SUR CERTAINES CHAINES DE MARKOV NON HOMOGÈNES

J. LARISSE et M. P. SCHÜTZENBERGER

Extrait de
PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
Vol. XIII - fascicule 1 - 1964

SUR CERTAINES CHAINES DE MARKOV NON HOMOGÈNES

par J. LARISSE et M. P. SCHÜTZENBERGER

Soit donnée une chaîne de Markov non-homogène sur un ensemble *fini* d'états I, c'est-à-dire, soit donnée une représentation μ d'un monoïde libre F dans le monoïde M des $I \times I$ matrices stochastiques. Pour chaque $f \in F$, le sous-monoïde $\{ \mu f^n : n \in \underset{\approx}{N} \}$ de M est une chaîne de Markov finie au sens habituel ; si μf appartient au sous-ensemble M_r de M des $I \times I$ matrices stochastiques ayant exactement r racines caractéristiques de module unité, (c'est-à-dire si la chaîne de Markov $\{ \mu f^n : n \in \underset{\approx}{N} \}$ a exactement r classes ergodiques), la matrice $\mu f^{r!} = (\mu f)^{r!}$ est apériodique et, par conséquent, $\lim_{k \to \infty} \mu f^{kr!+1}$ existe. C'est une matrice stochastique que l'on désignera par $\bar{\mu} f$ et qui appartient au sous-ensemble $\overline{M}_r \subset M_r$ des matrices n'ayant que des racines nulles ou de module unité et dont les puissances successives forment un groupe fini.

D'autre part, la donnée de μ détermine de façon univoque un homomorphisme ω de F dans le groupe additif des réels tel que pour chaque générateur x de F on ait :
ωx = la borne inférieure des entrées positives de μx si celles-ci ne sont pas toutes égales à un et $\omega x = 0$ dans le cas contraire (c'est-à-dire si μx est un élément du sous-monoïde P de M constitué par les matrices représentant des applications de I dans lui-même).

Pour simplifier, on fera l'hypothèse qu'il existe une valeur *positive* $\bar{\omega}$ tel que $\omega x > \bar{\omega}$ ou = 0 pour tout générateur x et on posera $F_z = \{ f \in F : \omega f > z \}$ pour chaque valeur réelle z (ce qui entraîne donc $\mu f \in P$ pour tout $f \in F \backslash F_o$). Avec ces notations, il résulte d'un théorème récent de J. Wolfowitz [1] (1) que si $\mu f \in M_1$ pour tout $f \in F_o$ on a : (W_1). $0 = \lim_{z \to \infty} \operatorname{Max} \{ \| \mu f_1 f_2 - \bar{\mu} f_2 \| : f_1 \in F \ ; \ f_2 \in F_z \}$, où la norme $\| m \|$ d'une $I \times I$ matrice quelconque m est $\operatorname{Max}_{i \in I} \sum_{i' \in I} | m_{i,i'} |$.

On se propose ici de vérifier en application de ce théorème que s'il existe un entier r tel que $\mu f \in M_r$ pour tout $f \in F_o$, on peut trouver une application π de F dans un sous-ensemble *fini* de M telle que l'on ait :

(W_r). $0 = \lim_{z \to \infty} \operatorname{Max} \{ \| \mu f_1 f_2 f_3 - \bar{\mu} f_1 . \pi f_2 . \bar{\mu} f_3 \| : f_2 \in F \ ; \ f_1, f_3 \in F_z \}$.

Si toutes les matrices μf $(f \in F_o)$ satisfont la condition plus forte d'appartenir à M_r et d'avoir r racines égales à un, (c'est-à-dire si toutes les chaînes $\{ \mu f^n : n \in \underset{\sim}{N} \}$ $(f \in F_o)$ sont apériodiques), l'introduction de π est inutile et l'on peut écrire :

(W_r^*) : $0 = \lim_{z \to \infty} \operatorname{Max} \{ \| \mu f_1 f_2 f_3 - \bar{\mu} f_1 . \bar{\mu} f_3 \| : f_2 \in F \ ; \ f_1, f_3 \in F \}$.

Nous ne sommes pas en mesure d'apprécier ici la signification éventuelle de ces relations dans la théorie générale des "automates probabilistes" de M. Rabin [2].

