Sur Certaines Chaines de Markov Nonhomogènes

J. LARISSE

CETIS–EURATOM
Ispra, Italy

et M. P. SCHÜTZENBERGER

Institut Blaise Pascal
Paris, France

Considérons un ensemble $\{m_1 m_2 \cdots m_k\}$ $(k \leqslant \infty)$ de matrices stochastiques $I \times I$. Une séquence infinie arbitraire $m_{i_1} m_{i_2} \cdots$ constitue une chaîne de Markov nonhomogène sur les états I. D'une manière équivalente nous pouvons définir cette chaîne comme une représentation μ du monoïde libre F [1] dans le monoïde M des $I \times I$ matrices stochastiques. Soit $X = \{x_1 x_2 \cdots x_k\}$ $(k \leqslant \infty)$ l'ensemble générateur de F, nous nous proposons dans cet exposé d'étudier les propriétés limites de $\mu f = \mu x_{i_1} \cdot \mu x_{i_2} \cdots \mu x_{i_n}$ pour $n \to \infty$; le cas homogène se ramenant à celui du sous-monoïde engendré par l'élément unique μf, nous aurions alors à étudier les propriétés asymptotiques de μf_n pour $n \to \infty$.

Un résultat de J. Wolfowitz [2] montre que si $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ est un ensemble fini ou infini de matrices stochastiques carrées de même ordre tel que tout produit B de la forme $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_n}$ est apériodique et indécomposable, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \to \infty} B^n = Q$$

où Q a toutes ses lignes égales, alors en définissant

$$\delta(B) = \max_j \max_{i_1 i_2} |b_{i_1 j} - b_{i_2 j}|$$

nous pouvons pour ϵ arbitrairement petit donné trouver $n(\epsilon)$ tel que

$$\delta(B) < \epsilon \text{ dès que } |B| = n > n(\epsilon) \tag{1}$$

En d'autres termes soit M_1 l'ensemble des matrices stochastiques ayant une racine simple de module un (ce qui est équivalent à l'hypothèse d'apériodicité et d'indécomposabilité), définissant

$$\text{norme } \mu f = \|\mu f\| = \max_{i\in I} \sum_{j\in I} |\mu f|_{ij}$$

$$\bar{\mu} f = \lim_{n\to\infty} \mu f^n \qquad \text{pour } \mu f \in M_1$$

On a

$$\|\mu f_1 f_2 - \bar{\mu} f_2\| < \epsilon \text{ dès que } |f_2| > n(\epsilon) \text{ et quel que soit } f_1$$

En effet, pour $|f_2| > n(\epsilon)$ on peut écrire

$$\mu f_2 = m + E$$

où $m \in M_1$ a toutes ses lignes égales, E est une matrice quelconque avec $|\epsilon_{ij}| < \epsilon$ pour $i, j \in I$. Dès lors,

$$|(\mu f f_2)_{ij} - (\mu f_2)_{ij}| = |\sum_{k\in I} (\mu f)_{ik}(m_{\cdot j} + \epsilon_{kj}) - m_{\cdot j} - \epsilon_{ij}|$$

$$= |\sum_{k\in I} (\mu f)_{ik}\, \epsilon_{kj} - \epsilon_{ij}| < 2\epsilon$$

$$\|\mu f f_2 - \mu f_2\| < 2I\epsilon$$

ceci étant vérifié pour μf stochastique quelconque, faisons $\mu f = \mu f_1$ et $\mu f = \bar{\mu} f_2$ on a

$$\begin{aligned}\|\mu f_1 f_2 - \bar{\mu} f_2\| &\leqslant \|\mu f_1 f_2 - \mu f_2\| + \|\mu f_2 - \bar{\mu} f_2\| \\ &= \|\mu f_1 f_2 - \mu f_2\| + \|\bar{\mu} f_2 \cdot \mu f_2 - \mu f_2\| \leqslant 4I\epsilon\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{|f_2|\to\infty} \|\mu f_1 f_2 - \bar{\mu} f_2\| = 0 \tag{2}$$

Pour assurer dans la suite de l'exposé (Remarque 2) une convergence uniforme nous imposerons à la plus petite entrée positive ωx des μx, $x \in X$ la condition suffisante qu'il existe $\bar{\omega} > 0$ tel que $\omega x > \bar{\omega}$, $x \in X$. Nous poserons $\omega x = 0$ si les éléments positifs de μx sont tous égaux à 1. La donnée de μ déterminant d'une façon univoque l'homomorphisme ω de F dans le groupe additif des réels nous définirons

$$F_z = \{f \in F;\ \omega f > z\}$$

ce qui entrainera en particulier que $\mu f \in P$ (sous-monoïde des matrices d'application de I dans I) pour tout $f \in F \backslash F_0$. Avec ces notations (1) s'écrit donc

$$(W_1) \cdot \lim_{z\to\infty} \{\|\mu f_1 f_2 - \bar{\mu} f_2\| : f_1 \in F, f_2 \in F_z\} = 0$$

