ALGÈBRE. — *Sur l'équation* $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ *dans un groupe libre.* Note de M. **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Georges Darmois.

En appliquant la théorie des demi-groupes (1), (2) (monoïdes) libres, on vérifie que cette équation (avec n, m, $p \in \mathrm{N}$), dans un groupe libre G, entraîne $bc = cb$, ce qui étend un théorème de R. C. Lyndon (3).

Notations. — Tous les calculs sont effectués dans F, le monoïde libre engendré par les générateurs de G et leurs inverses; $|f|$ désigne la longueur de f; $\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est l'homomorphisme canonique; $f \to \bar{f}$, l'anti-automorphisme de F tel que $\varphi\bar{f} = (\varphi f)^{-1}$; $f \to f^\star$, l'application de F sur $\mathrm{F}^\star \subset \mathrm{F}$ telle que : 1° $\varphi f = \varphi f^\star$; 2° $f^\star = e_\mathrm{F}$ si $f = \bar{f}$; 3° $(fg)^\star = (f^\star g^\star)^\star$; $\pi(f) = \{ f''f' : f'f'' = f\}$; $\mathrm{F}^{\star\star} = \{f : f^2 \in \mathrm{F}^\star\}$; F_1 désigne un sous-monoïde générique de rang unité.

On utilisera les remarques suivantes :

(1) Si $a^{2+n} = fbc'gc''bd'\bar{g}d''\bar{f} \in \mathrm{F}^\star$ *et* $|b| \geq |a|$, *alors* : $f = e_\mathrm{F}$; g *et* $\bar{g}$ *sont des facteurs de* a^2 *et de* b^2; a, b, $c'gc''$, $d'\bar{g}d'' \in \mathrm{F}_1$.

(2) *Si* $afb\bar{g} = gc\bar{f}a \in \mathrm{F}^\star$ *et* $|a| > 0$, *alors* : $b = u\bar{f}gv$; $c = v\bar{g}fu$; $a = g(v\bar{g}u\bar{f}g)^k v\bar{g}$. D'où, par induction : *si* $afb\bar{f}c = c\bar{f}bfa \in \mathrm{F}^\star$, *alors* : $f = e_\mathrm{F}$ *et* a, b, $c \in \mathrm{F}_1$.

(3) *Si* $a' \in \pi(a)$, $f' \in \pi(f)$, $a'f' \in \pi(a\bar{f})$, *tous ces éléments appartenant à* $\mathrm{F}^{\star\star}$, *alors* $f = f' = e_\mathrm{F}$ *et* a, $a' \in \mathrm{F}_1$.

(4) *Si* $a^{2+n} = g'(bf)^{1+m}b\bar{g}'g''c(\bar{f}c)^{1+p}\bar{g}''$ *avec* a, b, $c \in \mathrm{F}^{\star\star}$ *et en outre* : $f\bar{g}'g''$, $\bar{g}'g''\bar{f} \in \mathrm{F}^\star$ (*cette dernière condition étant nécessaire*), *alors* $g' = g'' = f = e_\mathrm{F}$ *et* a, b, $c \in \mathrm{F}_1$.

L'énoncé résulte de façon à peu près immédiate de (1) si $|a| \leq |(bf)^{1+m}|$ ou $\leq |(\bar{f}c)^{1+p}|$ et l'on vérifie qu'une telle inégalité existe toujours sauf quand $n = 0$, ou $= 1$ et m (ou p) $= 0$.

Dans ces derniers cas, il faut appliquer préalablement (2) pour montrer que $a \in \pi(((vu)^k vf)^{1+m} vu)$ et considérer séparément les cas $n = 1$, $m = 0$, $p \neq 0$; $n = 1$, $m = p = 0$; $n = 0$, $m \neq 0$; $n = m = 0$, $p \neq 0$; $n = m = p = 0$.

(5) *Si* $xa^{2+n}\bar{x} = b^{2+m}c^{2+p} \in \mathrm{F}^\star$ *avec* a, b, $c \in \mathrm{F}^{\star\star}$, *alors on a* $x = e_\mathrm{F}$ *et* a, b, $c \in \mathrm{F}_1$.

On déduit de l'équation trois relations $(a'a'')^{n'}a' = (c''c')^{p'}c''$; $(a''a')^{n''}a'' = (b'b'')^{m'}b'$; $(b''b')^{m''}b'' = (\bar{c}'\bar{c}'')^{p''}\bar{c}'$; $n' + n'' = 1 + n$; $m' + m'' = 1 + m$; $p' + p'' = 1 + p$. L'énoncé résulte à peu près immédiatement de (1) et (3) si n, m et p sont tous pairs ou si cinq des nombres n', n'', m', m'', p', p'' sont différents de zéro. Si, au contraire, deux de ces nombres sont nuls, on peut éliminer deux des six variables a', a'', b', ... et se ramener à une équation du type (4) avec $g' = g'' = e_\mathrm{F}$.

Soit maintenant l'équation $\varphi(a'b'c') = e_\mathrm{G}$ où l'on a écrit pour abréger $a' = a^{2+n}$, ... Cette équation peut, à un automorphisme intérieur près de G, être transformée en : $a' = (xb'\bar{x}yc'\bar{y})^{\star}$ avec $a', b', c' \in F^{\star\star}$; donc : ou bien $a' = xb'\bar{x}yc'\bar{y} \in F^{\star}$ [ce qui est une équation du type (4) avec $f = e_F$], ou bien, en supposant que $|xb'\bar{x}| \geqq |yc'\bar{y}|$, $xb'\bar{x} = a'y\bar{c}'\bar{y} \in F^{\star}$. Dans ce dernier cas, si $|x| \geqq |a'|$, on pose $x = a'x'$ et, en simplifiant, on retrouve l'équation $y\bar{c}'\bar{y} = x'b'\bar{x}'\bar{a}' \in F^{\star}$; si $|x| < |a'|$ et $|y|$, on pose $a' = xd$; $\bar{y} = \bar{y}'\bar{x}$, d'où $b' = a''y'\bar{c}'\bar{y}' \in F^{\star}$ avec $a'' \in \pi(a')$; enfin, si $|y| \leqq |x| < |a'|$, on pose encore $a' = xd$ et $\bar{x} = \bar{x}'\bar{y}$, d'où $x'b'\bar{x}' = a''\bar{c}' \in F^{\star}$ avec $a'' \in \pi(a')$, ce qui est une équation du type (5).

On observera qu'un carré peut être effectivement un produit de trois carrés [par exemple : $(yx)^2(xy)^2(xyx)^2 = (yxyxxyx)^2$] et que la remarque (1) permet aussi de vérifier que :

Si $(\varphi(b))^{-1}(\varphi(c))^{-1}\varphi(b)\varphi(c) = (\varphi(a))^{2+n}$, *alors* $\varphi a = e_G$.

[1] P. Dubreil, *Mém. Acad. Inst. Fr.*, 63, 1941, p. 1-52.
[2] F. W. Levi, *Bull. Calcutta Mat. Soc.*, 36, 1944, p. 141-146.
[3] *Michigan Mat. J.*, 6, 1959, p. 89-95.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 248, p. 2435-2436, séance du 27 avril 1959.

GAUTHIER-VILLARS,
55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e),
Éditeur-Imprimeur-Libraire.
155560

Imprimé en France.