Vérification de la propriété

Nous supposons la représentation μ donnée et telle que $\{ \mu f : f \in F_o \} \subset M_r$. Le *support* (ou *type* [1]) d'une matrice $m \in M$ est l'ensemble $\beta m \in \mathfrak{P}(I \times I)$ des paires $(i, i') \in I \times I$ telles que $0 \neq m_{i,i'}$, le support de la i-ième ligne de m étant désigné par $\beta_i m = \{ i' \in I : (i, i') \in \beta m \}$. Pour $m, m' \in M$, le *produit* $\beta m . \beta m'$ des supports βm et $\beta m'$ est, comme d'usage (cf. [3]), l'ensemble des paires $(i, i'') \in I \times I$ telles que $(i, i') \in \beta m$ et $(i', i'') \in \beta m'$ pour au moins un $i' \in I$. Donc,

----

(1) Nous remercions le Professeur Wolfowitz d'avoir bien voulu nous communiquer son travail avant sa publication.

$\beta mm' = \beta m . \beta m'$ et on peut considérer β comme un homomorphisme du monoïde $\{ \mu f : f \in F \}$ dans le sous-monoïde de $\mathfrak{P}(I \times I)$ constitué par tous les supports βm tels que $\beta_i m \neq \emptyset$ pour chaque $i \in I$.

Il résulte immédiatement de ceci que pour $m, m' \in M$ et $i, i' \in I$ on a :

si $\beta_i m$ est un élément minimal de la famille $\{ \beta_j m : j \in I \}$ ordonnée par inclusion, $\beta_i mm'$ est un élément minimal de la famille $\{ \beta_j mm' : j \in I \}$;

si $\beta_i mm' \cap \beta_{i'} mm' = \emptyset$, alors, d'une part $\beta_i m \cap \beta_{i'} m = \emptyset$, d'autre part $\beta_j m' \cap \beta_{j'} m' = \emptyset$ pour tout $j \in \beta_i m$ et $j' \in \beta_{i'} m$.

Nous dirons que βm est *cyclique* si $\beta m = \beta m^{2+n}$ pour au moins un $n \in \underset{\sim}{N}$ (et par conséquent pour une infinité de $n \in \underset{\sim}{N}$). On sait que quelque soit $m \in M$, βm^n est cyclique pour $n \geqslant (\underset{\sim}{\text{Card}}\ I)!$.

Il est clair que la propriété pour une matrice $m \in M$ d'avoir ou non r racines de modules unité, ainsi que la valeur de ces racines dépend exclusivement de son support βm. De la même façon si $m \in M_r$, et si $\overline{m} = \lim_{k \to \infty} m^{kr!+1}$, le support $\beta \overline{m}$ ne dépend que du support βm. Plus précisément, $\mu f \in M_r$ si la chaîne de Markov $\{ \mu f^n : n \in \underset{\sim}{N} \}$ a exactement r classes ergodiques auxquelles on réservera la notation $I_1^*(f)$, $I_2^*(f)$, $\ldots$, $I_r^*(f)$ en posant $I^*(f) = \cup \{ I_j^*(f) : j \in [1,r] \}$. On sait que si $\mu f \in M_r$, la restriction à $I_j^*(f) \times I$ du support de μf est contenue dans un "rectangle" $I_j^*(f) \times I_{j'}^*(f)$ (Cf. [3]) et qu'elle est égale à ce rectangle si $\beta \mu f$ est cyclique. De même la restriction à $I \times I^*(f)$ du support de μf est contenue dans $\beta \bar{\mu} f$ et $\beta \bar{\mu} f$ est égale à la restriction à $I \times I^*(f)$ du support de μf quand $\beta \mu f$ est cyclique.

Ces notions étant rappelées, définissons R comme la fermeture convexe du sous-ensemble $P_r \subset P$ des matrices représentant une application $I \to I$ telle que l'image Ip de I ait au plus r éléments. A chaque $f \in F$ nous associons $\chi f \in [0,1]$, $\mu_R f \in R$ et $\mu_R' f \in M$ par les relations suivantes :

$\mu f = (1 - \chi f) . \mu_R f + \chi f. \mu_R' f$;

$\chi f = \mathrm{Min}\ \{ \chi \in [0,1] : \mu f = (1 - \chi). m + \chi . m' \ ; \ m \in R,\ m' \in M\}$.