Considérons maintenant le cas où les $\mu f \in M_r$ (ensemble des matrices stochastiques $I \times I$ ayant r classes ergodiques). La forme la plus générale de telles matrices est (Fig. 1; [3])

$g_i i \in [1, m]$: blocs indécomposables de classes ergodiques cycliques r_{ik}
$t_j j \in [1, p]$: groupements transitoires

Il est clair que la propriété pour une matrice μf d'avoir r classes ergodiques ne dépend pas de la valeur particulière des entrées mais de la

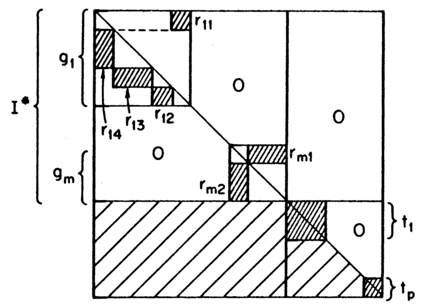

FIG. 1

distribution des éléments nuls. Nous associerons donc à chaque μf sa matrice de support $\beta\mu f$ définie de la manière suivante:

$$
\begin{aligned}
(\beta\mu f)_{ij} &= 1 \quad \text{si } (\mu f)_{ij} \neq 0 \\
&= 0 \quad \text{si } (\mu f)_{ij} = 0
\end{aligned}
$$

Avec les lois d'addition et de multiplication booléennes on voit aisément que β est un homomorphisme du monoïde $\{\mu f; f \in F\}$ dans le sous-monoïde des matrices de support:

$$\beta(\mu f_1) \cdot \beta(\mu f_2) = \beta(\mu f_1 \cdot \mu f_2) = \beta(\mu f_1 f_2)$$

En remarquant, d'autre part que

La $i$ème ligne de $\beta(\mu f_1 f_2) = \bigcup_k \{k\text{ième ligne de } \beta\mu f_2;\ k \in \beta\mu f_1\}$

on vérifie immédiatement que:

Si $\beta_i \mu f_1$ est un élément minimal de la famille $\{\beta_j \mu f_1; j \in I\}$

ordonnée par inclusion, $\beta_i \mu f_1 f_2$ est un élément minimal de la famille $\{\beta_j \mu f_1 f_2; j \in I\}$.

Si $\beta_i \mu f_1 f_2 \cap \beta_{i'} \mu f_1 f_2 = \phi$ alors, d'une part $\beta_i \mu f_1 \cap \beta_{i'} \mu f_1 = \phi$, d'autre part $\beta_j \mu f_2 \cap \beta_{j'} \mu f_2 = \phi$ pour tout $j \in \beta_i \mu f_1$ et $j' \in \beta_{i'} \mu f_1$. Il découle de ces dernières relations que si $\Delta(\mu f)$ est la cardinalité maximale d'un ensemble de lignes de μf ayant leurs supports deux à deux disjoints, on a pour tout $\mu f_1, \mu f_2 \in M$.

$$\Delta(\mu f_1 f_2) \leqslant \{\Delta(\mu f_1), \Delta(\mu f_2)\}$$

Le sous-monoïde des supports étant fini il existe un $n \geqslant$ **(Card I)**! et un q tels que

$$(\beta\mu f)^n = (\beta\mu f)^{n+q}$$

La propriété est alors vraie pour une infinité de n et nous dirons que $(\beta\mu f)^n$ est cyclique.

En réservant la notation $I_j^*(f)$ $(j \in [1, r])$ à la $j$ième classe ergodique et en posant $I^*(f) = \cup\{I_j^*(f); j \in [1, r]\}$ la restriction à $I_j^*(f) \times I$ de $\beta\mu f$ est contenue dans un "rectangle" $I_j^*(f) \times I_{j'}^*(f)$ et elle est égale à ce rectangle si $\beta\mu f$ est cyclique, parce qu'alors les sous-matrices r_{ij} (Fig. 1) n'ont que des éléments différents de zéro.

D'autre part, le groupement cyclique g_i possédant r_i classes ergodiques est isomorphe au groupe cyclique d'ordre r_i [4], et $r!$ étant divisible par $r_1 r_2 \cdots r_m$ $(r = r_1 + \cdots r_m)$ il s'ensuit que $(\mu f)^{r!}$ est apériodique et la limite $\bar{\mu} f = \lim_{k \to \infty} \mu f^{kr!+1}$ existe.

$\bar{\mu} f$ est une matrice stochastique dont toutes les lignes dans $I^*(f) \times I$ ayant même support sont égales et dont les autres lignes sont des combinaisons linéaires à coefficients nonnégatifs des premières [3]. Il s'ensuit que la restriction à $I \times I^*(f)$ du support de μf est contenue dans $\beta\bar{\mu} f$ et $\beta\bar{\mu} f$ est égale à la restriction à $I \times I^*(f)$ du support de μf quand $\beta\mu f$ est cyclique.

