on désigne respectivement par $\Sigma^i (i \in I)$; $\Sigma_j (j \in J)$; $\Sigma^i_j = \Sigma^i \cap \Sigma_j$ ses $\overline{\mathcal{T}}_B$-, $\overline{\mathcal{T}}_A$- et $\overline{K}$-classes. On choisit arbitrairement des éléments σ^i_1 et σ^1_j dans chacune des $\overline{K}$-classes Σ^i_1 et Σ^1_j. D'après la définition même de $\overline{\mathcal{T}}_A$ et $\overline{\mathcal{T}}_B$, il existe deux systèmes $\{a_1, a^1_i\}$ et $\{b^1_j, b^j_1\}$ tels que

$$\sigma^1_1 a^i_1 = \sigma^i_1; \qquad \sigma^i_1 a^1_i = \sigma^1_1; \qquad b^1_j \sigma^1_1 = \sigma^1_j; \qquad b^j_1 \sigma^1_j = \sigma^1_1.$$

On fera usage de la remarque suivante :

($\star$) *Si* $\sigma s = \sigma s' = \sigma' \in \Sigma^{i'}$ *pour un* $\sigma \in \Sigma^i$ *alors* $\sigma'' s = \sigma'' s' = \sigma''' \in \Sigma^{i'}$ *pour tous les* $\sigma'' \in \Sigma^i$.

En effet, il existe $b, b' \in B$ tels que $b\sigma = \sigma''$ et $b'\sigma'' = \sigma$. Donc

$$\sigma'' s = b\sigma s = b\sigma s' = \sigma'' s' = \sigma''' \qquad \text{et} \qquad b'\sigma''' = b'\sigma'' s = \sigma s = \sigma'.$$

Si $A^i = \{s : \Sigma^i s \cap \Sigma^i \neq \emptyset\} = \{s : \Sigma^i s \subset \Sigma^i\}$, la restriction à Σ^i de la représentation $(\Sigma^\star, A^i)$ induit un homomorphisme $\varphi_i : A^i \to \overline{A}^i$. Comme $\sigma^1_1 a^i_1 a^1_i = \sigma^1_1$ et

$\sigma_1^i a_i^1 a_1^i = \sigma_1^i$ il résulte de la remarque précédente ($\bigstar$) que $\varphi_1 a_1^i a_i^1 = \varphi_1 e$ et $\varphi_i a_i^1 a_1^i = \varphi_i e$. Les applications de A^i dans A^1 et de A^1 dans A^i :

$$a \to a_1^i a a_i^1 \quad (a \in A^i) \qquad \text{et} \qquad a \to a_i^1 a a_1^i \quad (a \in A^1)$$

sont donc des isomorphismes entre $\overline{A}^i$ et $\overline{A}^1$.

On désigne par o un nouvel élément servant de zéro au demi-groupe $\overline{A}^\star = \overline{A}^1 \cup O$, et, à tout $s \in S$, on attache la $I \times I$ matrice $M(s)$ définie par

$$m_i^{i'}(s) = \varphi_1(a_1^i s a_{i'}^1) \quad \text{si } \sigma_1^i s \in \Sigma^{i'}; \qquad = \text{o} \quad \text{si } \sigma_1^i s \notin \Sigma^{i'}.$$

On a évidemment $M(s)M(s') = M(ss')$ identiquement, et l'on définirait de façon duale les $J \times J$ matrices $N(s)$ n'ayant cette fois qu'un élément non nul au plus par colonne.

D'après ($\bigstar$), l'équation en $\bar{x}$, $\bar{a}\bar{x} = \bar{a}'$, entre éléments de $\overline{A}^\star$ possède au plus une solution. Soit $\overline{\overline{A}}$ le sous-ensemble des $\bar{x} \in \overline{A}^\star$ tels que pour au moins un $\bar{x}'$, $\bar{x}\bar{x}' = \bar{e}(= \varphi_1 e)$. $\overset{-1}{\varphi}_1 \overline{\overline{A}}$ coïncide avec l'ensemble

$$\{ s \in S : \Sigma_1^1 s \cap \Sigma_1^1 \neq \emptyset \} = \{ s \in S : \Sigma_1^1 s = \Sigma_1^1 \}$$

et est un groupe puisque tout élément de $\overline{\overline{A}}$ possède un inverse unique. Enfin $\tilde{A} = \overline{A}^\star - (O \cup \overline{\overline{A}})$ est vide si et seulement si Σ est A-élémentaire et, sinon, $\overline{A}^\star$ (et par conséquent A), contiennent une suite infinie d'idéaux à droite $\{ a^n A \} (a \in \tilde{A})$ tous distincts.

Dans tous les cas [2], si $\overline{\overline{B}}$ est le groupe défini de façon duale dans $\overline{B}_1$, la correspondance $\sigma_1^1 a = b \sigma_1^1$ établit un isomorphisme entre $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{B}}$.

Il s'en déduit [3] la possibilité de montrer que $M(s)$ ne dépend pas du choix des σ_1^i (à une transformation près par des matrices diagonales à coefficients dans $\overline{\overline{A}}$).

Relation entre les deux représentations. — On suppose désormais que Σ est une $\overrightarrow{\mathcal{C}}_S$-classe élémentaire. On peut représenter par un élément unique σ_0 l'ensemble $S\Sigma S$-Σ et l'on fait l'hypothèse que les a_1^i et les b_j^1 peuvent être choisis de telle façon que $\sigma_1^1 a_1^i b_j^1 = a_1^i b_j^1 \sigma_1^1$, identiquement. On désigne par R la $I \times J$ matrice dont les éléments sont les $a_1^i b_j^1 (\in \overline{\overline{A}} \cup O)$ et par $U = \{ s : \forall^{i,j}\ a_1^i s b_j^1 \sigma_1^1 = \sigma_1^1 a_1^i s b_j^1 \}$.

On a donc pour tout $u \in U$: $M(u)R = RN(u) = R(u)$ puisque $r_i^j(u)$ est la valeur commune dans $\overline{\overline{A}} \cup O$ de

$$\sigma_1^1 a_1^i u b_j^1 = m_i^{i'}(u) \sigma_1^1 a_1^{i'} b_j^1 \qquad \text{et} \qquad a_1^i u b_j^1 \sigma_1^1 = a_1^i b_{j'}^1 \sigma_1^1 n_{j'}^j(u),$$

i' et j' étant les indices (uniques s'ils existent) tels que $m_i^{i'}(u)$ et $n_{j'}^j(u)$ ne soient pas nuls. Il résulte de cette équation que U est un demi-groupe ainsi que le sous-ensemble V (qui peut être vide) des $v \in U$ tels qu'il existe une $J \times I$ matrice $T(v)$ satisfaisant $M(v) = RT(v)$ et $N(v) = T(v)R$. En particulier, si Σ est identifiable à S lui-même et si Σ correspond à une $\bar{\mathcal{D}}$ classe élémentaire et régulière D de S, $S = U$, V contient D et $T(v)$ est la représentation de Clifford ([4]) avec la multiplication $T(v)RT(v') = T(vv')$.

([1]) *Ann. Math.*, 54, 1951, p. 163-172.
([2]) G.-B. Preston, *Bull. Am. Math. Soc.*, 63, 1957, Abst., nº 651.
([3]) *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 1994 et 2219.
([4]) *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82, 1956, p. 270-280.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 246, p. 865-867, séance du 10 février 1958.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
153256-58 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55. Imprimé en France.