Enfin, nous désignons par F_+ l'ensemble des $f \in F$ tel qu'il existe au moins un $g \in F_o$ de support cyclique et une paire $f', f'' \in F$ satisfaisant $\beta\mu f = \beta\mu f' g f''$.

REMARQUE 1. Pour chaque $f \in F_+$ *on a* $\chi f < 1$ *et* $\beta \mu_R f \subset \beta\bar{\mu} f$.

Vérification. Il est clair que $PP_r P \subset P_r$ et que le support de tout $m \in M$ est une union de supports d'applications $p' \in P$. Il en résulte immédiatement que $\chi f f' \leqslant \chi f . \chi f'$ pour tout $f, f' \in F$.

Considérons $g \in F_o$ de support cyclique. Si $I' \subset I$ a un et un seul élément en commun avec chacune des classes ergodiques $I_j^*(g)$, le fait que pour chaque $i \in I$ la ligne $\beta_i \mu g$ contienne au moins un $I_i(g)$ montre qu'il existe au moins un $p \in P_r$ tel que $I' = Ip$ et $\beta p \subset \beta\mu f$. Donc $\chi g < 1$ et par conséquent $\chi f' g f'' < 1$ pour tout $f', f'' \in F$. Comme la propriété $\chi m < 1$ ne dépend en fait que de βm, l'inégalité $\chi f < 1$ pour $f \in F_+$ est établie.

Soit maintenant $\beta p \subset \beta\mu f$ où $p \in P_r$ et $f \in F$. Si $I' = Ip$, l'union des supports des colonnes de μf d'indice $i \in I'$ est égale à I, et il en est de même pour toute matrice de la forme $\mu f' f$. Prenant $f' = f^n$ tel que $\beta\mu f' f$ soit cyclique, on en conclut que I' doit avoir un (et un seul) élément en commun avec chacune des classes ergodiques $I_j^*(f)$ et qu'en particulier $I' \in I^*(f)$. Comme $\beta p \subset \beta\mu f$ et comme la restriction de $\beta\mu f$ à $I \times I^*(f)$ est contenue dans $\beta\bar{\mu} f$, la remarque est entièrement vérifiée.

Il résulte de $\beta\mu f \subset \beta\bar{\mu} f$ que chaque classe $I_j^*(f)$ admet un sous-ensemble minimal $I_j'^*(f)$ tel que $I^*(f) \times I_j'^*(f)$ contienne la restriction à $I^*(f) \times I_j^*(f)$ du support de $\mu_R f$. De même, il existe un sous-ensemble maximal $I_j''^*(f)$ contenant tous les $i \in I$ tels que $\beta_i \mu_R f \subset I_j'^*(f)$.

REMARQUE 1 bis . Si f, $f' \in F_+$ *il correspond à chaque* $j \in [1,r]$ *un et un seul* $j' \in [1,r]$ *tel que* $I_j'^*(f) \subset I_{j'}''^*(f')$.

Vérification. Soit pour $m \in M$, $\Delta(m)$ la cardinalité maximale d'un ensemble de lignes de m ayant leurs supports deux à deux disjoints. On vérifie facilement que pour tout m, $m' \in M$ on a $\Delta(mm') \leqslant \Delta(m)$, $\Delta(m')$. Donc, si $f \in F_+$, on a $\Delta(\mu f) \leqslant r$ puisque $\beta\mu f$ admet $\beta\mu g$ comme facteur et $\Delta(\mu f) = r$ puisque $\Delta(\mu f) = r$ pour $n \geqslant (\text{Card } I)!$.

Considérons maintenant le cas particulier de l'énoncé où $\beta\mu f$ et $\beta\mu f'$ sont cycliques. La relation $\Delta(\mu ff') = r$ montre que pour chaque $i \in I_j^*(f)$, le support $\beta_i\mu f'$ doit avoir une intersection non vide avec une seulle classe $I_{j'}^*(f)$. Le cas général s'en déduit immédiatement : en effet, $I_j'^*(f) \subset I_j^*(f)$ et les seuls $i \in I$ tels que $\beta_i\mu f'$ n'intersecte qu'une seule classe $I_{j''}^*(f')$, appartiennent à l'union $I''^*(f')$ des ensembles disjoints $I_j''^*(f')$.

Nous écrivons désormais pour abréger Lim au lieu de $\lim\limits_{z\to\infty}$ Max et nous désignons par f_z et f_z' des variables liées par la condition f_z, $f_z' \in F_z$.