Ces notions étant rappelées, définissons R comme la fermeture convexe du sous-ensemble $P_r \subset P$ des matrices représentant une application $I \to I$ telle que l'image I_p de I ait au plus r éléments. A chaque $f \in F$ nous associons $\chi f \in [0, 1]$, $\mu_R f \in R$ et $m \in M$ par les relations suivantes:

$$\mu f = (1 - \chi f)\mu_R f + \chi f m$$
$$\chi f = \min\{\chi \in [0, 1]: \mu f = (1 - \chi)m + \chi m'; m \in R, m' \in M\}$$

Enfin soit F_+ l'ensemble des $f \in F$ tel qu'il existe au moins un $g \in F_0$ de support cyclique et une paire $f', f'' \in F$ satisfaisant $\beta\mu f = \beta\mu f' g f''$.

Remarque 1. Pour chaque $f \in F_+$ on a $\chi f < 1$ et $\beta\mu_R f \subset \beta\bar{\mu} f$.

Vérification. Il est clair que $PP_rP \subset P_r$ et que le support de tout $m \in M$ est une union de supports d'applications $p' \in P$. Il en résulte immédiatement que $\chi ff' \leqslant \chi f \cdot \chi f'$ pour tout $f, f' \in F$. En effet,

$$\begin{aligned}
\mu f &= (1 - \chi f)\mu_R f + \chi f m \\
\mu f' &= (1 - \chi f')\mu_R f' + \chi f' m' \\
\mu f \cdot \mu f' = \mu ff' &= (1 - \chi f)(1 - \chi f')\mu_R f \cdot \mu_R f' + \chi f'(1 - \chi f)\mu_R f m' \\
&\quad + \chi f(1 - \chi f')m \cdot \mu_R f' + \chi f \cdot \chi f' mm'
\end{aligned}$$

Etudions les produits $\mu_R f \cdot \mu_R f'$, $\mu_R f \cdot m'$, $m\mu_R f'$, et mm'. La fermeture convexe de l'ensemble P_r étant égale à l'ensemble des combinaisons linéaires convexes de P_r on a

$$\mu_R f \cdot \mu_R f' \in R$$

D'autre part,

$$m \cdot \mu_R f' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k' m r_k' \qquad \mu_R f \cdot m' = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k r_k m'$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k' = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k = 1$$

On vérifie aisément que $mr_k' \in R$, et que $r_k m'$ est une matrice stochastique dont toutes les lignes de même support dans $I^* \times I$ sont identiques, les autres étant des combinaisons linéaires à coefficients nonnégatives des premières, donc $r_k m' \in R$. Comme $mm' \in M$ on peut écrire:

$$\begin{aligned}
(1 - \chi f)(1 - \chi f')\mu_R f \cdot \mu_R f' + \chi f'(1 - \chi f)\mu_R f \cdot m' + \chi f(1 - \chi f')m \cdot \mu_R f' \\
= (1 - \chi f \cdot \chi f')\mu_R ff' \qquad \text{avec } \mu_R ff' \in R
\end{aligned}$$

puis

$$\mu ff' = (1 - \chi f \cdot \chi f')\mu_R ff' + \chi f \cdot \chi f' m''$$

ce qui montre que $\chi ff' \leqslant \chi f \cdot \chi f'$.

Considérons $g \in F_0$ de support cyclique. Si $I' \subset I$ a un et un seul élément en commun avec chacune des classes ergodiques $I_j^*(g)$, le fait que pour chaque $i \in I$ la ligne $\beta_i \mu g$ contienne au moins un $I_j(g)$ montre qu'il existe au moins un $p \in P_r$ tel que $I' = Ip$ et $\beta p \subset \beta \mu g$. Donc $\chi g < 1$ et par conséquent $\chi f' g f'' < 1$ pour tout $f', f'' \in F$. Comme la propriété $\chi m < 1$ ne dépend en fait que de βm, l'inégalité $\chi f < 1$ pour $f \in F_+$, est établie.

Soit maintenant $\beta p \subset \beta \mu f$ où $p \in P_r$ et $f \in F_+$. Si $I' = Ip$, l'union des supports des colonnes de μf d'indice $i \in I'$ est égale à I, et il en est de même pour toute matrice de la forme $\mu f' f$. Prenant $f' = f^n$ tel que $\beta \mu f' f$ soit cyclique, on en conclut que I' doit avoir un (et un seul) élément en commun avec chacune des classes ergodiques $I_j^*(f)$ et qu'en particulier $I' \in I^*(f)$. Comme $\beta p \subset \beta \mu f$ et comme la restriction de $\beta \mu f$ à $I \times I^*(f)$ est contenue dans $\beta \bar{\mu} f$, la remarque est entièrement vérifiée.

