

ALGÈBRE. — Une condition de finitude des monoïdes finiment engendrés.

Note (*) de MM. MICHEL COUDRAIN et MARCEL PAUL SCHÜTZENBERGER, présentée par M. Henri Villat.

On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un monoïde soit fini, ce qui permet, en particulier, de simplifier certains raisonnements de (1).

Rappelons qu'un *bi-idéal principal* d'un monoïde M est une partie de celui-ci ayant la forme $aM a$, où a est un élément quelconque de M .

PROPRIÉTÉ. — Un monoïde M est fini si (et seulement si) il satisfait les trois conditions suivantes :

- (1) M est engendré par un ensemble fini;
- (2) Toutes les chaînes strictement décroissantes de bi-idéaux principaux de M ont une longueur finie;
- (3) Tous les sous-groupes de M sont finis.

Deux quelconques de ces conditions ne suffisent pas pour assurer la finitude de M ainsi que le montrent les exemples suivants :

(2) et (3) : M formé d'un élément neutre, e , d'un zéro, o , et d'un ensemble infini M' tel que $M'^2 = \{o\}$;

(1) et (3) : $M =$ le monoïde additif des entiers naturels;

(1) et (2) : $M =$ le groupe additif des entiers rationnels.

Notons (2') [resp. (2'')] la condition obtenue en remplaçant dans (2) le terme « bi-idéal » par « idéal bilatère » (resp. « idéal à droite ») et disons que M est un *monoïde de Green* si et seulement si [cf. (2)] :

(G) Pour tout $a, b \in M$, $\{a, b\} \subset M a \cap bM$ implique $\{a, b\} \subset aM \cap Mb$.

On sait que (2) entraîne (G). Comme réciproquement (G) et (2') entraînent (2), la propriété équivaut à l'assertion que *tout monoïde de Green satisfaisant (1), (2') et (3) est fini*. Par contre, le problème reste posé de savoir s'il existe ou non des monoïdes infinis satisfaisant (1), (2'') et (3).

Pour établir la Propriété il suffit de considérer un monoïde *infini* M , image homomorphe par μ du monoïde libre X^* engendré par un ensemble fini X et, supposant que M satisfait (2), de montrer qu'il contient un sous-groupe infini.

Soit \bar{X}^* l'ensemble des mots généralisés, c'est-à-dire des suites $\mathbf{s} = (s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de mots $s_n \in X^*$ telles que $s_0 = e$ et $s_{n+1} \in s_n X$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si F_n désigne l'ensemble des $f \in X^n$ tels que $\mu f' \neq \mu f$ pour tout $f' \in X^* \setminus X^n X^*$, l'hypothèse que M est infini entraîne qu'il en soit de même de $F = \bigcup_{0 \leq n} F_n$. Comme chacun des ensembles X^n est fini et comme F contient les facteurs gauches de tous ses membres, on peut trouver un élément \mathbf{s} de \bar{X}^* pour lequel $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ soit contenu dans F , ce que nous noterons $\mathbf{s} \in \bar{F}$. Soit τ_s le

translaté de \mathbf{s} , c'est-à-dire le mot généralisé \mathbf{s}' tel qu'on ait identiquement $\mathbf{s}_{1+n} = \mathbf{s}_1 \mathbf{s}'_n$. Puisque F contient tous les facteurs droits de chacun de ses membres, on a encore $\tau \mathbf{s} \in F$.

Désignons maintenant par K l'ensemble des suites $\mathbf{k} = (k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de mots de X^* tels qu'on ait $k_1 \in X$ et, pour tout $n > 0$, $k_{n+1} \in X^* \setminus X^{c_1} X^*$ où $c_1 = 1 + \text{Card } X$ et inductivement, $c_{n+1} = c_n(1 + (\text{Card } X)^{c_n})$. A une telle suite \mathbf{k} nous attachons une autre suite $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en posant $\tilde{k}_0 = e$, $\tilde{k}_1 = k_1$ et, inductivement, $\tilde{k}_{n+1} = \tilde{k}_n k_{n+1} \tilde{k}_n$.

Si $\mathbf{s} \in \bar{X}^*$ nous écrivons $\mathbf{s} \in k_n \bar{X}^*$ si $k_n = s_{n'}$ pour l'un des mots $s_{n'}$ de \mathbf{s} et $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{k}}$ si $\mathbf{s} \in \tilde{k}_n \bar{X}^*$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Nous montrons qu'il existe au moins un $\mathbf{k} \in K$ tel que $\tilde{\mathbf{k}} \in \bar{F}$.