REMARQUE 2. $\text{Lim} \| \mu f_z - \mu_R f_z \| = 0$.

Vérification. Soit $B = \{\beta\mu f : f \in F_o\}$. Si un élément $b \in B$ appartient à une $\mathcal{D}$-*classe régulière* ([4]), il existe un élément $b' \in B$ tel que $b'^2 = b'$ et $b'b = b$. Donc si B_+ est l'idéal de B engendré par les $\mathcal{D}$-classes régulières, l'image inverse de B par β^{-1}appartient à F_+.

Soit h le nombre des $\mathcal{D}$-classes de B. Nous montrons d'abord que tout produit $b_1 b_2 \ldots b_{\bar h}$ de $\bar h = 2^{h-1}$éléments de B a au moins un facteur droit non vide $b_{k''} b_{k''+1} \ldots b_{\bar h}$ appartenant à une $\mathcal{D}$-classe régulière de B. Ceci est trivial pour h = 1 puisque dans ce cas B a une seule $\mathcal{D}$-classe qui est nécessairement régulière. On peut donc supposer le résultat vérifié quand B a moins de h > 1 $\mathcal{D}$-classes et, naturellement, on peut aussi supposer qu'aucun des $b_{k'}$ $(k' = 1, 2, \ldots, \bar h = 2^{h-1})$

n'appartient lui-même à une $\mathcal{D}$-classe régulière. Comme toutes les $\mathcal{D}$-classes considérées sont finies, ceci entraîne ([5]) que pour chaque $k' < \bar{h}$ les trois éléments $b_{k'}, b_{k'+1}$ et $b_k . b_{k'+1}$ n'appartiennent pas à la même $\mathcal{D}$-classe. Donc le sous-monoïde engendré par les 2^{h-2} produits $b_1 b_2, b_3 b_4, \ldots, b_{\bar{h}-1}\, b_{\bar{h}}$ a au plus h-1 $\mathcal{D}$-classes et le résultat découle de l'hypothèse d'induction.

Soit maintenant $F_+^! = F_+ \setminus (F_+)^2$. Le résultat qui vient d'être vérifié montre que tout $f \in (F_o)^{n\bar{h}}$ a au moins n facteurs dans $F_+^!$. En outre, faisant intervenir l'hypothèse selon laquelle $\omega x = 0$ ou $\omega x > \bar{\omega} > 0$ pour tout $x \in X$, on voit que $\omega f > 1 - \bar{\omega}^{\bar{h}}$ pour tout $f \in F_+^!$. Donc $\chi f < (1 - \bar{\omega}^{\bar{h}})^n$ pour chaque $f \in (F_o)^{n\bar{h}}$ ce qui entraîne $\operatorname{Lim} \chi f_z = 0$ et achève la vérification de la remarque 2.

Soit V l'ensemble des I-vecteurs v à coordonnées non négatives tels que $\sum_{i \in I} v_i = 1$. Pour $(v, v') \in V \times V$ et $m \in M$ nous posons : $\delta_{v,v'} m = 1 - \sum_{i \in I} \operatorname{Min} \{ (vm)_i, (v'm)_i \}$. D'après Hajnal ([6]), pour tout $m' \in M$ on a : $0 \leqslant \delta_{v,v'} mm' \leqslant \delta_{v,v'} m \leqslant 1$ avec $\delta_{v,v'} m = 0$ (resp. $= 1$) si et seulement si $vm = v'm$ (resp. $\beta vm \cap \beta v'm = \emptyset$). Quand μ et μ' sont deux applications de F dans M telles que : $\operatorname{Lim} \| \mu f_z - \mu' f_z \| = 0$ on a évidemment $\operatorname{Lim} | \delta_{v,v'} \mu f_z - \delta_{v,v} \mu' f_z | = 0$.

Nous considérons maintenant un sous-ensemble fixe K de I ayant r éléments et nous définissons la $I \times I$ matrice e_K par $(e_K)_{i,i'} = 1$ si $i = i' \in K$; $= 0$, autrement. Pour abréger, nous écrivons $m' \in M'$ (resp. $m'' \in M''$) si $m' = m . e_K$ (resp. $m'' = e_K . m$ pour au moins un $m \in M$) et si m' contient r lignes ayant des supports disjoints telles que toute autre ligne soit une combinaison linéaire à coefficients non négatifs de ces dernières (resp. et si m'' a r lignes ayant des supports disjoints non vides.).