Il résulte de $\beta\mu\ f \subset \beta\bar{\mu}f$ que chaque classe $I_j^*(f)$ admet un sous-ensemble minimal $I_j'^*(f)$ tel que $I^*(f) \times I_j'^*(f)$ contienne la restriction à $I^*(f) \times I_j^*(f)$ du support de $\mu_R f$. De même, il existe un sous-ensemble maximal $I_j''^*(f)$ contenant tous les $i \in I$ tels que $\beta_i \mu_R f \subset I_j'^*(f)$.

Exemple

$$\mu f = \begin{array}{ll|ccccc:ccc}
 & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\underbrace{\quad\quad}_{I_1'^*}\quad}^{I_1^*}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\underbrace{\quad\quad}_{I_2'^*}}^{I_2^*}} & & & \\
I_1''^* & I_1^* & . & . & . & x & x & . & . & . \\
 & & . & . & . & x & x & . & . & . \\
 & & . & . & . & x & x & . & . & . \\
 & I_2^*,\ I_2''^* & x & x & x & . & . & . & . & . \\
 & & x & x & . & . & . & . & . & . \\
\hdashline
 & & x & x & . & . & . & . & . & x \\
 & & . & . & . & x & x & . & . & . \\
 & & x & x & x & x & x & x & x & x
\end{array}$$

$$\mu_R f = \begin{array}{cccccccc}
. & . & . & x & x & . & . & . \\
. & . & . & x & x & . & . & . \\
. & . & . & x & x & . & . & . \\
x & x & . & . & . & . & . & . \\
x & x & . & . & . & . & . & . \\
x & x & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & x & x & . & . & . \\
x & x & . & x & x & . & . & .
\end{array}$$

$$\bar{\mu}f = \begin{array}{cccccccc}
. & . & . & x & x & . & . & . \\
. & . & . & x & x & . & . & . \\
. & . & . & x & x & . & . & . \\
x & x & x & . & . & . & . & . \\
x & x & x & . & . & . & . & . \\
x & x & x & . & . & . & . & . \\
. & . & . & x & x & . & . & . \\
x & x & x & x & x & . & . & .
\end{array}$$

Remarque 1′. Si $f, f' \in F_+$ il correspond à chaque $j \in [1, r]$ un et un seul $j' \in [1, r]$ tel que $I_j'^*(f) \subset I_{j'}''^*(f')$.

Vérification. Soit $f \in F_+$ on a $\Delta(\mu f) \leqslant \Delta(\mu g) = r$ puisque f admet g comme facteur. D'autre part nous savons que pour $n \geqslant$ **(Card I)**! μf^n est cyclique donc $r = \Delta(\mu f^n) \leqslant \Delta(\mu f)$, il s'ensuit que $\Delta(\mu f) = r$.

Considérons maintenant le cas particulier de l'énoncé où $\beta\mu f$ et $\beta\mu f'$ sont cycliques. La relation $\Delta(\mu f f') = r$ montre que pour chaque $i \in I_j^*(f)$, le support $\beta_i \mu f'$ doit avoir une intersection nonvide avec une seule classe $I_{j'}^*(f)$. Le cas général s'en déduit immédiatement: en effet, $I_j'^*(f) \subset I_j^*(f)$ et les seuls $i \in I$ tels que $\beta_i \mu f'$ n'intersecte qu'une seule classe $I_{j''}^*(f')$, appartiennent à l'union $I''^*(f')$ des ensembles disjoints $I_j''^*(f')$.

Nous écrivons désormais pour abréger lim au lieu de $\lim_{z\to\infty}$ max et nous désignons par f_z et f'_z des variables liées par la condition $f_z, f'_z \in F_z$.

Remarque 2. $\mathrm{Lim}\|\mu f_z - \mu_R f_z\| = 0$.

Vérification. Soit $B = \{\beta\mu f; f \in F_0\}$. Si un élément $b \in B$ appartient à une $\mathscr{D}$-classe régulière [5], il existe un élément $b' \in B$ tel que $b'^2 = b'$ et $b'b = b$. Donc si B_+ est l'idéal de B engendré par les D-classes régulières, l'image inverse de B_+ par β^{-1} appartient à F_+.

Soit h le nombre des $\mathscr{D}$-classes de B, B étant fini on a $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ et dans le monoïde $B^1 = B \cup e$ la relation d'inclusion sur les idéaux bilatères principaux $B^1 a B^1 \subseteq B^1 b B^1$, $a, b \in B^1$ induit une relation d'ordre partiel sur les $\mathscr{J}$-classes donc sur les $\mathscr{D}$-classes. Autrement dit les idéaux bilatères principaux forment un semi-treillis dont l'élément minimal, idéal minimum de B, est une $\mathscr{D}$-classe régulière (plus précisément un sous-demi-groupe complètement simple). Or nous savons [6] que si b', b'' et $b'b''$ appartiennent à la même $\mathscr{D}$-classe celle-ci est régulière, autrement la $\mathscr{D}$-classe de $b'b''$ est telle que

$$\mathscr{D}_{b'b''} \leqslant \mathscr{D}_{b'} \qquad \mathscr{D}_{b'b''} \leqslant \mathscr{D}_{b''}$$

