ALGÈBRE. — *Sur les produits semi-directs droits de monoïdes.* Note (*) de MM. **Maurice Nivat** et **Marcel Paul Schützenberger**, présentée par M. Henri Villat.

On précise deux propriétés des produits directs droits de monoïdes utilisées dans [1].

Dans cette Note, C désigne un produit *semi-direct droit* fixe de deux monoïdes A et B, c'est-à-dire que C est isomorphe à l'ensemble $\mathrm{B}\times\mathrm{A}$ muni de la loi de composition $(b, a)(b', a') = (b_{\zeta}{}^{a}b', aa')$, où ${}^{a}b$ désigne une application $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\to\mathrm{B}$ satisfaisant les identités ${}^{c}\mathrm{A}\,b = b$; ${}^{a'}({}^{a}b) = {}^{a'a}b$; ${}^{a}e_{\mathrm{B}} = e_{\mathrm{B}}$; ${}^{a}(bb') = {}^{a}b_{\zeta}{}^{a}b'$. Pour $\mathcal{X} = \mathcal{H}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{D}$, on note $\mathcal{X}(m)$ la $\mathcal{X}$-classe d'un élément m [2].

Propriété 1. — *Tout sous-groupe maximal $\mathcal{H}(w)$ de* C *est extension d'un sous-groupe de* B *par un sous-groupe de* A.

Preuve. — Soit $w = (v, u)$ l'idempotent de $\mathcal{H}(w)$. La relation $w = w^2$ donne $v = v.{}^{u}v$ et $u = u^2$, ${}^{u}v = {}^{u}v.{}^{u}v$ et en posant $w' = ({}^{u}v, u)$ on trouve $w' = w'^2 = w'w$; $w = ww'$. Cela montre que $w' \in \mathcal{L}(w)$ et que, par conséquent, les sous-groupes $\mathcal{H}(w)$ et $\mathcal{H}(w')$ sont isomorphes. On pourra donc supposer désormais que $w = w'$, c'est-à-dire que $v = v^2 = {}^{u}v$.

Pour chaque $a \in \mathrm{A}$, soit $\mathrm{K}'_a = \{ b \in \mathrm{B} : (b, a) \in \mathcal{H}(w) \}$ et soit $\mathrm{H}' = \{ a \in \mathrm{A} : \mathrm{K}'_a \neq \emptyset \}$. Prenant un élément $c = (b, a) \in \mathcal{H}(w)$ et son inverse $c = (\bar{b}, \bar{a})$ dans $\mathcal{H}(w)$, les relations $c = wc = cw$ et $w = cc = \bar{c}c$ donnent d'abord $a = ua = au$ et $u = a\bar{a} = \bar{a}a$, ce qui montre que H' est un sous-groupe de $\mathcal{H}(u)$. La relation $b = v{}^{u}b$ donne ${}^{u}b = {}^{u}v.{}^{u^2}b = v.{}^{u}b = b$ et les relations $b = v.{}^{a}b$; $v = b.{}^{a}\bar{b}$ établissent $b \in \mathcal{R}(v)$. Enfin, la relation $v = \bar{b}.{}^{\bar{a}}b$ implique ${}^{a}v = {}^{a}\bar{b}.{}^{a\bar{a}}b = {}^{a}\bar{b}.b$ et, comme $b = b.{}^{a}v$ d'après $c = cw$, on conclut que ${}^{a}v \in \mathcal{L}(b)$, donc ${}^{a}v \in \mathcal{D}(v)$ et H' est donc un sous-groupe de $\mathrm{H} = \{ a \in \mathcal{H}(u) : {}^{a}v \in \mathcal{D}(v) \}$. De même,

$$\mathrm{K}'_a \subseteq \mathrm{K}_a = \{ b \in \mathrm{B} : b = {}^{u}b;\ b \in \mathcal{R}(v) \cap \mathcal{L}({}^{a}v) \}$$

et, en particulier, K'_u est contenu dans le sous-groupe K_u de $\mathcal{H}(v)$.