REMARQUE 3. Il existe deux applications $\mu' : F \to M'$ *et* $\mu'' : F \to M''$ *telles que* $\operatorname{Lim} \| \mu f_z - \mu' f_z . \mu'' f_z \| = 0$.

Vérification : Nous utilisons les notations de la Remarque 1 bis. Le support de la restriction de $\mu_R f_z$ à $I''^*(f_z)\times I$ est une union de r rectangles disjoints $I''_j(f_z)\times I'_{j'}(f_z)$. Comme $\mu_R f_z$ appartient à la fermeture convexe R de P_r ceci entraîne que deux lignes quelconques de cette matrice soient égales quand l'intersection de leurs supports n'est pas vide. Il existe donc une matrice $\mu'' f_z \in M''$ dont les lignes non nulles sont égales aux r lignes distinctes de la restriction de $\mu_R f_z$ à $I''^*(f_z)\times I$.

Soit f'_z un autre élément de F_z. D'après la Remarque 1 bis, chacun des ensembles $I'^*_{j'}(f')$ est contenu dans un et un seul ensembles $I''^*_j(f_z)$ et $\mu_R f'_z$ est identique à la somme de ses restrictions à $I\times I'^*_{j'}(f_z)$ ($j' \in [1,r]$). Donc deux lignes quelconques non nulles de la restriction à $I\times I'_j(f_z)$ de $\mu_R f'_z . \mu_R f_z$ sont proportionnelles et l'on peut trouver une application $\upsilon' : F\times F \to M'$ telle que l'on ait $\mu_R f'_z . \mu_R f_z = \upsilon'(f'_z, f_z) . \mu' f_z$ identiquement. D'après la Remarque 2, $\mathrm{Lim} \,\| \mu f'_z f_z - \mu_R f'_z \| = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Lim} \,\| \mu f'_z f_z - \upsilon'(f'_z, f_z). \mu' f_z \| = 0$ ce qui entraîne la validité de la Remarque 3.

REMARQUE 3 bis. Si les applications $\mu' : F \to M'$; $\upsilon : F\times F\times F \to M$ et μ'': $F \to M''$ *satisfont la relation* $\mathrm{Lim} \,\| \mu f_z f f'_z - \mu' f_z . \upsilon(f_z, f, f'_z). \mu'' f'_z \| = 0$, *il existe trois applications* $\bar{\mu}' : F \to M'$; $\rho : F\times F\times F \to M''$ et $\bar{\mu}'' : F \to M''$ *telles que :*

$\mathrm{Lim} \,\| \mu' f_z - \bar{\mu}' f_z f f'_z \| = \mathrm{Lim} \,\| \upsilon(f_z, f, f'_z) - \rho(f_z, f, f'_z) \| =$

$\mathrm{Lim} \,\| e_K . \upsilon(f_z, f, f'_z). \mu'' f_z - \bar{\mu}'' f_z f f'_z \| = 0$, *et qu'en outre, d'une part la restriction de* $\rho(f, f, f')$ à $K\times I$ *représente une permutation de* K, *d'autre part, pour tout* $f' \in F_0$, $\bar{\mu} f' = \bar{\mu}' f' . \bar{\mu}'' f'$.

Vérification. L'existence d'applications $\bar{\mu}' : F \to M'$ et $\bar{\mu}'' : F \to M''$ satisfaisant l'identité $\bar{\mu} f' = \bar{\mu}' f' . \bar{\mu}'' f'$ est triviale et il est clair que toutes les paires d'applications satisfaisant ces conditions sont équivalentes sur F_0 à une permutation de K près.

Désignons maintenant par $\lambda^i m$ la plus grande entrée de la i-ème colonne de m. Il est bien connu que $\lambda^i m'm < \lambda^i m$ identiquement. Donc pour tout $i \in I$ et $(f_z, f, f'_z) \in F \times F \times F$ on a $\lambda^i \bar{\mu} f_z f f'_z =$ $= \lambda^i \bar{\mu}'' f_z f f'_z \leqslant \lambda^i \mu f_z f f'_z$ et
$\lambda^i (\mu' f_z . \upsilon(f_z, f, f'_z). \mu'' f'_z) \leqslant \lambda^i(\upsilon'(f_z, f, f'_z). \mu'' f'_z) \leqslant \lambda^i \mu'' f'_z$.
Les hypothèses impliquent