On peut alors montrer que tout produit $b_1 b_2 \cdots b_{\bar{h}}$ de $\bar{h} = 2^{h-1}$ éléments de B a au moins un facteur nonvide appartenant à une $\mathscr{D}$-classe régulière de B donc appartient lui-même à βF_+. Ceci est trivial pour $h = 1$ puisque dans ce cas B a une seule $\mathscr{D}$-classe qui est nécessairement régulière. On peut donc supposer le résultat vérifié quand B a moins de $h > 1$ $\mathscr{D}$-classes, et naturellement, on peut aussi supposer qu'aucun des $b_{k'}$ $(k' = 1, 2 \ldots, \bar{h} = 2^{h-1})$ n'appartient lui-même à une $\mathscr{D}$-classe régulière. Le sous-monoïde engendré par les 2^{h-2} produits $b_1 b_2, b_3 b_4, \ldots, b_{\bar{h}-1} b_{\bar{h}}$ a au plus $h-1$ $\mathscr{D}$-classes et le résultat découle de l'hypothèse d'induction.

Soit maintenant $F'_+ = F_+ \backslash F \times F_+ \times F$. Le résultat qui vient d'être vérifié montre que tout $f \in (F_0)^{n\bar{h}}$ a au moins n facteurs dans F'_+. Faisant intervenir l'hypothèse selon laquelle $\omega x = 0$ ou $\omega x > \bar{\omega} > 0$ pour tout $x \in X$ on voit que $\omega f > \bar{\omega}^{\bar{h}}$, $\chi f < 1 - \omega f < 1 - \bar{\omega}^{\bar{h}}$ pour tout $f \in F'_+$ et par suite $\chi f < (1-\bar{\omega}^{\bar{h}})^n$ pour tout $f \in (F_0)^{n\bar{h}}$ ce qui entraine $\lim \chi f_z = 0$.

Soit $m \in M$ et définissons [7]

$$\lambda(m) = 1 - \min_{i_1 i_2} \sum_j \min(m_{i_1 j}, m_{i_2 j})$$

on a $0 \leqslant \lambda(m) \leqslant 1$ avec

$$\begin{array}{ll} \lambda(m) = 0 & \text{si et seulement si } m \text{ a toutes ses lignes égales} \\ \lambda(m) = 1 & \text{si et seulement si } \beta m \text{ a deux lignes disjointes} \end{array}$$

$0 < \lambda(m) < 1$ définiera une "scrambling matrix," c'est-à-dire que quelles que soient les deux lignes $i_1 i_2$ il existe une colonne j telle que $m_{i_1 j}, m_{i_2 j} > 0$.

On démontre que $\delta(m_1 m_2) \leqslant \delta(m_1)$ et qu'un produit de matrices stochastiques dont un facteur est "scrambling" est lui-même scrambling. Cette propriété est identique à celle des matrices positives ayant une colonne d'éléments nonnuls et aux matrices $\mu f \in F_+$.

Soit V l'ensemble des I-vecteurs v à coordonnées nonnégatives tels que $\Sigma_{i \in I} v_i = 1$. Pour $(v, v') \in V \times V$ et $m \in M$ nous pouvons poser

$$\delta_{vv'} m = 1 - \sum_{i \in I} \min\{(vm)_i, (v'm)_{i'}\}$$

Par définition: $\delta_{vv'} m = \lambda(m_v m')$ où m_v est une matrice stochastique dont les deux premières lignes sont identiques aux vecteurs v et v', les autres étant, par exemple, identique à v (ou v'). On a donc pour tout $m' \in M$

$$0 = \delta_{vv'} mm' \leqslant \delta_{vv'} m \leqslant 1 \qquad \text{avec } \delta_{vv'} m = 0 \text{ (resp. } = 1)$$

si et seulement si $vm = vm'$ (resp. $\beta vm \cap \beta v'm = \phi$). Quand μ et μ' sont deux applications de F dans M telles que $\lim \|\mu f_z - \mu' f_z\| = 0$ on a évidemment $\lim |\delta_{vv'} \mu f_z - \delta_{vv'} \mu' f_z| = 0$.

Nous considérons maintenant un sous-ensemble fixe K de I ayant r éléments et nous définissons la $I \times I$ matrice e_k par $(e_k)_{i,i'} = 1$ si $i = i' \in K$; $= 0$, autrement. Pour abréger, nous écrivons $m' \in M'$ (resp. $m'' \in M''$) si $m' = m \cdot e_k$ (resp. $m'' = e_k \cdot m$ pour au moins un $m \in M$) et si m' contient r lignes ayant des supports disjoints telles que toute autre ligne soit une combinaison linéaire à coefficients nonnégatifs de ces dernières (resp. et si m'' a r lignes ayant des supports disjoints nonvides).