Choisissons pour chaque $a \in \mathrm{H}$ un élément $b_a \in \mathrm{K}_a$. La correspondance associant à chaque paire $(k, a) \in \mathrm{K}_u \times \mathrm{H}$ l'élément $k.b_a \in \mathcal{R}(v) \cap \mathcal{L}({}^{a}v)$ est une surjection $\mathrm{K}_u \times \mathrm{H} \to \bigcup \{ \mathrm{K}_a : a \in \mathrm{H} \}$. Comme ${}^{a'}b_a \in \mathcal{R}({}^{a'}v) \cap \mathcal{L}({}^{a'a}v)$ identiquement et comme chaque ensemble $\mathcal{R}({}^{a}v) \cap \mathcal{L}(v)$ contient un et un seul élément $\bar{b}_a$ tel que $b_a.\bar{b}_a = v$, l'ensemble $\mathrm{K}_u \times \mathrm{H}$ muni de la loi de composition $(k, a)(k', a') = (kb_a.{}^{a}k'.{}^{a}b_{a'}.\bar{b}_{a'a}, aa')$ est un groupe d'élément neutre (v, u) qui est une extension de K_u par H et qui est isomorphe à la partie $\mathrm{G} = \{ (b, a) : b \in \mathrm{K}_u;\ a \in \mathrm{H} \}$ de C. Par construction, $\mathcal{H}(w)$ est contenu dans G et, par conséquent, $\mathcal{H}(w) = \mathrm{G}$.

La propriété est vérifiée. Disons maintenant qu'un monoïde M est un $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_0$) monoïde si aucune de ses $\mathcal{R}$-classes régulières ne contient plus d'un seul idempotent (resp. élément), c'est-à-dire si pour tout p, $q \in \mathrm{M}$ les relations

$$(1) \qquad p = p^2 = qp; \qquad q = q^2 = pq \quad (\text{resp. } p = pqp;\ q = qpq)$$

impliquent

$$(2) \qquad p = pq, \quad \text{donc} \quad p = q \quad (\text{resp. donc } p = p^2 = pq;\ q = q^2 = qp).$$

Propriété 2. — *Si* A *et* B *sont des* $\mathcal{R}_1$ (*resp.* $\mathcal{R}_0$) *monoïdes, il en est de même de* C.

Preuve. — Supposons que les éléments $p = (b, a)$ et $q = (y, x)$ de C satisfont (1). Les éléments a et x de A satisfont les mêmes relations, donc les relations (2) puisque A est un $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_0$) monoïde. De plus, $b = b.{}^ab = y.{}^xb$; $y = y.{}^xy = b.{}^ay$ (resp. $b = b.{}^ay.{}^{ax}b$; $y = y.{}^xb.{}^{xa}y$). Compte tenu de $a = ax = a^2$, cela entraîne que ${}^ab$ et ${}^ay$ satisfassent (1), donc (2) puisque B est un $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_0$) monoïde. Par conséquent, $b = b.{}^ay$ et l'on a bien

$$p = (b, a) = (b, {}^ay, ax) = (b, a)(y, x) = pq,$$

ce qui achève la vérification.

Remarque. — *Soit* M *un monoïde dont tous les éléments sont d'ordre fini. Si* M *est un* $\mathcal{R}_1$ (*resp.* $\mathcal{R}_0$) *monoïde il en est de même de chaque monoïde qui le divise* (*c'est-à-dire qui est image homomorphe d'une partie stable de* M).

Preuve. — Il suffit de vérifier que si les parties non vides P et Q de M satisfont $\mathrm{P}^2 \cup \mathrm{QP} \subset \mathrm{P}$; $\mathrm{Q}^2 \cup \mathrm{PQ} \subset \mathrm{Q}$ (resp. $\mathrm{PQP} \subset \mathrm{P}$; $\mathrm{QPQ} \subset \mathrm{Q}$), on peut trouver $p \in \mathrm{P}$ et $q \in \mathrm{Q}$ satisfaisant (1).

Prenons $p' \in \mathrm{P}$ et $q'' \in \mathrm{Q}$ quelconques. Comme tous les éléments de M sont d'ordre fini on peut déterminer des entiers positifs n'', n' et n et des éléments q', $q \in \mathrm{Q}$ et $p \in \mathrm{P}$ par les conditions

$$q''^{n''} = q' = q'^2; \qquad (q'p')^{n'} = p = p^2;$$
$$(pq')^n = q = q^2 \quad (\text{resp. } p = p'(q''p')^n;\ q = q''(p'q'')^n;\ pqp = p'(q''p')^{3n+2} = p)$$

et l'on peut vérifier facilement que

$$p = qp; \qquad q = pq \quad (\text{resp. } q = qpq).$$

(*) Séance du 2 novembre 1966.

(1) K. Krohn et J. Rhodes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 116, 1965, p. 450-464.

(2) A. H. Clifford et G. R. Preston, *The algebraic theory of semi-groups*, 1; Math. Survey n° 7, American Math. Soc., Providence, R. I., 1962.

(*Institut de Programmation*, 23, *rue du Maroc, Paris*, 19e.)