$$\mathrm{Lim} \, || \, \lambda^i (\mu' f_z . \upsilon(f_z, f, f'_z). \mu'' f'_z) \; - \; \lambda^i \mu f_z f f'_z \, || = 0$$

et, comme $\bar{\mu} f_z f f'_z$ et $\mu'' f'_z$ appartiennent à M'', on a $\sum_{i \in I} \lambda^i \bar{\mu}'' f_z f f'_z =$ $= \sum_{i \in I} \lambda^i \mu'' f'_z = r$. Donc, pour chaque $i \in I$, $\mathrm{Lim} | \lambda^i \bar{\mu}'' f_z f f'_z - \lambda^i (\upsilon(f_z, f, f'_z).$ $\mu'' f') | = \mathrm{Lim} | \lambda^i (\upsilon(f_z, f, f'_z). \mu'' f'_z) - \lambda^i \mu'' f'_z | = 0$ et $\mathrm{Lim} \sum_{i \in I} \lambda^i (\upsilon(f_z^{\bullet}, f, f'_z). \mu'' f'_z) = r$ ce qui montre l'existence de $\rho : F \times F \times F \to M$, identique à υ sur $(I \backslash K) \times I$, se réduisant à une permutation de K sur $K \times I$ et satisfaisant $\mathrm{Lim} \, || \, \upsilon(f_z, f, f'_z) - \rho(f_z, f, f'_z) \, || = 0$. D'après la première de ces relations on peut choisir $\bar{\mu}'' : F \to M''$ telle que $\mathrm{Lim} \, || \, e_K . \rho(f_z, f, f'_z). \mu'' f'_z -$ $\bar{\mu}'' f_z f f'_z \, || = 0$. Ceci établit la partie de la remarque concernant les applications $\bar{\mu}''$ et ρ.

De façon analogue, pour tout $(v, v') \in V \times V$ on a :
$\delta_{v,v'} . \bar{\mu}' f_z f f'_z = \delta_{v,v'} . \bar{\mu} f_z f f'_z \leqslant \delta_{v,v'} . \mu f_z f f'_z$ et $\mathrm{Lim} \;\; \delta_{v,v'} . \mu f f f' < \mathrm{Lim} \;\; \delta_{v,v'} \mu f_z$.

Comme l'ensemble des $(v, v') \in V \times V$ telles que $\delta_{v,v'} . \bar{\mu}' f_z f f'_z$ (resp. $\delta_{v,v'} . \mu' f_z$) est 0 ou 1 détermine $\bar{\mu}'$ (resp. μ') à une permutation près de K et comme le support de la restriction de $\mu f_z f f'_z$ à $I \times I^*(f, f f'_z)$ est contenu dans $\beta \bar{\mu} f_z f f'_z$, la vérification est achevée.

PROPRIETE 1 : Si $\mu : F \to M$ *est telle que pour chaque* $f \in F_0$ *la chaine de Markov* $\{ \mu f^n : n \in \mathbb{N} \}$ *a exactement* r *classes ergodiques, il existe une application* π *de* F *dans un sous ensemble fini de* M *telle que :*

$$(W_r) \; . \; \mathrm{Lim} \, || \, \mu f_z f f'_z \; - \; \bar{\mu} f_z . \pi f . \bar{\mu} f'_z \, || = 0.$$

Si en outre toutes les chaines $\{ \mu f^n : n \in \underset{\sim\!\sim}{\mathbb{N}} \}$ $(f \in F_0)$ *sont apériodiques, on peut écrire :*

$$(W_r^*) . . \; \mathrm{Lim} \, || \mu f_z f f'_z \; - \; \bar{\mu} f_z . \bar{\mu} f'_z \, || = 0.$$

Vérification. D'après la Remarque 3, il existe deux applications $\mu' : F \to M'$ et $\mu'' : F \to M''$ telles que $\operatorname{Lim} \| \mu f_z - \mu' f_z . \mu'' f_z \| = 0$.