Remarque 3. Il existe deux applications $\mu' : F \to M'$ et $\mu'' : F \to M''$ telles que $\lim \|\mu f_z - \mu' f_z \cdot \mu'' f_z\| = 0$.

Vérification. Nous utilisons les notations de la Remarque 1'. Le support de la restriction de $\mu_R f_z$ à $I''^*(f_z) \times I$ est une union de r rectangles disjoints

$I''_j(f_z) \times I'_{j'}(f_z)$. Comme $\mu_R f_z$ appartient à la fermeture convexe R de Pr ceci entraîne que deux lignes quelconques de cette matrice soient égales quand leurs supports sont identiques. Il existe donc une matrice $\mu'' f_z \in M''$ dont les lignes nonnulles sont égales aux r lignes distinctes de la restriction de $\mu_R f_z$ à $I''^*(f_z) \times I$.

Soit f'_z un autre élément de F_z. D'après la Remarque 1′, chacun des ensembles $I'^*_{j'}(f'_z)$ est contenu dans un et un seul ensemble $I''_j(f_z)$ et $\mu_R f'_z$ est identique à la somme de ses restrictions à $I \times I'^*_{j'}(f_z)(j' \in [1, r])$. Donc deux lignes quelconques nonnulles de la restriction à $I \times I'_j(f_z)$ de $\mu_R f'_z \cdot \mu_R f_z$ sont proportionnelles et l'on peut trouver une application $\nu' = F \times F \to M'$ telle que l'on ait $\mu_R f'_z \cdot \mu_R f_z = \nu'(f'_z, f_z) \cdot \mu'' f_z$ identiquement. D'après la Remarque 2,

$$\lim \|\mu f'_z f_z - \mu_R f'_z f_z\| = 0$$

Par conséquent,

$$\lim \|\mu f'_z f_z - \nu'(f'_z, f_z)\, \mu'' f_z\| = 0$$

ce qui entraîne la validité de la Remarque 3.

Remarque 3′. Si les applications $\mu': F \to M'$; $\nu = F \times F \times F \to M$ et $\mu'': F \to M''$ satisfont la relation $\lim \|\mu f_z f f'_z - \mu' f_z \nu(f_z, f, f'_z) \cdot \mu'' f'_z\| = 0$, il existe trois applications $\bar{\mu}' = F \to M'$; $\rho: F \times F \times F \to M$ et $\bar{\mu}'': F \to M''$ telles que

$$\begin{aligned} \lim \|\mu' f_z - \bar{\mu}' f_z f f'_z\| &= \lim \|\nu(f_z, f, f'_z) - \rho(f_z, f, f'_z)\| \\ &= \lim \|e_k\, \nu(f_z, f, f'_z)\, \mu'' f'_z - \bar{\mu}'' f_z f f'_z\| = 0 \end{aligned}$$

et qu'en outre, d'une part la restriction de $\rho(f_z, f, f'_z)$ à $K \times I$ représente une permutation de K, d'autre part, pour tout $f' \in F_0$, $\bar{\mu} f' = \bar{\mu}' f' \cdot \bar{\mu}'' f'$.

Vérification. Deux lignes de même support de la restriction à $I^*(f) \times I$ de $\bar{\mu} f'$ étant égales, les autres étant des combinaisons linéaires à coefficients nonnégatifs des précédentes, il est clair que l'existence d'applications $\bar{\mu}': F \to M'$ et $\bar{\mu}'': F \to M''$ satisfaisant $\bar{\mu} f' = \bar{\mu}' f' \cdot \bar{\mu}'' f'$ est triviale et que toutes les paires d'applications satisfaisant ces conditions sont équivalentes sur F_0 à une permutation de K près.

Désignons maintenant par $\lambda^i m$ la plus grande entrée de la $i$ème colonne de m. Il est bien connu que $\lambda^i m' m < \lambda^i m$ identiquement. Donc pour tout $i \in I$ et $(f_z, f, f'_z) \in F \times F \times F$ on a

$$\lambda^i \bar{\mu} f_z f f'_z = \lambda^i \bar{\mu}'' f_z f f'_z \leqslant \lambda^i \mu f_z f f'_z$$

et

$$\lambda^i[\mu' f_z \cdot \nu(f_z f f'_z) \cdot \mu'' f'_z] \leqslant \lambda^i[\nu(f_z f f'_z) \cdot \mu'' f'_z] \leqslant \lambda^i \mu'' f'_z$$

Les hypothèses impliquent que

$$\lim\|\lambda^i(\mu' f_z \cdot \nu(f_z, f, f_z') \cdot \mu'' f_z') - \lambda^i \mu f_z f f_z'\| = 0$$

et comme $\bar{\mu}'' f_z f f_z'$ et $\mu'' f_z'$ appartiennent à M'', on a

$$\sum_{i\in I} \lambda^i \bar{\mu}'' f_z f f_z' = \sum_{i\in I} \lambda^i \mu'' f_z' = r$$