Pour cela observons d'abord que, d'après la définition de c_{n+1} , tout $f \in X^{c_{n+1}}$ factorise en un produit de $1 + (\text{Card } X)^{c_n}$ mots de X^{c_n} et que, par conséquent, deux au moins de ces mots sont identiques. Donc $f = f' g g' g f''$, où $f', f'' \in X^*$, $g \in X^c$, $g' \in X^* \setminus X^{c_{n+1}-2c_n} X^*$. Par induction sur n , on en déduit :

Quel que soit le mot, $f \in X^{c_{n+1}} X^$ on peut trouver au moins une suite $\mathbf{k} \in K$ telle que \tilde{k}_{n+1} soit un facteur de f .*

Puisque \bar{F} est non vide et fermée par translation, ceci assure qu'à tout $n \in \mathbf{N}$ correspondent au moins un $\mathbf{k}^{(n)} \in K$ et une suite $\mathbf{s}^{(n)} \in \bar{F}$ tels que $\mathbf{s}^{(n)} \in \tilde{k}_n^{(n)} \bar{X}^*$. Comme chacun des ensembles $\{\tilde{k}_n : \mathbf{k} \in K\}$ est fini, d'après la définition même de K , on peut donc trouver un $\mathbf{k} \in K$ tel que pour chaque $n \in \mathbf{N}$ il existe au moins une suite $\mathbf{s}^{(n)} \in \bar{F}$ satisfaisant $\mathbf{s}^{(n)} \in \tilde{k}_n \bar{X}^*$ et puisque la famille $\{\mathbf{s}^{(n)}\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \bar{F}$ converge en un sens évident, la suite $\tilde{\mathbf{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}^{(n)}$ appartient encore à \bar{F} .

Considérons maintenant les bi-idéaux principaux $B_n = \mu \tilde{k}_n \cdot M \cdot \mu \tilde{k}_n$ de M . Par construction on a identiquement $B_{n+1} \subset B_n$. La condition (2), affirme l'existence d'un entier naturel q tel que pour tout $n > q$ on ait $B_q = B_n$, donc en particulier $\mu \tilde{k}_{q+1} \cdot \mu \tilde{k}_{q+1} \in B_n$, c'est-à-dire, enfin,

$$\mu \tilde{k}_{q+1} \cdot \mu \tilde{k}_{q+1} = \mu \tilde{k}_n \cdot m_n \cdot \mu \tilde{k}_n$$

pour au moins un $m_n \in M$. Il en résulte que

$$\mu \tilde{k}_{q+1} \in \mu \tilde{k}_n \cdot M \cap M \cdot \mu \tilde{k}_n$$

et comme $\mu \tilde{k}_n \in \mu k_{q+1} \cdot M \cap M \cdot \mu \tilde{k}_{q+1}$ de par la définition même des \tilde{k}_n on a vérifié que tous les $\mu \tilde{k}_n (n > q)$ appartiennent à la même \mathcal{H} -classe H de M qui est donc infinie puisque $H \in \mu F \cdot M$ étant un monoïde de Green, ceci suffit pour prouver qu'il possède un sous-groupe infini [cf. (3), (3)]. Plus directement, la relation

$$\mu \tilde{k}_{q+1} = \mu \tilde{k}_{q+1} \cdot m_{q+1} \cdot \mu \tilde{k}_{q+1}$$

montre que $u = \mu \tilde{k}_{q+1} . m_{q+1}$ est un idempotent appartenant à la même \mathcal{O} -classe que $\mu \tilde{k}_{q+1}$ et la \mathcal{H} -classe de u est donc un sous-groupe équipotent avec H , ce qui achève la vérification de la propriété.

Remarque. — La suite $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ utilisée ici n'est pas la meilleure possible. Par exemple, dans le cas où $\text{Card } X = 2$, on peut prendre $c_2 = 13$ (et non 27 comme plus haut).

(*) Séance du 16 mai 1966.

(¹) J. A. GREEN et D. REES, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 48, 1952, p. 35-40.

(²) J. A. GREEN, *Ann. Math.*, 54, 1951, p. 163-172.

(³) D. D. MILLER et A. H. CLIFFORD, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82, 1956, p. 270-280

(Institut de Programmation, 23, rue du Maroc, Paris, 19^e.)