Prenant une application υ de $F \times F \times F$ sur la matrice unité e_I et employant la Remarque 3 bis, ceci montre que $\operatorname{Lim} \| \bar{\mu} f_z - \mu f_z \| = 0$ et qu'il n'y a aucune diminution de généralité à supposer désormais que $\mu' = \bar{\mu}'$ et $\mu'' = \bar{\mu}''$, c'est-à-dire que $\mu' f . \mu'' f = \bar{\mu} f$ pour tout $f \in F_0$. Le premier de ces résultats donne

$$\operatorname{Lim} \| \mu f_z f f'_z - \bar{\mu} f_z . \mu f . \bar{\mu} f'_z \| = \operatorname{Lim} \| \bar{\mu} f_z f f'_z - \bar{\mu} f_z . \mu f . \bar{\mu} f'_z \| = 0 .$$

Comme $\bar{\mu} f_z . \mu f . \bar{\mu} f'_z = \mu' f_z . \upsilon(f_z, f, f'_z) . \mu'' f'_z$ où maintenant υ est une application quelconque de $F \times F \times F$ dans M telle que $e_K . \upsilon(f_z, f, f') = \mu'' f . \mu f . \mu' f'$, on peut appliquer de nouveau la Remarque 3 bis qui montre cette fois l'existence d'une application ρ de $F \times F \times F$ dans M telle que $e_K . \rho$ soit une permutation de K et que $\operatorname{Lim} \| \mu'' f_z . \mu f . \mu' f'_z - e_K . \rho(f_z, f, f'_z) \| = 0$. D'après l'hypothèse faite plus haut, $\mu' f_z . \mu'' f_z = \bar{\mu} f_z$ et $\mu' f'_z . \mu'' f'_z = \bar{\mu} f'_z$. On en conclut que $\mu'' f_z . \mu f . \mu' f'_z$ est elle-même, pour tout $(f_z \; f, f'_z) \in F \times F \times F_0$, une matrice ayant son support contenu dans $K \times K$ et représentant une permutation de cet ensemble.

Puisque les matrices $\mu' f_z$, μf et $\mu' f'_z$ ont des entrées non négatives, ceci entraîne $\mu'' f_z . \mu f . \mu' f'_z = \mu' f_z . \pi f . \mu' f'_z$ quelque soit l'application $\pi : F \to M$ telle que $\beta \mu f = \beta \pi f$. Par conséquent, sous cette hypothèse $\bar{\mu} f_z . \mu f . \bar{\mu} f'_z = \bar{\mu} f_z . \pi f . \bar{\mu} f'_z$ ce qui achève la vérification de (W_r) puisque le monoïde $\{ \beta \mu f : f \in F \}$ est fini.

Supposons maintenant que toutes les chaînes $\{ \mu f^n : n \in \underset{\sim}{N} \}$ soient apériodiques, c'est-à-dire que $\bar{\mu} f = \bar{\mu} f^2$ pour tout $f \in F_0$, c'est-à-dire encore, (dans les notations de la Remarque 2 bis) que $I'^{*}_j(f) \subset I^{**}_j(f)$ pour tout $j \in [1, r]$. La Remarque 2 bis montre que l'on peut choisir l'indexage des classes ergodiques des différentes chaînes $\{ \mu f^n : n \in \underset{\sim}{N} \}$ $(f \in F_0)$ de telle sorte que $I'^{*}_j(f) \subset I'^{*}_j(f')$ pour tout $f, f' \in F_*$ et $j \in [1, r]$. Ceci entraîne que $\mu'' f_z . \mu' f'_z = e_K$ identiquement quand $f_z, f'_z \in F_+$. La propriété est entièrement vérifiée.

REFERENCES

[1]. J. WOLFOWITZ : Products of indecomposable, aperiodic stochastic matrices, Proc. Amer. Math. Soc. *14*, (1963) : 733-737.

[2]. M. O. RABIN : Probabilistic Automata, Information and Control *6*, (1963) : 230-245.

[3]. J. RIGUET : Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bull. Soc. Math. France, *76*, (1948) : 114-155.

[4]. D.D. MILLER and A.H. CLIFFORD : Regular $\mathcal{D}$-classes in semi-groups, Trans. Amer. Math. Soc., *82*, (1956) : 270-280.

[5]. J.A. GREEN : On the structure of semi-groups, Ann. of Math. *54*, (1951) : 163-172.

[6]. J. HAJNAL : Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains, Proc. Cambridge Philos. Soc., *54*, (1958) : 233-246.

Cetis Euratom (Ispra)

et Faculté des Sciences (Poitiers)

Reçu le 22 décembre 1963