Donc, pour chaque $i \in I$

$$\lim|\lambda^i \bar{\mu}'' f_z f f_z' - \lambda^i(\nu(f_z f f_z') \cdot \mu'' f_z'| = \lim|\lambda^i(\nu(f_z f f_z') \cdot \mu'' f_z') - \lambda^i \mu'' f_z' = 0$$

et

$$\lim \sum_{i\in I} \lambda^i(\nu(f_z, f, f_z') \cdot \mu'' f_z') = r$$

ce qui montre l'existence de $\rho: F \times F \times F \to M$, identique à ν sur $(I \setminus K) \times I$ se réduisant à une permutation de K sur $K \times I$ et satisfaisant

$$\lim\|\nu(f_z f f_z') - \rho(f_z f f_z')\| = 0$$

D'après la première de ces relations on peut choisir $\bar{\mu}'': F \to M''$ telle que

$$\lim\|e_k \cdot \rho(f_z f f_z') \mu'' f_z' - \bar{\mu}'' f_z f f_z'\| = 0$$

De façon analogue, pour tout $(v, v') \in V \times V$ on a

$$\delta_{v,v'} \bar{\mu}' f_z f f_z' = \delta_{v,v'} \bar{\mu} f_z f f_z' \leqslant \delta_{v,v'} \mu f_z f f_z'$$

et

$$\lim \delta_{v,v'} \mu f_z f f_z' < \lim \delta_{v,v'} \mu' f_z$$

Comme l'ensemble des $(v, v') \in V \times V$ telles que $\delta_{v,v'} \bar{\mu}' f_z f f_z'$ (resp. $\delta_{v,v'} \mu' f_z$) est 0 ou 1 détermine $\bar{\mu}'$ (resp. μ') à une permutation près de K et comme le support de la restriction de $\mu f_z f f_z'$ à $I \times I^*(f_z f f_z')$ est contenu dans $\beta \bar{\mu} f_z f f_z'$, la vérification est achevée.

Propriété 1. Si $\mu: F \to M$ est telle que pour chaque $f \in F_0$ la chaine de Markov $\{\mu f^n : n \in N\}$ a exactement r classes ergodiques, il existe une application π de F dans un sous-ensemble fini de M telle que

$$(W_r) \cdot \lim\|\mu f_z f f_z' - \bar{\mu} f_z \cdot \pi f \cdot \mu f_z'\| = 0$$

Si en outre toutes les chaines $\{\mu f^n : n \in \mathbf{N}\}$ $(f \in F_0)$ sont apériodiques, on peut écrire

$$(W_r^*) \cdot \lim\|\mu f_z f f_z' - \bar{\mu} f_z \cdot \bar{\mu} f_z'\| = 0$$

Vérification. D'après la Remarque 3, il existe deux applications μ': $F \to M'$ et $\mu'': F \to M''$ telle que $\lim\|\mu f_z - \mu' f_z \cdot \mu'' f_z\| = 0$. Prenant une application ν de $F \times F \times F$ sur la matrice unité e_I et employant la Remarque 3′ on a $\lim\|\mu f_z f_z - \mu' f_z \cdot \mu'' f_z\| = 0$, ceci montre que $\lim\|\bar{\mu} f_z - \mu f_z\| = 0$. En effet, quel que soit ϵ petit on peut trouver $z(\epsilon)$ tel que pour tout $z > z(\epsilon)$ on a

$$\|\mu f_z - \mu' f_z \cdot \mu'' f_z\| < \epsilon \qquad \text{et} \qquad \|\mu f_z \cdot \mu f_z - \mu' f_z \cdot \mu'' f_z\| < \epsilon$$

d'où

$$\|\mu f_z \cdot f_z - \mu f_z\| \leqslant \|\mu f_z \cdot f_z - \mu' f_z \cdot \mu'' f_z\| + \|\mu' f_z \cdot \mu'' f_z - \mu f_z\| < 2\epsilon$$

D'autre part on voit par récurrence que

$$\|\mu f_z^{p+1} - \mu f_z^p\| \leqslant \|\mu f_z\| \, \|\mu f_z^p - \mu f_z^{p-1}\| \leqslant 2\epsilon$$

et en particulier,

$$\|\mu f_z^{kr!+1} - (\mu f_z)^{kr!}\| < 2\epsilon$$

donc en sommant

$$\|\mu f_z^{kr!+1} - \mu f_z\| < \sum_{p=1}^{kr!} \|\mu f_z^{p+1} - \mu f_z^p\| < kr!2\epsilon$$

De plus,

$$\|\bar{\mu} f_z - \mu f_z\| \leqslant \|\bar{\mu} f_z - \mu f_z^{kr!+1}\| + \|\mu f_z^{kr!+1} - \mu f_z\|$$

et on sait que si on se donne ϵ' petit on peut trouver $k(\epsilon')$ tel que pour $k > k(\epsilon')$ on aura

$$\|\bar{\mu} f_z - \mu f_z\| \leqslant 2r!\,k\epsilon + \epsilon'$$

On peut donc se donner $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', k(\epsilon')$ tels que pour tout $z > z(\epsilon)$ on aura

$$\|\bar{\mu} f_z - \mu f_z\| \leqslant \epsilon'' \text{ par suite } \lim\|\bar{\mu} f_z - \mu f_z\| = 0$$

Il n'y aura donc aucune diminution de généralité à supposer désormais que $\mu' = \bar{\mu}'$ et $\mu'' = \bar{\mu}''$, c'est à dire que $\mu' f \cdot \mu'' f = \bar{\mu} f$ pour tout $f \in F_0$.

Le premier de ces résultats donne

$$\lim\|\mu f_z f f'_z - \bar{\mu} f_z \cdot \mu f \cdot \bar{\mu} f'_z\| = \lim\|\bar{\mu} f_z f f'_z - \bar{\mu} f_z \cdot \mu f \cdot \bar{\mu} f'_z\| = 0$$

Comme

$$\bar{\mu} f_z \cdot \mu f \cdot \bar{\mu} f'_z = \mu' f_z \cdot \nu(f_z, f, f'_z) \cdot \mu'' f'_z$$

où maintenant ν est une application quelconque de $F \times F \times F$ dans M telle que $e_K \cdot \nu(f_z, f, f'_z) = \mu'' f_z \cdot \mu f \cdot \mu' f'_z$, on peut appliquer de nouveau la Remarque 3′ qui montre cette fois l'existence d'une application ρ de $F \times F \times F$ dans M telle que $e_K \cdot \rho$ soit une permutation de K et que

$$\lim\|\mu'' f_z \cdot \mu f \cdot \mu' f'_z - e_K \cdot \rho(f_z, f, f'_z)\| = 0$$

D'après l'hypothèse faite plus haut,

$$\mu' f_z \cdot \mu'' f_z = \bar{\mu} f_z \qquad \text{et} \qquad \mu' f'_z \cdot \mu'' f'_z = \bar{\mu} f'_z$$

On en conclut que $\mu'' f_z \cdot \mu f \cdot \mu' f'_z$ est elle-même, pour tout $(f_z, f, f'_z) \in F \times F \times F_0$, une matrice ayant son support contenu dans $K \times K$ et représentant une permutation de cet ensemble.

Puisque les matrices $\mu' f_z$, μf, et $\mu' f'_z$ ont des entrées nonnégatives, ceci entraîne $\mu'' f_z \cdot \mu f \cdot \mu' f'_z = \mu'' f_z \cdot \pi f \cdot \mu' f'_z$ quelque soit l'application $\pi: F \to M$ telle que $\beta\mu f = \beta\pi f$. Par conséquent, sous cette hypothèse $\bar{\mu} f_z \cdot \mu f \cdot \bar{\mu} f'_z = \bar{\mu} f_z \cdot \pi f \cdot \bar{\mu} f'_z$ ce qui achève la vérification de (W_r) puisque le monoïde $\{\beta\mu f : f \in F\}$ est fini.

Supposons maintenant que toutes les chaînes $\{\mu f^n : n \in \mathbf{N}\}$ soient apériodiques, c'est-à-dire que $\bar{\mu} f = \bar{\mu} f^2$ pour tout $f \in F_0$, c'est-à-dire encore (dans les notations de la Remarque 2′) que $I'_j{}^*(f) \subset I''_j{}^*(f)$ pour tout $j \in [1, r]$. La Remarque 1′ montre que l'on peut choisir l'indexage des classes ergodiques des différentes chaînes $\{\mu f^n : n \in \mathbf{N}\}$ $(f \in F_0)$ de telle sorte que $I'_j{}^*(f) \subset I''_j{}^*(f')$ pour tout $f, f' \in F_+$ et $j \in [1, r]$. Ceci entraîne que $\mu'' f_z \cdot \mu' f'_z = e_K$ identiquement quand $f_z, f'_z \in F_+$. La propriété est entièrement vérifiée.

Note: Cet exposé est un développement de l'article "Sur certaines chaînes de Markov non-homogènes" par J. Larisse et M. P. Schützenberger, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, Vol. XIII, fasc. 1, 1964.

Références

1. C. Chevalley, *Fundamental Concepts of Algebra*, Academic Press, New York, 1956.
2. J. Wolfowitz, Products of indecomposable, aperiodic stochastic matrices, *Proc. Am. Math. Soc.* **14**, 733–737 (1963).
3. J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, 1953.
4. M. Hall, Jr., *The Theory of Groups*, Macmillan, 1959.
5. A. H. Clifford et G. B. Preston, *Algebraic Theory of Semi-Groups*, Vol. 1, Am. Math. Soc., 1961.
6. J. A. Green, On the structure of semi-groups, *Ann. Math.* **54**, 163–172 (1951).
7. J. Hajnal, Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **54**, 233–246 (1958).